УДК 517.958

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ*

**А. В. Кузнецов**

*Воронежский государственный университет*

В данной работе рассматривается задача оптимального управления правыми частями, связанная с системой уравнений, описывающей движение вязкоупругой несжимаемой жидкости типа Джеффриса в ограниченной области в $\mathbb{R}^3$. Доказано глобальное существование сильного оптимального решения для произвольных достаточно гладких начальных данных.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

данной работе рассматривается задача оптимального управления правыми частями, связанная с системой уравнений, описывающей модель вязкоупругой несжимаемой жидкости типа Джеффриса.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = Div\sigma + u, \tag{1}$$

$$\sigma + \lambda_1 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) = \\ = 2\eta \left( \mathcal{E}(v) + \lambda_2 \left( \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) \right), \tag{2}$$

$$\forall ((t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega) v(t,x) = 0, \tag{3}$$

$$\forall (x \in \Omega)\ v(0,x) = v_0(x), \sigma(0,x) = \sigma_0(x), \tag{4}$$

$$divv = 0, \tag{5}$$

$$\int_\Omega p(t,x)dx = 0, (t,x) \in [0,T] \times \Omega. \tag{6}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса $C^\infty$, $n = 3$; $(t,x) \in [0,T] \times \Omega = Q_T$, $v(t,x) = (v^1(t,x), \ldots, v^n(t,x))$ — поле скоростей; $p(t,x)$ — давление среды; $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформации; $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$; $\sigma = \left(\sigma_{ij}\right)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ — девиатор тензора напряжений; $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ — времена ретардации и релаксации (некоторые физические константы), $u$ — внешняя сила, действующая на жидкость, которая и будет являться управляющим параметром.

Плотность жидкости предполагается постоянной и равной единице.



* Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00137.

## 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ

### 2.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим через $M(n)$ пространство квадратных матриц порядка $n$, через $M_s(n) \subset M(n)$ пространство симметричных матриц порядка $n$.

Пусть $A$, $B \in M(n)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$. Введем обозначение

$$D = A : B.$$

Пусть $u$ — некоторая функция, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим $\nabla_x u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u)$. Пусть $X$ — банахово пространство. Сопряженное к нему пространство, т.е. пространство линейных ограниченных функционалов на $X$ обозначим через $X^*$. Действие некоторого $v \in X^*$ на $\varphi \in X$ будем обозначать как $\langle v, \varphi \rangle_{X^*, X}$.

Пусть $i \in \mathbb{R}$. Символы $K_i$, $C_i$, $const$, $const_i$, $c$, $c_i$ зарезервированы для обозначения неотрицательных (или положительных, если это оговорено особо) констант. Константы $c$, $const$, $const_i$ имеют разное значение в разных теоремах и леммах или определениях, остальные константы имеют одно и тоже значение во всей работе.

Символ $I$ всегда означает тождественный оператор с областью определения, явной из контекста.

### 2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega = \Gamma$ класса $C^\infty$. Введем определения некоторых пространств функций с обычными операциями сложения и умножения.

Назовем пространством финитных функций 1 множество

$$\mathcal{C}_0^\infty = \{f \in C^\infty(\overline{\Omega}, M_s(n)) : \operatorname{supp} f \subset \Omega\}. \quad (7)$$

Назовем пространством финитных функций 2 множество

$$D(\Omega)^n = \{f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset \Omega\}. \quad (8)$$

Назовем пространством соленоидальных функций множество

$$D_s(\Omega)^n = \{f \in D(\Omega)^n : \operatorname{div} f = 0\}. \quad (9)$$

Обозначим $\|f\|_{L_p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$.

Назовем пространством $L_p(\Omega)$ множество функций

$$\{f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty\},$$

снабженное обычными операциями сложения и умножения на число.

Пусть $s \geq 0$, $p \geq 1$, $s \in N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Определим

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq s} \int_\Omega \left| D^\alpha f(x) \right|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $0 < s < 1$, $p \geq 1$. Определим

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = \left( \|f\|_{L_p(\Omega)}^p + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $s > 1$, $p \geq 1$. Тогда $s = [s] + \sigma$, где $[s]$ — целая часть $s$. Введем норму $\|\cdot\|_{W_p^s(\Omega)}$ пространства Соболева $(W_p^s(\Omega))^n$ следующим образом:

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = \left( \|f\|_{W_p^{[s]}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha| = [s]} \left\| D^\alpha f \right\|_{W_p^\sigma(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \quad (10)$$

Пусть $s > 0$, $p \geq 1$. Назовем пространством Соболева $(W_p^s(\Omega))^n$ множество

$$\{f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{W_p^s(\Omega)} < \infty\}$$

снабженное обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

Введем обозначение $(H^s(\Omega))^n = (W_2^s(\Omega))^n$.

