

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ

А. А. Локтев, Д. А. Локтев

ООО «Семьюшка»  
МГТУ им. Баумана

В статье исследуется поперечный удар твердого тела посредством упругого буфера по круговому сектору сферической оболочки. Динамическое поведение мишени описывается безмоментными уравнениями движения, которые решаются с помощью лучевого метода, с точностью до постоянных интегрирования, определяемых при сращивании решений для мишени, контактной области и ударника на границе контактного диска. В работе учитывается распространения продольных волн, влияющих на деформацию мишени вне области контакта. Получены компактные аналитические выражения для контактной силы и динамического прогиба. Проведенные численные исследования и представленные графики позволяют сделать заключение о влиянии параметров конструкции на динамические характеристики взаимодействия.

### ВВЕДЕНИЕ

Использование в строительстве, машиностроении и других областях хозяйственной деятельности человека конструкций и их элементов сложной геометрической формы, композитных материалов заставляет исследователей идти по пути усложнения математических моделей процессов и объектов.

Наиболее интересными и сложными в механике деформируемых тел и ее инженерно-технических приложениях являются динамические задачи, в том числе связанные с контактным взаимодействием тел. В этом случае для увеличения достоверности результатов и более точного описания происходящих процессов необходимо учитывать волновые явления.

В данной работе исследуется круговой сектор сферической оболочки, испытывающий нормальное ударное воздействие твердого тела. Этот класс задач решался многими отечественными и зарубежными учеными в различных постановках [1–3]. Hammel [1] и Сеницкий [2] рассматривали удар вязкоупругого тела по сферической оболочке. Hammel получил и решил линейное интегральное уравнение для неизвестной контактной силы, не учитывая деформации местного смятия и распространение волн в оболочке. Сеницкий усовершенствовал эту модель, добавив в определяющие соотношения местные деформации контактной зоны, которые считались упругими. Нормальные перемещения мишени представлялись в

виде разложения по функциям Бесселя первого порядка. Удар шара по тонкой сферической оболочке, считая ее деформации упругими, рассматривал Koller и Busenhardt [3].

Задачи динамического контакта с оболочками изучались Амбарцумяном [4] и Гольденвейзером [5], которые внесли значительный вклад в развитие теории оболочек и получили уравнения, описывающие поведение их точек для различных случаев.

Бирюков и Кадомцев рассматривали осесимметричный [6] и неосесимметричный [7] удар параболического тела по шарнирно опертой по контуру сферической оболочке. Деформации в зоне контакта считались упругопластическими, а общие перемещения оболочки – упругими. Перемещения точек оболочки в нормальном и тангенциальном направлении представлялись в виде рядов по полиномам Лежандра и определялись из безмоментных уравнений движения, в качестве метода решения использовались преобразования Лапласа и асимптотические разложения искомых величин по малому параметру. В этих работах инерция местного смятия в контактной области не учитывалась, т.е. динамическая задача приводилась к квазистатическому виду. В результате были получены и численно решены системы линейно-дифференциальных уравнений относительно контактной силы для различных соотношений максимального и текущего ее значений. Были даны качественные оценки графических зависимостей контактной силы от времени взаимодействия.

В работе сделана попытка описать ударное воздействие твердого тела через буфер на сферическую оболочку, шарнирно опертую по контуру, с учетом распространения продольных волн, которые влияют на деформацию мишени вне области контакта. В качестве метода решения используется лучевой метод, основанный на представлении искомых величин в виде степенных рядов по поверхностной координате и времени и условиях совместности, а также метод сращивания асимптотических решений, полученных в зоне контакта и вне ее. Приводятся зависимости контактной силы и прогиба от различных параметров контакта.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ударник, моделируемый грузом массой  $m$  и упругим цилиндрическим элементом с жесткостью  $E_1$ , подлетает перпендикулярно со скоростью  $V_0$  к сферической оболочке толщиной  $h$  и радиусом  $R_1$  и ударяет по ней свободным концом буфера в центральной точке (рис.1). В момент удара в оболочке образуется контактная область радиусом  $r_0$ , размеры которой определяются размерами буфера (рис. 1б). Предполагается, что буфер не теряет устойчивость в процессе взаимодействия. Координатные линии направлены по меридиану  $\varphi$  и параллели  $\theta$ .

