УДК 517.9

О МАРКОВСКИХ ОПЕРАТОРАХ

Е. М. Мелькумова

Воронежский государственный университет

Рассматривается задача описания класса дифференциальных операторов, которые являются генераторами марковских полугрупп операторов. В данной работе доказано, что таким оператором является дифференциальный оператор второго порядка, определенный периодическими краевыми условиями.

В статье доказано, что дифференциальный оператор второго порядка, определенный периодическими краевыми условиями, является генератором марковской полугруппы операторов в пространстве непрерывных функций на отрезке.

Пусть K — компактное топологическое пространство. Через $C=\mathrm{C}(K)$ обозначим банахово пространство непрерывных действительнозначных функций на K с «supremum» нормой; $C_{2\pi}(R)$ — банахово пространство непрерывных на $[0,2\pi]$, комплексных и периодических с периодом 2π функций. Пусть $\mathrm{C}^*=\mathrm{C}^*(K)$ — сопряженное к $C(K)$ банахово пространство функционалов, изометрически изоморфное и отождествляемое с банаховым пространством регулярных мер Радона на σ-алгебре борелевских подмножеств из K; $S^*(K)=\{p\in C^*(K)|p\geq 0,\|p\|=1\}$ — набор вероятностных мер. Отметим, что $S^*(K)$ является слабым* выпуклым компактным множеством в C*. Всюду через L(X) обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов, определенных в банаховом пространстве X [1].

Определение 1. Оператор $M\in L(C)$ называется *марковским оператором*, если выполняются свойства:

1) $M1=1$;

2) $M\geq 0$ (т.е. $M\varphi\geq 0$ для любой неотрицательной функции $\varphi\in C$).

Обозначим через $\mathrm{M}=\mathrm{M}(C)$ множество марковских операторов $\mathrm{M}=\mathrm{M}(C)=\{M\in L(C):(M\geq 0, M1=1)\}$. Отметим следующие свойства марковских операторов:

1) Множество $\mathrm{M}=\mathrm{M}(C)$ является выпуклым;

2) $\|M^*\|=1, M^*(\mu)\geq 0$ для любой $\mu\in S^*(K)$;

3) Множество $\mathrm{M}^*=\mathrm{M}^*(C)=\{M^*\in L(C^*):(M\in \mathrm{M})\}$ выпукло.

Определение 2. Двусторонняя последовательность комплексных чисел $\{a_n\}, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ называется *положительно определенной*, если

а) $a_{-n}=\overline{a_n}, n\in Z$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}a_{k-j}z_k\bar{z}_j\geq 0$ для любого натурального числа m и любого набора $(z_1,..,z_m)$ комплексных чисел.

Определение 3 [2]. Функция $\varphi: R\to C$ называется *положительно определенной*, если она:

1) непрерывна при каждом конечном аргументе и ограничена на $(-\infty,+\infty)$;

2) «эрмитова», т.е. $\overline{\varphi(-x)}=\varphi(x)$;

3) для любых точек $\{t_1,\ldots,t_m\}$ и любых чисел $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ ($m=1,2,\ldots$) выполнено неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\varphi(t_i-t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j}\geq 0$.

Замечание 1. Непосредственно из определений 2 и 3 следует, что если $\varphi: R\to C$ является положительно определенной функцией, то ее сужение $\bar{\varphi}: Z\to C, \bar{\varphi}(n)=\varphi(n), n\in Z$ также является положительно определенной.

Замечание 2. Пусть $x_0\in C_{2\pi}(R)$. Тогда последовательность $x_n=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x_0(\tau)e^{-in\tau}d\tau$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда функция x_0 неотрицательна, т.е. $x_0\geq 0$.

Замечание 3. Произведение двух положительно определенных функций есть положительно определенная функция.

В статье используется

Лемма 1 [3, теорема 7.2]. Для любых функций $x,y\in C_{2\pi}(R)$ с рядами Фурье вида $x(t)\approx\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x_ne^{\mathrm{int}}$, $y(t)\approx\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}y_ne^{\mathrm{int}}$, их свертка $(x*y)(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t-\tau)y(\tau)d\tau, t\in R$ имеет ряд Фурье вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x_ny_ne^{\mathrm{int}}, t\in[0,2\pi]$.