Будем обозначать как $H_0^s(\Omega)$ те функции из $H^s(\Omega)$, след которых на $\partial\Omega$ равен нулю и чьи производные до порядка $s$ включительно имеют след на границе $\partial\Omega$ равный нулю.

Введем обозначения:

$$\mathcal{H}^\alpha = H^\alpha(\Omega, M_s(n)), \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_2 = L_2(\Omega, M_s(n)). \quad (12)$$

Назовем пространствами $H$, $V$, $V^2$ множества:

$$H \text{ — замыкание } D_s(\Omega)^n \text{ в } (L_2(\Omega))^n, \quad (13)$$

$$V \text{ — замыкание } D_s(\Omega)^n \text{ в } (H^1(\Omega))^n, \quad (14)$$

$$V^2 = (H_0^2(\Omega))^n \cap V \text{ с нормой } (H^2(\Omega))^n. \quad (15)$$

Назовем пространствами $L_p(a, b; X)$, $0 < p \leq \infty$, где $X$ — банахово пространство, множества

$$p < \infty, \ L_p(a, b; X) = = \left\{ f : [a, b] \to X \mid \|f\|_{L_p(a,b;X)} = = (\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$L_\infty(a, b; X) = = \left\{ f : [a, b] \to X \, \|f\|_{L_\infty(a,b;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_X < \infty \right\}.$$

Обозначим проектор Лере как $P$:

$$P : (L_2(\Omega))^n \to H. \quad (16)$$

Пусть $a$, $b \in \mathbb{R}$, $p_1$, $p_2 \geq 1$, $X_1$, $X_2$ — банаховы пространства. Назовем пространством $W(a, b; p_1, p_2; X_1, X_2)$ множество

$$W(a, b; p_1, p_2; X_1, X_2) = = \{u \in L_{p_1}(a, b; X_1), u' \in L_{p_2}(a, b; X_2)\}. \quad (17)$$

Введем обозначение $W = W(0, T; 2, 2; V^2, H)$. Будем далее обозначать скалярное произведение в $(L_2(\Omega))^n$ или в $\mathcal{L}_2$ парой круглой скобок $(\cdot, \cdot)$.

Пусть $X$ — линейное нормированное пространство. Множество $X_\delta \subset X$ называется выпуклым, если

$$\forall (x_1, x_2 \in X_\delta, \alpha \in [0,1]) \ \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in X_\delta \quad (18)$$

Функционал $J(x)$, заданный на выпуклом множестве $X_\delta \subset X$, называется выпуклым, если для него справедливо неравенство Иенсена

$$\forall (x_1, x_2 \in X_\delta, \alpha \in [0,1]) \quad J(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha J(x_1) + (1 - \alpha) J(x_2). \quad (19)$$

Функционал $J(x)$ называется полунепрерывным снизу в $X_\delta$ если для любого $x \in X_\delta$ и любой последовательности $\{x_n\} \subset X_\delta$, $x_n \to x$ верно что

$$J(x) \leq \liminf_{n \to \infty} J(x_n). \quad (20)$$

## 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Обозначим $\mu_1 = \eta(\lambda_2/\lambda_1)$, $\mu_2 = (\eta - \mu_1)/\lambda_1$. Используя разложения тензора напряжений $\sigma$ на ньютоновскую и чисто упругую части $\sigma = \tau + 2\mu_1 E(v)$, сделаем в (1)—(6) замену и перейдем к задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p - u = \operatorname{Div} \tau, \quad (21)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v^{i}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}+\frac{1}{\lambda_1}\tau=2\mu_2E(v), \qquad (22)$$

$$v\,|_{t=0}=v_0, \qquad (23)$$

$$\tau\,|_{t=0}=\tau_0. \qquad (24)$$

Будем предполагать, что $v\in W$, $u\in L_2(0,T;H)$, $v_0\in V^2\cap(H^3(\Omega))^n$, $\tau_0\in\mathcal{H}^2$. Дополнительно будем предполагать, что $\tau_0\in\mathcal{H}_0^1$. Известно ([1], с. 854, лемма 2.3), что для любого $v\in W\cap$ $\cap L_2(0,T;(H^3(\Omega))^n)$ существует единственное решение задачи (22), (24) $\tau_s=\tau(v)\in L_\infty(0,T;\mathcal{H}^1)$, и, следовательно, $\operatorname{Div}\tau_s\in L_\infty(0,T;(L_2(\Omega))^n)$. Далее будет показано (лемма 4.0.5), что для любого $v\in W$ существует слабое решение $\tau=\tau(v)\in L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$, т. е. для любого $\Phi\in H_0^2(\Omega)$, $\psi\in H^1(0,T)$, $\psi(T)=0$ (значение $\psi$ определено в точке, так как $H^1(0,T)\subset C(0,T)$ вполне непрерывно по теореме о компактном вложении Реллиха—Кондрашова, [2], с. 130) выполнено равенство

$$-\int_0^T(\tau,\Phi)(t)\frac{d}{dt}\psi(t)dt-(\tau_0,\Phi)\psi(0)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)(t)\psi(t)dt+ \qquad (25)$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau,\Phi)(t)\psi(t)dt=2\mu_2\int_0^T(E(v),\Phi)\psi(t)dt.$$