Динамический контакт ударника и оболочки описывается следующими уравнениями

$$m(\ddot{\alpha} + \ddot{w}) = -P(t), \quad (1)$$

$$BhAr_0^2 \ddot{w} = 2Ar_0(N_\varphi + N_\theta) \Big|_{\varphi=\varphi_0} \sin \varphi + P(t), \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $\alpha$  и  $w$  — перемещения верхнего и нижнего конца буфера, соответственно,  $P(t) = E_1 \alpha$  — контактная сила,  $E_1$  — жесткость буфера,  $t$  — время с момента удара,  $(N_\varphi + N_\theta) \Big|_{\varphi=\varphi_0}$  — растягивающие силы на границе контактной области,  $\varphi_0$  — меридиональная координата точек границы контактной области,  $\varphi_0 = r_0/R_1$ .

Для шарнирно опертой по контуру оболочки принимаются граничные условия

$$u_\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_1} = 0, \quad w \Big|_{\varphi=\varphi_1} = 0, \quad (3)$$

где  $u_\varphi$  — перемещение вдоль меридионального угла,  $\varphi_1$  — угол раскрытия оболочки.

Ударное взаимодействие происходит при соблюдении начальных условий

$$\dot{a} \Big|_{t=0} = V_0, \quad \ddot{w} \Big|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

После удара от контактной области в оболочке начинает распространяться продольная волна растяжения-сжатия, фронт которой представляет сферическую поверхность сильного разрыва, расширяющуюся со скоростью  $G$ . Вне контактной области за фронтом волновой поверхности искомые функции, входящие в уравнения (1), (2), представляются в виде лучевого ряда по координате и времени [9]:

$$Z(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{\gamma(k)}]_{t=R_1\varphi/G} \times \left( t - \frac{R_1(\varphi - \varphi_0)}{G} \right)^k H \left( t - \frac{R_1(\varphi - \varphi_0)}{G} \right), \quad (5)$$

где  $[Z_{\gamma(k)}] = [\partial^k Z / \partial t^k]$  — скачки производных  $k$ -го порядка по времени  $t$  от искомой функции  $Z$  на волновой поверхности  $\Sigma$ , при  $t = R_1(\varphi - \varphi_0)/G$ ,  $H(t)$  — единичная функция Хевисайда.

На неизвестные функции прогиба и продольных усилий влияют условия динамического контакта и свойства мишени, которые определяют скачки искомых величин в (5) и описываются безмоментными уравнениями движения сферической оболочки [5]

$$(N_\varphi \sin \varphi)_{,\varphi} - N_\theta \sin \varphi = \rho h R_1 \ddot{u}_\varphi \sin \varphi, \quad (6)$$

$$N_\varphi + N_\theta = -\rho h R_1 \ddot{w}, \quad (7)$$

$$N_\varphi = \frac{Eh}{(1 - \sigma^2) R_1} (u_{\varphi,\varphi} + w + \sigma (u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + w)), \quad (8)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{(1 - \sigma^2) R_1} (u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + w + \sigma (u_{\varphi,\varphi} + w)), \quad (9)$$

где  $E$  и  $\sigma$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно.

Для определения  $[Z_{\gamma(k)}]$  в лучевом ряду (5) необходимо продифференцировать определяющие уравнения (6—9)  $k$  раз по времени, взять их разность на различных сторонах волновой поверхности  $\Sigma$  и применить условие совместности [9], которое для физических компонент искомых величин имеет вид [10]

$$G \left[ \frac{\partial Z_{\gamma(k)}}{\partial \varphi} \right] = - [Z_{\gamma(k+1)}] + \frac{\delta [Z_{\gamma(k)}]}{\delta t}, \quad (10)$$

где  $\delta / \delta t$  —  $\delta$ -производная по времени на волновой поверхности.

В результате из уравнений движения (6), (7) для упругой изотропной сферической обо-