В данной работе рассматривается дифференциальный оператор $A : D(A) \subset C_{2\pi}(R) \to C_{2\pi}(R)$ вида

$$Ay = y'', y \in D(A) = \\ = \{y \in C_{2\pi}^{(2)}(R) : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)\}, \quad (1)$$

где $C_{2\pi}^{(2)}(R)$ — подпространство из $C_{2\pi}(R)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций. Его спектр $\sigma(A)$ имеет вид $\sigma(A) = \{-n^2, n \ge 0\}$, все числа $-n^2, n \ge 0$ являются собственными значениями, а соответствующие собственные функции имеют вид $e_n(s) = e^{ins}, s \in [0,2\pi], n \in Z$.

Данный оператор является генератором полугруппы операторов $T : R_+ = [0,+\infty] \to \to L(C_{2\pi}(R))$ вида

$$(T(t)x)(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}(x, e_n)e_n(s) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-in\tau}d\tau)e^{ins}, \quad (2)$$

где $(x, e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-in\tau}d\tau$ — скалярное произведение функций x и e_n.

При этом используются следующие понятия:

Определение 4. Операторная функция $T : R_+ \to L(X)$, где X — банахово пространство, называется *полугруппой класса* C_0, если выполняются следующие условия:

1) $T(0) = I$;

2) $T(t + s) = T(t)T(s), t, s \ge 0$;

3) функция $t \mapsto T(t)x : R_+ \to X$ непрерывна при любом $x \in X$.

Для $h > 0$ определим линейный оператор A_h равенством $A_h = \dfrac{T(h)x - x}{h}, x \in X$. Пусть $D(A)$ — множество всех x из X, для которых существует предел $\lim\limits_{h\to 0}(A_h x)$. Определим на $D(A)$ оператор A равенством $Ax = \lim\limits_{h\to 0}(A_h x)$, $x \in D(A)$.

Определение 5. Оператор A с областью определения $D(A)$ называется *генератором* или *инфинитезимальным оператором полугруппы T*.

Определение 6. Генератор полугруппы марковских операторов в C назовем *оператором Колмогорова*.

Основным результатом статьи является

Теорема. Полугруппа операторов T, определенная равенством (2) для краевой задачи (1), является марковской полугруппой.

Доказательство. Из определения полугруппы T следует, что

$$T(t)1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\tau}d\tau e^{ins} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\tau}d\tau e^{ins}, \\ t \ge 0,$$

где 1 — тождественная на $[0,2\pi]$ функция.

Так как 1 — функция, ортогональная всем функциям $e^{-in\tau}, n \ne 0$, то

$$(x, e_n) = (1, e_n) = 0, n \ne 0, \text{ т.е.}$$

$$T(t)1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau = \frac{1}{2\pi}\tau\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы показать выполнение свойства: если $x_0 \in C_{2\pi}(R)$ и $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x_0(\tau)d\tau = 1$, то функция $y_0 = T(t)x_0$ неотрицательна и $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_0(\tau)d\tau = 1$.

Вначале докажем неотрицательность функции y_0.

$$(T(t)x_0)(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_n t}(x, e_n)e_n(s) = \\ = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}\int_0^{2\pi} x_0(\tau)e^{-in\tau}d\tau e^{ins}. \quad (3)$$

Обозначим $x_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x_0(\tau)e^{-in\tau}d\tau$. Тогда (3) примет вид $(T(t)x)(s) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}x_n e^{ins}$, $\{x_n\}$ – положительно определенная последовательность (в силу замечания 2). Имеют место равенства:

$$y_0(\tau) = (T(t)x_0)(\tau) = (\varphi_t * x_0)(\tau) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}x_n e^{ins} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau - s)x_0(s)ds, \quad (4)$$

т.е. y_0 есть свертка двух функций φ_t и x_0, где $\varphi_t(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}e^{ins} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)e^{ins}, c_n(t) = e^{-n^2 t}$.