Единственность такового $\tau$, вообще говоря, неизвестна, количество получаемых слабых решений задачи (22), (24) зависит от количества сходящихся подпоследовательностей некоторой ограниченной последовательности, но для $v\in W\cap L_2(0,T;(H^3(\Omega))^n)$ такое слабое решение $\tau(v)$ единственно и $\tau_s=\tau(v)$ (лемма 6). Для любого недостаточно гладкого $\tau(v)$ оператор $Div\tau(v)$ понимается в смысле распределений: $\langle\operatorname{Div}\tau(v),\varphi\rangle_{V^*\times V}=-(\tau(v),\nabla\varphi)$, $\varphi\in V$, т. е. $\operatorname{Div}\tau(v)\in L_2(0,T;V^*)$. Введем многозначный оператор

$$N:WL_2(0,T;V^*), \qquad (26)$$

$$\forall(v_s\in W\cap L_2(0,T;(H^3(\Omega))^n))N(v)=$$
$$=\operatorname{Div}\tau(v_s)\in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)\subset L_2(0,T;V^*), \qquad (27)$$

$$\forall(v\in W\setminus L_2(0,T;(H^3(\Omega))^n))$$
$$\forall(\delta_\tau\in N(v))\forall(\varphi\in V)\langle\delta_\tau,\varphi\rangle_{V^*\times V}=-(\tau,\nabla\varphi). \qquad (28)$$

Пусть $\Phi(z,v,u)$ — выпуклый по совокупности переменных функционал на $H\times V^2\times H$, удовлетворяющий условиям:

$$\forall(R>0)\sup_{\|z\|_H+\|v\|_{(H^2(\Omega))^n}+\|u\|_H\le R}\Phi(z,v,u)<\infty, \qquad (29)$$

$$\exists(C,C_1>0)\forall((z,v,u)\in H\times V^2\times H)\Phi(z,v,u)\ge$$
$$\ge C_1(\|z\|_H^2+\|v\|^2_{(H^2(\Omega))^n}+\|u\|_H^2)-C. \qquad (30)$$

Поставим следующую задачу минимизации:

$$J(\dot v,v,u)=\int_0^T\Phi(\dot v(t,\cdot),v(t,\cdot),u(t,\cdot))dt\to\inf, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\mu_1P\Delta v+P\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial v}{\partial x_i}-u\in N(v), \qquad (32)$$

$$v\,|_{t=0}=v_0,\quad \tau\,|_{t=0}=\tau_0. \qquad (33)$$

Здесь включение (элементов $L_2(0,T;V^*)$) (32) было получено из уравнения (21), понимаемого как равенство элементов $L_2(0,T;V^*)$, то есть для любого $\varphi\in V$:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t},\varphi\right)-\mu_1(\Delta v,\varphi)+\sum_{i=1}^{n}\left(v^i\frac{\partial v}{\partial x_i},\varphi\right)-$$
$$-(u,\varphi)=-(\tau,\nabla\varphi). \qquad (34)$$

Далее будет показано, что включение (32) можно понимать как включение элементов $L_2(0,T;H)$, то есть, что $N(v)\subset L_2(0,T;H)$, и справедлива следующая теорема

**Теорема 3.0.1.** *Задача (31)—33) имеет решение*

$$(v,u)\in W\times L_2(0,T;H).$$

## 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (22)—(24)

Покажем с помощью теории степени Лере—Шаудера существование решения задачи (22)-(24) в смысле равенства (25). Метод, который будет для этого использоваться, был раннее применен для задачи сходного типа В. Г. Звягиным, Д. А. Воротниковым в работе [3]. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)-\xi\sum_{i=1}^{n}\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi)=2\xi\mu_2(\mathcal{E}(v),\Phi), \qquad (35)$$

$$\tau(0,\cdot)=\tau_0, \qquad (36)$$

где $\Phi\in H_0^1(\Omega,M_s(n))$, $v\in W$, $\tau_0\in\mathcal{H}^2$ и $0\le\xi\le1$, $0<\varepsilon\le1$ — параметры. Введем пространство, в котором будем искать решение задачи (35)—(36):

$$W_M=\{\tau\in L_2(0,T;H_0^1(\Omega,M_s(n))),$$
$$\partial_t\tau\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega,M_s(n)))\}. \qquad (37)$$

Заметим, что $W_M\subset C([0,T];\mathcal{L}_2)$ непрерывно в силу теорем 1.1, гл. II, 1.2, 2.1, гл. III из [2] и $\tau(t,\cdot)\in\mathcal{L}_2$ определено в каждой точке $t\in[0,T]$.