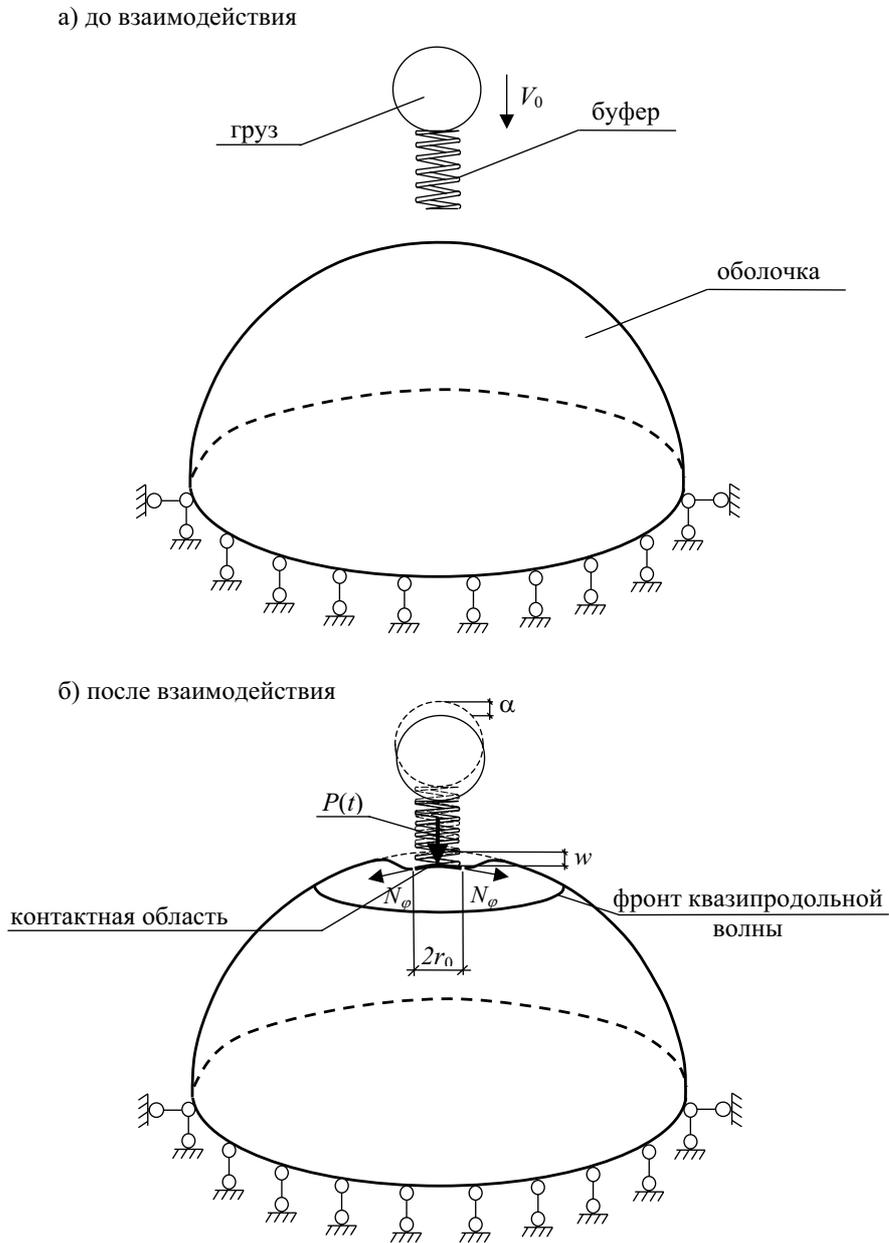


Рис. 1. Схема ударного взаимодействия твердого тела и сферической оболочки через буфер

лочку получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений, решая которую можно получить скачки искомых величин с точностью до произвольных констант:

$$\left(1 - \frac{\rho(1-\sigma^2)G^2}{E}\right)U_{(k+1)} = 2 \frac{\delta U_{(k)}}{\delta t} - G \operatorname{ctg} \varphi U_{(k)} + (1+\sigma)G \sin \varphi X_{(k)} + F_{1(k-1)}, \quad (11)$$

$$X_{(k+1)} = \frac{(1+\sigma)}{G \sin \varphi} U_{(k)} + F_{2(k-1)}. \quad (12)$$

Здесь  $X_{(k)} = [w_{\gamma(k+1)}]$ ,  $U_{(k)} = [u_{\varphi\gamma(k+1)}]$ ,  $\varphi = \varphi_0 + R_1 G t$ ,

$$F_{1(k-1)} = \frac{\delta U_{(k-1)}}{\delta t} (G \operatorname{ctg} \varphi - 1) - G^2 (1-\sigma)U_{(k-1)} - (1+\sigma)G \sin \varphi \frac{\delta X_{(k-1)}}{\delta t},$$

$$F_{2(k-1)} = -(1+\sigma) \left( \frac{1}{G \sin \varphi} \frac{\delta U_{(k-1)}}{\delta t} + 2X_{(k-1)} \right).$$

Полагая  $k = -1$ , из (11) и (12) находим на квазипродольной волне ее скорость и скачок нулевого порядка

$$\rho G^{(1)2} = E(1-\sigma^2) - 1, U_{(0)} \neq 0, X_{(0)} = 0. \quad (13)$$

Интегрируя (11) при  $k = 0$ , получим

$$U_{(0)} = \sin \varphi c_0, \quad (14)$$

а из алгебраического уравнения (12) выражение для  $X_{(1)}$

$$X_{(1)} = (1+\sigma)G^{-1}A_0 \sin^{-1/2} \varphi, \quad (15)$$

где  $A_0$  — произвольная постоянная.