Рассмотрим функцию $g_t(\lambda) = e^{-\lambda^2 t}, g_t : R \to C$. Она представима в виде $g_t(\lambda) = e^{-\lambda^2 t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g_t}(\mu)e^{i\lambda\mu}d\mu$, где $\overline{g_t}(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\mu^2}{4t}}, t > 0$.

Функция $\overline{g_t}(\mu)$ является неотрицательной, и, значит, в силу замечания 2 функция g_t при любом $t > 0$ положительно определена. Используя замечание 1, получаем, что ее сужение $g_t(n) = e^{-n^2 t}, n \in Z$, есть положительно определенная последовательность. Таким образом, из формулы 4 следует, что функция y_0 есть свертка положительных функций φ_t (см замечание 2) и x_0. Следовательно, $y_0 \geq 0$.

Далее имеют место равенства:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_0(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(T(t)x_0)(\tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi_t * x_0)(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}(\int_0^{2\pi} x_0(\tau)\,d\tau) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} * 2\pi = 1,$$

где $\varphi_t(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{ins}$, из которых получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_0(\tau)d\tau = 1.$$

Вывод: все необходимые свойства показаны и, значит,T(t) , $t \geq 0$, — марковская полугруппа операторов.

Отметим, что не всякий дифференциальный оператор второго порядка, действующий в банаховом пространстве $C[0,1]$, является марковским. В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор $A : D(A) \subset C_1(R) \to C_1(R)$ вида

$$\begin{gathered} Ay = y'', y \in D(A) = \\ = \{y \in C[0,1] : y(0) = y(1) = 0\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Его спектр $\sigma(A)$ имеет вид $\sigma(A) = \{-\pi^2 n^2, n \geq 0\}$, все числа $-\pi^2 n^2, n \geq 0$ являются собственными значениями, а соответствующие собственные функции имеют вид $e_n(s) = \sqrt{2}\sin(\pi n s), s \in [0,1]$, $n \in Z$.

Данный оператор является генератором полугруппы операторов $T : R_+ = [0,+\infty] \to \to L(C[0,1]))$ вида

$$(T(t)x)(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 t}(x,e_n)e_n(s) =$$
$$= 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 t}(\int_0^1 x(\tau)\sin(\pi n\tau)d\tau)\sin(\pi n s)), \tag{6}$$
$$t > 0,$$

где $(x,e_n) = \sqrt{2}\int_0^1 x(\tau)\sin(\pi n\tau)d\tau$ — скалярное произведение функций x и e_n.

Рассмотрим оператор $T(0)$: $(T(0)x_0)(s) = = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(\int_0^1 \sin(\pi n\tau)d\tau)\sin(\pi n s)$.

Если бы полугруппа операторов T была марковской, то $T(0) = I$ и $\sup_{t\geq 0}\|T(t)\| \leq 1$.

Докажем, что при $t = 0$ и $x_0 = 1$ определяющий функцию $T(0)x_0$ ряд является расходящимся в $C[0,1]$. Действительно, если бы полугруппа T была сильно непрерывной, то $T(0)x_0 = x_0 \equiv 1$. С другой стороны, при любой последовательности $t_n \to 0_+$, мы получаем, что соответствующая последовательность функций $T(t_n)x_0$ обладает свойством $(T(t_n)x_0)(0) = = (T(t_n)x_0)(1) = 0$. Однако, функция x_0 не может быть пределом такой последовательности $(T(t_n)x_0)$.

Следовательно, ряд, определяющий функцию $T(0)x_0$ при $t = 0$ и $x_0 = 1$, расходится в $C[0,1]$. Значит, полугруппа операторов T(t), определенная равенством (6) для краевой задачи (5), не является марковской полугруппой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая Теория. Т. 1 / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: ИЛ, 1962—1974. — 895 с.

2. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье / С. Бохнер. — М.: ФМ, 1962. — 360 с.

3. *Рудин У.* Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

Поступила в редакцию 22.10.2007