Установим еще один факт, касающийся непрерывности вложений пространств $W$, $W_M$. Для этого потребуется одно утверждение, доказанное в [4], с. 85—86:

**Теорема 4.0.2.** (Симон)

*Пусть $X$, $X_0$, $X_1$ — банаховы пространства, такие, что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ — непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ — компактно. Пусть также существуют константы $\theta$, $0 < \theta < 1$ и $c$, такие, что:*

$$\|v\|_X \le c\|v\|_{X_0}^{\theta}\|v\|_{X_1}^{(1-\theta)},\ \forall v \in X_0. \quad (38)$$

*Пусть $M$ — ограниченное подмножество пространства $W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1)$, где $1 \le p_0 \le \le \infty$, $1 \le p_1 \le \infty$. Тогда если $(1-\theta)(1-\frac{1}{p_1}) \le \frac{\theta}{p_0}$, то $M$ относительно компактно в $L_p(0,T;X)$ для любого $p < p_\theta$, где $\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_0} - (1-\theta)(1-\frac{1}{p_1})$; если $(1-\theta)(1-\frac{1}{p_1}) > \frac{\theta}{p_0}$, то $M$ относительно компактно в $C([0,T];X)$.*

**Лемма 4.0.1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса $C^\infty$, $0 < \delta < 1$, $n = 3$. Тогда имеют место следующие вполне непрерывные вложения*

$$\forall\left(p < \frac{4}{1+\delta}\right)\ W \subset L_p(0,T;(C(\Omega))^n), \quad (39)$$

$$\forall(p < \infty)\ W_M \subset L_p(0,T;\mathcal{L}_2). \quad (40)$$

*Доказательство.* Воспользуемся интерполяционным неравенством (приведено, например, в [5], с. 142.)

$$\forall(u \in H^\gamma; \alpha < \beta < \gamma)\|u\|_{H^\beta} \le c\|u\|_{H^\alpha}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\|u\|_{H^\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}. \quad (41)$$

Покажем вложение (39). Неравенство (41) с $\beta = (3+\delta)/2$, $\alpha = 0$, $\gamma = 2$ и теорема вложения Реллиха—Кондрашова дадут неравенство:

$$\forall(u \in H^2)\|u\|_{C(\Omega)} \le c_1\|u\|_{H^{(3+\delta)/2}} \le$$
$$\le c_2\|u\|_{L_2}^{(1-\delta)/4}\|u\|_{H^2}^{(3+\delta)/4},$$

из которого следует, что

$$\forall(v \in V^2)\|v\|_{(C(\Omega))^n} \le C\|v\|_H^{(1-\delta)/4}\|v\|_{(H^2(\Omega))^n}^{(3+\delta)/4}.$$

Используя вышеприведенное неравенство, применим теорему 4.0.2 с $X_0 = V^2$, $X = (C(\Omega))^n$, $X_1 = H$, $\theta = (3+\delta)/4$, $p_0 = p_1 = 2$. Получим, что

$$W = W(0,T;2,2;V^2,H) \subset L_p(0,T;(C(\Omega))^n) \quad (42)$$

вполне непрерывно с любым

$$p < p_{(3+\delta)/4} = \frac{1}{((3+\delta)/8 - (1-\delta)/8)} = \frac{4}{1+\delta}.$$

Покажем вложение (40). Заметим, что:

$$\forall(u \in H_0^1)\|u\|_{L_2} = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{\frac{(u,u)}{\|u\|_{H^1}}}\sqrt{\|u\|_{H^1}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\|u,u\|_{H^{-1}\times H_0^1}}{\|u\|_{H^1}}}\sqrt{\|u\|_{H^1}} \le$$
$$\le \sqrt{\sup_{\varphi \in H_0^1\setminus\{0\}}\frac{\|u,\varphi\|_{H^{-1}\times H_0^1}}{\|\varphi\|_{H^1}}}\sqrt{\|u\|_{H^1}} =$$
$$= \|u\|_{H^{-1}}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2},$$