Для определения скачка  $U_{(1)}$  необходимо подставить известные величины  $U_{(0)}$  и  $X_{(1)}$  в (11) при  $k = 1$ . В результате получим

$$U_{(1)} = \frac{1}{2} c_0 \ln \sin \varphi \sin^{1/2} \varphi + \frac{c_0 G}{2} \operatorname{ctg} \varphi \sin^{1/2} \varphi + c_0 G \varphi \sin^{1/2} \varphi \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - (1+\sigma)^2 \frac{c_0 \varphi}{G} \sin^{1/2} \varphi + c_1 \sin^{1/2} \varphi. \quad (16)$$

Из (12) при  $k = 1$  находим

$$X_{(2)} = (1+\sigma) \left[ \frac{1}{2} \frac{c_0}{G} \frac{\ln \sin \varphi}{\sin^{1/2} \varphi} + \frac{c_0}{2} \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin^{1/2} \varphi} + \frac{c_0 \varphi}{\sin^{1/2} \varphi} \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - (1+\sigma)^2 \frac{c_0 \varphi}{G^2 \sin^{1/2} \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi c_0}{G \sin^{3/2} \varphi} + \frac{c_1}{G \sin^{1/2} \varphi} \right]. \quad (17)$$

где  $c_1$  — произвольная постоянная.

При  $k = 2$  находим

$$U_{(2)} = \frac{\ln \sin \varphi \sin^{1/2} \varphi}{4} \left[ c_0 + c_1 + Gc_0 - 2Gc_0 \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) + c_0 (1+\sigma)^2 \right] + \operatorname{ctg} \varphi \sin^{1/2} \varphi \left[ \frac{c_0 G}{8} - \frac{c_1 G}{4} + \frac{c_0}{4} \right] + \frac{c_0}{16} \ln^2 \sin \varphi \sin^{1/2} \varphi + \varphi \sin^{1/2} \varphi \left[ \frac{c_0}{4} - \frac{G}{4} \left( \frac{1}{2} c_0 + c_1 \right) + \frac{Gc_0}{2} \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - \frac{(1+\sigma)^2}{2G} (c_0 + c_1) \right] + \frac{\sin^{1/2} \varphi}{2} \left[ Gc_0 \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - \frac{(1+\sigma)^2 c_0}{2G} \right] \times \left( \int \varphi \operatorname{ctg} \varphi d\varphi - G \int \varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi d\varphi \right) - \frac{c_0}{8} \sin^{1/2} \varphi \int \operatorname{ctg}^2 \varphi \ln \sin \varphi d\varphi - \frac{G^2 c_0}{8 \sin^{3/2} \varphi} (1 - \cos^2 \varphi) - \frac{c_0}{4G} \sin^{1/2} \varphi (1+\sigma)^2 \int \ln \sin \varphi d\varphi + \frac{c_0 \varphi^2 \sin^{1/2} \varphi}{4} \left[ \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - \frac{(1+\sigma)^2}{G^2} \right] + c_2 \sin^{1/2} \varphi, \\ X_{(3)} = \frac{\ln \sin \varphi (1+\sigma)}{4G \sin^{1/2} \varphi} \left[ c_0 + c_1 + Gc_0 - 2Gc_0 \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) + c_0 (1+\sigma)^2 \right] + \frac{\operatorname{ctg} \varphi (1+\sigma)}{\sin^{1/2} \varphi} \left[ \frac{c_0}{4G} - \frac{3c_0}{8} - \frac{3c_1}{4} \right] + \frac{c_0 (1+\sigma) \ln^2 \sin \varphi}{16G \sin^{1/2} \varphi} + \frac{\varphi (1+\sigma)}{G \sin^{1/2} \varphi} \left[ \frac{c_0}{4} - \frac{G}{4} \left( \frac{1}{2} c_0 + c_1 \right) + \frac{Gc_0}{2} \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - \frac{(1+\sigma)^2}{2G} (c_0 + c_1) \right] + \frac{(1+\sigma)}{2G \sin^{1/2} \varphi} \left[ Gc_0 \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - \frac{(1+\sigma)^2 c_0}{2G} \right] \times \left( \int \varphi \operatorname{ctg} \varphi d\varphi - G \int \varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi d\varphi \right) - \frac{c_0 (1+\sigma)}{8G \sin^{1/2} \varphi} \int \operatorname{ctg}^2 \varphi \ln \sin \varphi d\varphi - \frac{Gc_0 (1+\sigma)}{8 \sin^{1/2} \varphi} \left( \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi \right) - \frac{c_0 (1+\sigma)^3}{4G^2 \sin^{1/2} \varphi} \int \ln \sin \varphi d\varphi + \frac{c_0 \varphi^2 (1+\sigma)}{4G \sin^{1/2} \varphi} \left[ \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - \frac{(1+\sigma)^2}{G^2} \right] + \frac{(1+\sigma)}{\sin^{1/2} \varphi} \left[ (1+\sigma)^2 \frac{c_0}{G} - Gc_0 \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) + \frac{c_2}{G} \right] - \frac{(1+\sigma)}{2} \left[ Gc_0 \left( \frac{3}{2} - \sigma \right) - (1+\sigma)^2 \frac{c_0}{G} \right] \frac{\varphi}{\sin^{3/2} \varphi} - \frac{c_0 (1+\sigma) \operatorname{ctg} \varphi \ln \sin \varphi}{4 \sin^{1/2} \varphi},$$

где  $c_2$  — произвольная постоянная.