откуда следует, что

$$\forall(\tau \in \mathcal{H}_0^1)\|\tau\|_{L_2} \le C\|\tau\|_{H^1}^{1/2}\|\tau\|_{H^{-1}}^{1/2}.$$

Используя вышеприведенное неравенство, применим теорему 4.0.2 с $X_0 = \mathcal{H}^1$, $X = \mathcal{L}_2$, $X_1 = \mathcal{H}^{-1}$, $\theta = 1/2$, $p_0 = p_1 = 2$. Получим, что

$$W_M = W(0,T;2,2;H_0^1(\Omega,M_s(n))),H^{-1}(\Omega,M_s(n)))) \subset$$
$$\subset L_p(0,T;\mathcal{L}_2) \quad (43)$$

вполне непрерывно с любым $p < p_{1/2} = = 1/(1/4 - 1/4) = \infty$. □

**Лемма 4.0.2.** *Пусть $\tau \in W_M$ — решение (35)-(36). Тогда справедливы априорные оценки:*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|\tau(t,\cdot)\|_{L_2}^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|\tau\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \le$$
$$\le 8\mu_2^2\lambda_1\|v\|_{L_2(0,T;V)}^2 + 2\|\tau_0\|_{L_2}^2, \quad (44)$$

$$\exists(K_1,K_2 \ge 0)\left\|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H^{-1})} \le K_1 + \sqrt{\varepsilon}K_2. \quad (45)$$

*Доказательство.* Возьмем в (35) $\Phi = \tau$, $t \in [0,T]$. Принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^n\left(v^i\tau, \frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n\int_\Omega v^i\tau : \frac{\partial\tau}{\partial x_i}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega v^i\frac{\partial(\tau:\tau)}{\partial x_i}dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial v^i}{\partial x_i}(\tau:\tau)dx = \quad (46)$$
$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} v(\tau:\tau)dx = 0,$$

а также, что в силу леммы 1.1, гл. III из книги [2]

$$\left\langle\frac{d\tau}{dt},\Phi\right\rangle_{\mathcal{H}^{-1}\times H_0^1(\Omega,M_s(n))} = \frac{d}{dt}(\tau,\Phi), \quad (47)$$

и, таким образом,

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\bigg|_{\Phi=\tau(t,\cdot)} = \left\langle\frac{d\tau(t,\cdot)}{dt},\tau(t,\cdot)\right\rangle_{\mathcal{H}^{-1}\times H_0^1(\Omega,M_s(n))} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\tau,\tau), \quad (48)$$

получим, что

$$\frac{d}{dt}(\tau(t,\cdot),\tau(t,\cdot))+\frac{1}{\lambda_1}(\tau(t,\cdot),\tau(t,\cdot))+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau(t,\cdot),\nabla\tau(t,\cdot))=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\nabla\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}=$$
$$=2\xi\mu_2(E(v)(t,\cdot),\tau(t,\cdot))\le$$
$$\le 2\mu_2\|\mathcal{E}(v)(t,\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}\|\tau(t,\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}\le$$
$$\le 2\mu_2\sqrt{\lambda_1}\|\mathcal{E}(v)(t,\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}\frac{\|\tau(t,\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}}{\sqrt{\lambda_1}}\le$$
$$\le 2\mu_2^2\lambda_1\|\mathcal{E}(v)(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}}{2\lambda_1}.$$

После приведения подобных слагаемых, замены $\zeta = t$ и умножения левой и правой частей предыдущего неравенства на 2 получим:

$$\frac{d}{dt}\|\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{1}{\lambda_1}(\|\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{L_2}+\varepsilon\|\nabla\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2})\le$$
$$\le 4\mu_2^2\lambda_1\|\mathcal{E}(v)(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{E}_2}. \tag{49}$$

Проинтегрируем правую и левую части (49) по $\zeta\in[0,t]$:

$$\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{1}{\lambda_1}\left(\varepsilon\int_0^t\|\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta+\varepsilon\int_0^t\|\nabla\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta\right)\le$$
$$\le\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{1}{\lambda_1}\left(\int_0^t\|\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta+\varepsilon\int_0^t\|\nabla\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta\right)\le$$
$$\le 4\mu_2^2\lambda_1\int_0^t\|\mathcal{E}(v)(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta+\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2}\le$$
$$\le 4\mu_2^2\lambda_1\int_0^t\|v(\zeta,\cdot)\|^2_V d\zeta+\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2}\le \tag{50}$$
$$\le 4\mu_2^2\lambda_1\int_0^T\|v(\zeta,\cdot)\|^2_V d\zeta+\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2}.$$