Из выражений (11) — (19) видно, что волновые процессы для данной модели оболочки влияют вначале на скачки перемещения вдоль меридионального угла и только затем на скачки прогиба следующего порядка.  $U_{(k)}$  определяются из решения дифференциального уравнения, а  $X_{(k)}$  — алгебраического.

Скачки на первой и второй волнах при  $k = 3, 4$  также были подсчитаны, но не приводятся в виду их громоздкости.

Найденные скачки позволяют записать выражения для искомых функций в виде отрезков лучевых рядов с известными с точностью до постоянных интегрирования коэффициентами

$$W \cong \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} X_{(k)} y_\alpha^k H(y_\alpha), \quad (20)$$

$$V \cong \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} U_{(k)} y_\alpha^k H(y_\alpha), \quad (21)$$

$$N_\varphi = \frac{Eh}{(1-\sigma^2)R_1} \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \left[ -U_{(k)} G^{-1} + \frac{\delta U_{(k-1)}}{\delta t} G^{-1} + X_{(k-1)} + \sigma \left( U_{(k-1)} \operatorname{ctg} \varphi + X_{(k-1)} \right) \right], \quad (22)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{(1-\sigma^2)R_1} \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \left[ U_{(k-1)} \operatorname{ctg} \varphi + X_{(k-1)} + \sigma \left( -U_{(k)} G^{-1} + \frac{\delta U_{(k-1)}}{\delta t} G^{-1} + X_{(k-1)} \right) \right], \quad (23)$$

где  $y_\alpha = t - (r - r_0)G^{-1}$ , а величины  $X_{(k)}$  и  $U_{(k)}$  вычисляются при  $y_\alpha = 0$ .

Выражения (20), (21) удовлетворяют граничным условиям (3). Для определения постоянных интегрирования необходимо совместить уравнения описывающие неизвестные величины в контактной области и вне ее. Для этого подставим выражения (20)–(23), записанные на границе контактной области, т.е. при  $\varphi = \varphi_0$  в уравнения (1), (2), а функцию  $\alpha$  представим в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5, \quad (24)$$

где  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) — пока неизвестные константы.

В результате описанной процедуры приходим к системе двух алгебраических уравнений. Приравнивая коэффициенты, стоящие у переменной  $t$  с одинаковыми показателями степени, получим набор систем относительно неизвест-

ных  $c_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) и  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

Решая систему из (1), (2), (20)–(24) с учетом (4), получим

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = V, \quad \alpha_2 = 0, \quad c_0 = 0, \\ c_1 &= \frac{E_1 V_1 G (\sin \varphi_0)^{1/2}}{2\pi r_0 (1 + \sigma) (\rho h r_0 - E \sin \varphi_0)}, \\ \alpha_3 &= -\frac{E'V}{6} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{\pi r_0 (\rho h r_0 - E \sin \varphi_0)} \right), \\ c_2 &= c_1 \left[ -\frac{\ln \sin \varphi_0}{4} + \right. \\ &+ \frac{G \operatorname{ctg} \varphi_0}{4} \frac{\left( \frac{9\rho h r_0}{(\sin \varphi_0)^{1/2}} + 2E (\sin \varphi_0)^{1/2} \right)}{\left( \frac{3\rho h r_0}{(\sin \varphi_0)^{1/2}} - 2E (\sin \varphi_0)^{1/2} \right)} + \\ &+ \left. \varphi_0 \left( \frac{G}{4} + \frac{(1 + \sigma)^2}{2G} \right) \right] + \\ &+ \frac{2E \operatorname{ctg} \varphi_0 G \rho h r_0 \sin \varphi_0}{\left( 3\rho h r_0 - 2E (\sin \varphi_0)^{1/2} \right) \left( \rho h r_0 - E (\sin \varphi_0)^{1/2} \right)}, \\ \alpha_4 &= -\frac{E(1 + \sigma) (\sin \varphi_0)^{1/2}}{6G \rho h r_0} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0 G \rho h r_0}{\rho h r_0 - E (\sin \varphi_0)^{1/2}} + \frac{\ln \sin \varphi_0}{4} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{G \operatorname{ctg} \varphi_0}{4} - \varphi_0 \left( \frac{G}{4} + \frac{(1 + \sigma)^2}{2G} \right) \right] c_1 + c_2 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Найденные постоянные величины  $\alpha_i$  ( $i = 0..5$ ),  $c_j$  ( $j = 0..3$ ) позволяют полностью решить поставленную задачу и, в частности, найти зависимость контактной силы и прогиба от времени

$$\begin{aligned} P(t) &= E_1 \left[ V_1 t - \frac{1}{6} E_1 V_1 \times \right. \\ &\times \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{\pi r_0 (\rho h r_0 - E \sin \varphi_0)} \right) t^3 - \\ &- \frac{E(1 + \sigma) (\sin \varphi_0)^{1/2}}{6G \rho h r_0} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0 \rho h r_0 G}{\rho h r_0 - E \sin \varphi_0} + \frac{\ln \sin \varphi_0}{4} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0 G}{4} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \varphi_0 \left[ \frac{G}{4} + \frac{(1 + \sigma)^2}{2G} \right] \right] c_1 + c_2 \right\} t^4 \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$w(t) = \frac{1}{6\pi r_0 (\rho h r_0 - E \sin \varphi_0)} t^3 + \frac{E(1+\sigma)(\sin \varphi_0)^{1/2}}{6G\rho h r_0} \left\{ \left[ \frac{\text{ctg } \varphi_0 \rho h r_0 G}{\rho h r_0 - E \sin \varphi_0} + \frac{\ln \sin \varphi_0}{4} + \frac{\text{ctg } \varphi_0 G}{4} - \varphi_0 \left[ \frac{G}{4} + \frac{(1+\sigma)^2}{2G} \right] \right] c_1 + c_2 \right\} t^4. \quad (27)$$

Для иллюстрации полученных результатов и исследования зависимостей контактной силы и динамического прогиба от параметров взаимодействия запишем выражения для безразмерной контактной силы  $\tilde{P}$  и безразмерного динамического прогиба  $\tilde{w}$ , полученные на основе (26), (27):

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\tilde{t}) &= \tilde{V} \left\{ \tilde{t} - \frac{\tilde{E}}{\pi \tilde{h}} (\tilde{m} + 1) \frac{\tilde{t}^3}{6} - \frac{\tilde{E} \tilde{G} (1 + \sigma) (\sin \varphi_0)^{1/2}}{6\pi \tilde{h}} \left[ \left( \frac{\text{ctg } \varphi_0}{\tilde{\rho}} + \frac{\ln \sin \varphi_0}{4\tilde{G}} + \frac{\text{ctg } \varphi_0}{4} - \varphi_0 \tilde{G} \left( \frac{1}{4} + \frac{(1 + \sigma)^2}{2\tilde{G}^2} \right) \right) \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 \right] \tilde{t}^4 \right\}, \\ \tilde{w}(t) &= \frac{\tilde{E} \tilde{V}}{6\pi \tilde{h} \tilde{\rho}} \tilde{t}^3 + \frac{\tilde{E} \tilde{G} \tilde{V} (1 + \sigma) (\sin \varphi_0)^{1/2}}{6\pi \tilde{h}} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\text{ctg } \varphi_0}{\tilde{\rho}} + \frac{\ln \sin \varphi_0}{4\tilde{G}} + \frac{\text{ctg } \varphi_0}{4} - \varphi_0 \tilde{G} \left( \frac{1}{4} + \frac{(1 + \sigma)^2}{2\tilde{G}^2} \right) \right) \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 \right] \tilde{t}^4. \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\tilde{t} = \frac{G^{(1)}}{r_0} t$ ,  $\tilde{w} = \frac{w}{r_0}$ ,  $\tilde{P} = \frac{P}{E_1 r_0}$ ,  $\tilde{E} = \frac{E_1 / r_0}{E / (1 - \sigma^2)}$ ,  
 $\tilde{h} = \frac{h}{r_0}$ ,  $\tilde{m} = \frac{\pi r_0 (\rho h r_0 - E \sin \varphi_0)}{m}$ ,  $\tilde{V} = \frac{V_1}{G}$ ,  $\tilde{G} = \frac{G}{V_1}$ ,  
 $\tilde{\rho} = \frac{\rho h r_0 - E \sin \varphi_0}{\rho h r_0}$ .

### ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим численный пример, в котором параметры изучаемой конструкции принимают следующие значения:  $\tilde{m} = 25$ ,  $\tilde{V} = 8.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $\tilde{h} = 1$ ,  $\tilde{E} = 1.1 \cdot 10^{-6}$ ,  $\varphi_0 = \pi / 2$ ,  $\tilde{R}_1 = R_1 / r_0 = 10$ .