Возьмем в предыдущем неравенстве $t = T$, тогда

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\left(\int_0^T\|\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta+\int_0^T\|\nabla\tau(\zeta,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}d\zeta\right)\le$$
$$\le 4\mu_2^2\lambda_1\int_0^T\|v(\zeta,\cdot)\|^2_V d\zeta+\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2}. \tag{51}$$

Также из оценки (50) следует, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}\le 4\mu_2^2\lambda_1\int_0^T\|v(\zeta,\cdot)\|^2_V d\zeta+\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2}. \tag{52}$$

Складывая неравенства (51) и (52), получим что:

$$ess\sup_{t\in[0,T]}\|\tau(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|\tau\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}\le$$
$$\le 8\mu_2^2\lambda_1\|v\|^2_{L_2(0,T;V)}+2\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2}. \tag{53}$$

Пусть $\tau$ — решение (35)—(36) при $0<\varepsilon\le 1$, тогда

$$\left|\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\right|\le\left|\xi\sum_{i=1}^n\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\right\|_{L_2(0,T)}\Bigg|+\left|\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)\right|+$$
$$+|2\mu_2\xi(\mathcal{E}(v),\Phi)|+\left|\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi)\right|\le$$
$$\le\left|\sum_{i=1}^n\int_\Omega v^i\tau:\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx\right|+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+$$
$$+2\mu_2\|\mathcal{E}(v)\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+\left|\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi)\right|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|v^i\tau:\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right|dx+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{L_2}+$$
$$+2\mu_2\|v\|_V\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}|(\nabla\tau,\nabla\Phi)|\le \tag{54}$$
$$\le\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\sum_{i=1}^n\|v^i\|_{C(\Omega)}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{\mathcal{L}_2}+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{L_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+$$
$$+2\mu_2\|v\|_V\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|(\nabla\tau,\nabla\Phi)\|\le$$
$$\le\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|v\|_{(C(\Omega))^n}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+$$
$$+2\mu_2\|v\|_V\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}|(\nabla\tau,\nabla\Phi)|\le$$
$$\le c_4\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|v\|_{V^2}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+$$
$$+2\mu_2\|v\|_V\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{H}^1}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Из предыдущего утверждения следует, что

$$\left\|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}=\left(\int_0^T\left(\sup_{\Phi\in\mathcal{H}^1\setminus\{0\}}\frac{\left|\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\right|}{\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}}\right)^2dt\right)^{1/2}\le$$
$$\le\left(\int_0^T\left(c_4\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|v\|_{V^2}+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}+2\mu_2\|v\|_V+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{H}^1}dt\right)^2\right)^{1/2}\le c_4c_5\|\tau\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)}\|v\|_W+ \tag{55}$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}+2c_5\mu_2\|v\|_W+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}.$$

В силу оценок (53), (55) верно, что существуют не зависящие от $\varepsilon$ и $\xi$ константы $K_1\ge 0$, $K_2\ge 0$, такие что

$$\left\|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}\le K_1+\sqrt{\varepsilon}K_2. \tag{56}$$

□

Введем операторы (предполагается, что $\Phi \in H_0^1(\Omega, M_s(n))$, $\tau \in W_M$, $v \in W$)

$$A_\varepsilon : W_M \to L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1}) \times \mathcal{L}_2, \tag{57}$$

$$(A_\varepsilon \tau, \Phi) =$$

$$\left( \frac{d}{dt}(\tau,\Phi) + \frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi) + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi), \tau\,|_{t=0} \right). \tag{58}$$

$$K_v : W_M \to L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1}), \tag{59}$$

$$(K_v(\tau),\Phi) = -\sum_{i=1}^n \left( v^i\tau, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right). \tag{60}$$

Оператор $A_\varepsilon$ обратим и $A_\varepsilon^{-1}$ непрерывен в силу теоремы 1.1, гл. VI, [6].

**Лемма 4.0.3.** *Оператор* $K_v : W_M \to L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})$ *вполне непрерывен.*

*Доказательство.* Пусть $\{\tau_m\}_{m=1}^\infty \subset W_M$ — ограниченная последовательность. В силу леммы 4.0.1 из нее можно выбрать сходящуюся к $\tau \in W$ в $L_6(0,T;\mathcal{L}_2)$ подпоследовательность, которую будем обозначать тоже $\{\tau_m\}_{m=1}^\infty$. Также в силу леммы 4.0.1 для $v \in W$ $\|v\|_{L_3(0,T;(C(\Omega))^n)} \le C\|v\|_W < \infty$.