Используя соотношения (28), на рис. 2 построены зависимости контактной силы от времени для стальной ( $\tilde{m} = 25, \sigma = 0.3$ ) и алюминиевой оболочек ( $\tilde{m} = 8, \sigma = 0.27$ ) для различных значений толщины мишени, которые указаны у кривых.

Из рис. 2 видно, что величина максимальной контактной силы увеличивается с увеличением толщины мишени, при одинаковых значениях  $\tilde{h}$  максимум контактной силы для пластинки, выполненной из более твердого материала (сталь), больше максимума контактной силы для пластинки из более мягкого материала (алюминий). Кривая зависимости контактной силы от времени несимметрична относительно своего максимума. При линейно упругой контактной силе треть времени контакта графики ведут себя линейно, и углы наклона касательной ко всем кривым совпадают. Это объясняется тем, что на первом этапе значительное влияние оказывает первое слагаемое соотношения (28).

На рис. 3 приведены зависимости контактной силы для различных значений радиуса оболочки, указанных на графике.

Рис. 3 демонстрирует нелинейное уменьшение максимального значения контактной силы при увеличении радиуса оболочки.

На рис. 4 построены зависимости динамического прогиба от времени для различных значений толщины стальной и алюминиевой

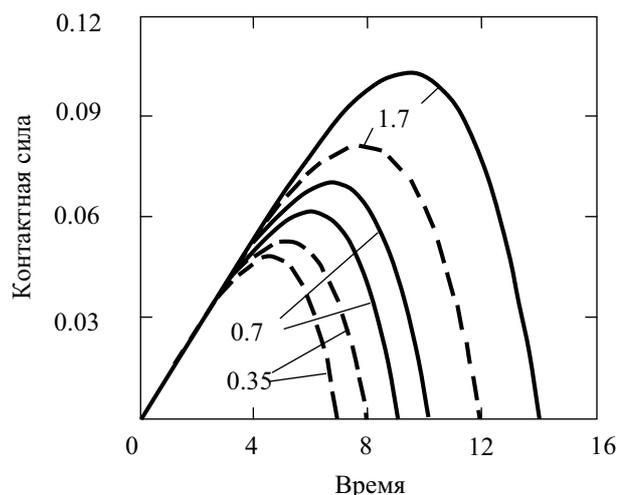


Рис. 2. Зависимость безразмерной контактной силы от безразмерного времени при динамическом контакте ударника с оболочками с различной толщины: — — — стальная пластина, — — — — — алюминиевая пластина

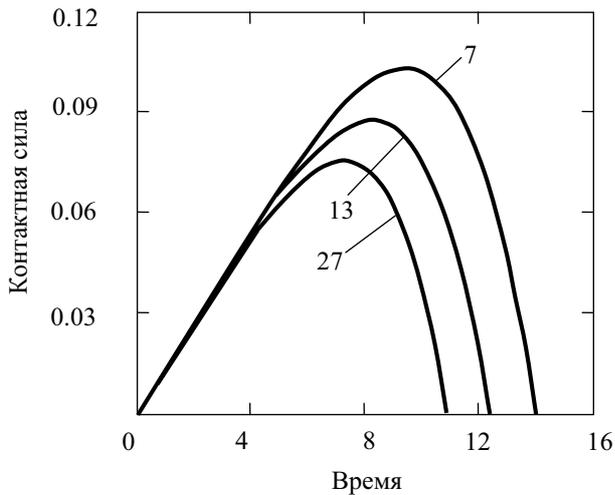


Рис. 3. Зависимость безразмерной контактной силы от безразмерного времени для сферических оболочек различного радиуса

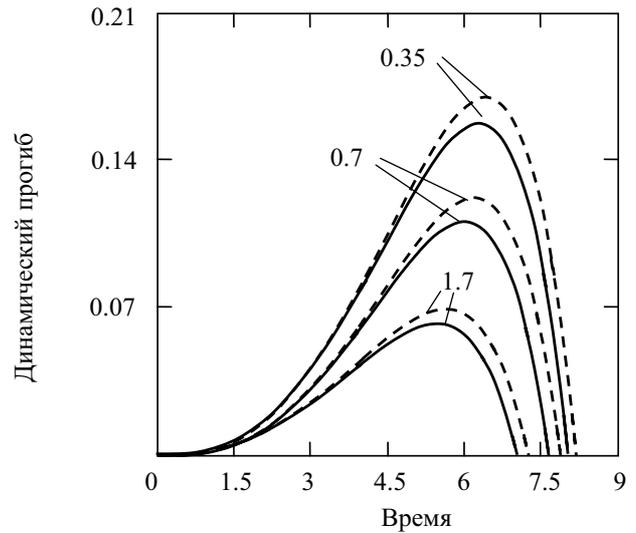


Рис. 4. Зависимость безразмерного динамического прогиба от безразмерного времени для различной толщины оболочки: — — стальная пластина, — — — — алюминиевая пластина

оболочки, которые приводятся в миллиметрах у соответствующих графиков.

На рис.5 анализируется влияние радиуса оболочки на ее прогиб в месте ударного воздействия. Значения  $\tilde{R}_1$  приведены в метрах на рисунке.

Из рис. 4 видно, что при уменьшении толщины мишени максимальное значение прогиба увеличивается, также увеличивается разница между значениями  $w$  для стальной и алюми-

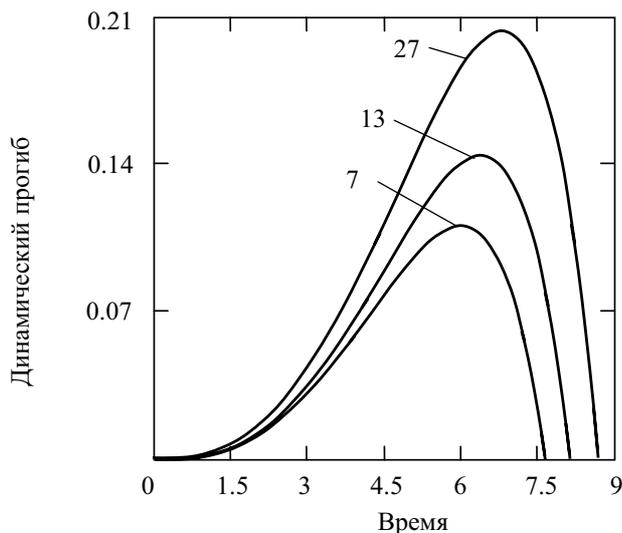


Рис. 5. Зависимость безразмерной контактной силы от безразмерного времени для сферических оболочек различного радиуса

евой оболочки, т.е. при увеличении толщины свойства материала оказывают меньшее влияние на динамический прогиб. При увеличении радиуса оболочки прогиб нелинейно увеличивается (рис.5), стремясь к максимальному значению, соответствующему случаю, когда мишенью является пластинка.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Зависимости контактной силы (28) и динамического прогиба (29) от времени имеют разную форму для первой половины контактного процесса, что объясняется преобладанием линейного и кубического слагаемого в начале удара, соответственно. При увеличении толщины мишени, плотности и модуля упругости ее материала максимальная контактная сила увеличивается, а максимальный динамический прогиб уменьшается. Если увеличивать радиус сферической оболочки, то прогиб будет увеличиваться, а контактная сила уменьшаться. Противоположные направления изменения силы и прогиба при варьировании одними и теми же параметрами объясняются разными знаками коэффициентов при одинаковых степенях  $t$ . Волновые явления в мишени оказывают влияние на множитель при  $t^4$  и более высоких степенях  $t$ , т.е. большей частью сказываются на характеристике контакта на завершающем этапе взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hammel J.* Aircraft impact on a spherical shell / J. Hammel // Nuclear Engineering and Design. — 1976. — Vol. 37, № 2. — P.205–223.
2. *Сеницкий Ю.Э.* Удар вязкоупругого тела по пологой сферической оболочке / Ю. Э. Сеницкий // Механика твердого тела. — 1982. — № 2. — С. 138–143.
3. *Koller M.G.* Elastic impact of spheres on thin shallow spherical shells / M. G. Koller, M. Busenhardt // International Journal of Impact Engineering. — 1986. — Vol. 4, № 1. — P. 11–21.
4. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 354с.
5. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М.: Гостехиздат, 1953. — 324 с.
6. *Бирюков Д.Г.* Динамический упругопластический контакт ударника и сферической оболочки / Д. Г. Бирюков, И. Г. Кадомцев // Прикладная механика и техническая физика. — 2002. — Т. 43, № 5. — С. 171–175.
8. *Бирюков Д.Г.* Упругопластический неосесимметричный удар параболического тела по сферической оболочке / Д. Г. Бирюков, И. Г. Кадомцев // Прикладная механика и техническая физика. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 181–186.
9. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* A ray method of solving problems connected with a shock interaction // Acta Mechanica. — 1994. — Vol. 102, № 1–4. — P. 103–121.
10. *Локтев А.А.* Упругий поперечный удар по круглой ортотропной пластинке / А. А. Локтев // Письма в журнал технической физики. — 2005. — Т. 31, В. 18, — С. 4–9.