$$\left| \sum_{i=1}^n \left( v^i\tau, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \left( v^i\tau_m, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \left( v^i(\tau-\tau_m), \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \int_\Omega v^i(\tau-\tau_m) : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{(C(\Omega))^n} \int_\Omega (\tau-\tau_m) : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx \right| \le$$

$$\le \left( \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{C(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega (\tau-\tau_m) : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx \right)^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \|v\|_{(C(\Omega))^n} \left( \sum_{i=1}^n \|\tau-\tau_m\|_{\mathcal{L}_2}^2 \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \|v\|_{(C(\Omega))^n} \|\tau-\tau_m\|_{L_2} \|\Phi\|_{H_0^1(\Omega,M_s(n))}.$$

Отсюда следует:

$$\int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \left( v^i\tau, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \left( v^i\tau_m, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) \right|^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \|v\|_{(C(\Omega))^n}^2 \|\tau-\tau_m\|_{\mathcal{L}_2}^2\,dt\,\|\Phi\|_{H_0^1(\Omega,M_s(n))}^2 \le$$

$$\le \left( \int_0^T \|v\|_{(C(\Omega))^n}^3 \right)^{2/3} \left( \int_0^T \|\tau-\tau_m\|_{\mathcal{L}_2}^6\,dt \right)^{1/3} \|\Phi\|_{H_0^1(\Omega,M_s(n))}^2 =$$

$$= \|v\|_{L_3(0,T;(C(\Omega))^n)}^2 \|\tau-\tau_m\|_{L_6(0,T;\mathcal{L}_2)}^2 \|\Phi\|_{H_0^1(\Omega,M_s(n))}^2.$$

Из этого и из компактности вложения $W_M \subset L_6(0,T;\mathcal{L}_2)$ (в силу леммы 4.0.1) следует утверждение доказываемой леммы:

$$\|K_v(\tau) - K_v(\tau_m)\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}^2 =$$

$$= \int_0^T \sup_{\Phi\in H_0^1(\Omega,M_s(n))} \frac{\left| \sum_{i=1}^n (v^i\tau, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}) - \sum_{i=1}^n (v^i\tau_m, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}) \right|^2}{\|\Phi\|_{H_0^1(\Omega,M_s(n))}^2}\,dt \le$$

$$\le \|v\|_{L_3(0,T;(C(\Omega))^n)}^2 \|\tau-\tau_m\|_{L_6(0,T;\mathcal{L}_2)}^2 \le$$

$$\le C^2 \|v\|_W^2 \|\tau-\tau_m\|_{L_6(0,T;L_2)}^2 \to 0$$

при $m \to \infty$. □

**Лемма 4.0.4.** *Пусть* $0 < \varepsilon \le 1$, $0 \le \xi \le 1$. *Тогда аппроксимационная задача (35)-(36) имеет единственное решение* $\tau_\varepsilon \in W_M$.

*Доказательство.* Перепишем (35)—(36) в эквивалентном операторном виде, используя (57)—(60):

$$A_\varepsilon\tau + \xi(K_v(\tau),0) - (2\xi\mu_2\mathcal{E}(v),\tau_0) = 0$$

или, учитывая обратимость оператора (57)

$$\tau + A_\varepsilon^{-1}(\xi K_v(\tau) - 2\xi\mu_2\mathcal{E}(v), -\tau_0) = 0. \tag{61}$$

Уравнение (61) не имеет решений на границе достаточно большого шара с центром в нуле $B \subset W_M$, так как

$$\begin{gathered} \exists(K_3 \ge 0)\,\|\tau\|_{W_M} = \\ = \|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)} + \left\| \frac{\partial\tau}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})} \le K_3 \end{gathered} \tag{62}$$

в силу оценок леммы 4.0.2. Тогда для всех $\xi \in [0,1]$:

$$\begin{gathered} \deg_{LS}(I + A_\varepsilon^{-1}(\xi K_v(\cdot) - 2\xi\mu_2\mathcal{E}(v), -\tau_0), B, 0) = \\ = \deg_{LS}(I, B, A_\varepsilon^{-1}(0,\tau_0)) = 1, \end{gathered} \tag{63}$$

что доказывает существование решения (35)—(36) в силу гомотопической инвариантности степени. Покажем единственность решения. Пусть $\tau_1$, $\tau_2 \in W_M$ — решения (35)—(36), $\Phi \in H_0^1(\Omega, M_s(n))$. Тогда

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}(\tau_1,\Phi) - \xi\sum_{i=1}^n \left( v^i\tau_1, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\lambda_1}(\tau_1,\Phi) + \\ + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_1,\nabla\Phi) - \left( \frac{d}{dt}(\tau_2,\Phi) + \xi\sum_{i=1}^n \left( v^i\tau_2, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_1}(\tau_2,\Phi) + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_2,\nabla\Phi) \right) = 0. \end{gathered} \tag{64}$$

Из (64) следует, что

$$\frac{d}{dt}(\tau_1-\tau_2,\Phi)-\xi\sum_{i=1}^{n}\left(v^i(\tau_1-\tau_2),\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}(\tau_1-\tau_2,\Phi)+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla(\tau_1-\tau_2),\nabla\Phi)=0.$$

Возьмем $\Phi=(\tau_1-\tau_2)(t,\cdot)$, обозначим $\zeta=t$, проинтегрируем по $\zeta\in[0,t]$ получившееся равенство (аналогично доказательству леммы 4.0.2):

$$\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(t)+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^t\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta+ +\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\int_0^t\left\|\nabla(\tau_1-\tau_2)\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta=0. \tag{65}$$

При $t=T$ получим, что

$$\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(T)+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\int_0^T\left\|\nabla(\tau_1-\tau_2)\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta=0,$$

и, так как все члены в правой части предыдущего равенства неотрицательны, то

$$\left\|\tau_1-\tau_2\right\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}=\int_0^T\left\|\nabla(\tau_1-\tau_2)\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta=0.$$

Если взять в (65) $t=t_0$ такое, что

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(t)=\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(t_0),$$

то получим равенство

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(t)+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{t_0}\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta+ +\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\int_0^{t_0}\left\|\nabla(\tau_1-\tau_2)\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(\zeta)d\zeta=0, \tag{66}$$

из которого также следует, что

$$\left\|\tau_1-\tau_2\right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)}=\max_{t\in[0,T]}\left\|\tau_1-\tau_2\right\|^2_{\mathcal{L}_2}(t)=0.$$

□

**Лемма 4.0.5.** *Пусть $v\in W$. Тогда задача (25), (36) имеет решение $\tau\in L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ и справедлива оценки:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|\tau(t,\cdot)\right\|^2_{\mathcal{L}_2}\le 8\mu_2^2\lambda_1\left\|v\right\|^2_{L_2(0,T;V)}+2\left\|\tau_0\right\|^2_{\mathcal{L}_2}, \tag{67}$$

$$\left\|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}\le \le\left(\frac{1}{\lambda_1}+c_4c_5\left\|v\right\|_W\right)\sqrt{8\mu_2^2\lambda_1\left\|v\right\|^2_{L_2(0,T;V)}+2\left\|\tau_0\right\|^2_{\mathcal{L}_2}}+ +2\mu_2\left\|v\right\|_{L_2(0,T;V)}. \tag{68}$$

*Доказательство.* Возьмем $\varepsilon=1/m$, $m\in\mathbb{N}$. В силу оценки леммы 4.0.2 и того, что ограниченное в $L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*=L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ множество относительно компактно в *-слабой топологии $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ (см., например, [11], гл. IV, § 4, теорема 3, с. 191), существует последовательность решений (35)—(36)

$$\tau_m\rightharpoonup\tau \text{ *-слабо в } L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2), \tag{69}$$

то есть $\left\langle\tau_m-\tau,\phi\Upsilon\right\rangle_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)\times L_1(0,T;\mathcal{L}_2)}\to 0$ при $m\to\infty$ для любого $\phi\Upsilon\in L_1(0,T;\mathcal{L}_2)$. Пусть $\psi\in H^1(0,T)$, $\Phi\in H_0^2(\Omega,M_s(n))$ — произвольные функции и $\psi(T)=0$ (значение $\psi$ определено в точке, так как $H^1(0,T)\subset C(0,T)$ вполне непрерывно). Оценка (67) следует из оценки (44) леммы 4.0.2. Оценка (68) является оценкой (45) леммы 4.0.2 при $\varepsilon=0$ и получается так же, как и неравенство (55). Умножим (35)—(36) скалярно в $L_2(0,T)$ на $\psi$ и проинтегрируем по частям первый член (35):

$$\int_0^T\frac{d}{dt}(\tau_m,\Phi)\psi dt= =-(\tau_0,\Phi)\psi(0)-\int_0^T(\tau_m,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt. \tag{70}$$

В результате получим:

$$-\int_0^T(\tau_m,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left(v^i\tau_m,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt+ +\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau_m,\Phi)\psi dt+\frac{1}{2m\lambda_1}\int_0^T(\nabla\tau_m,\nabla\Phi)\psi dt- -(\tau_0,\Phi)\psi(0)=2\mu_2\int_0^T(E(v),\Phi)\psi dt. \tag{71}$$

Для того, чтобы перейти в (71) к пределу по $m\to\infty$ при фиксированном $\Phi\in H_0^2(\Omega)$, покажем следующие сходимости:

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^T(\nabla\tau_m,\psi\nabla\Phi)dt\right|=\frac{1}{m}\left|\int_0^T(\tau_m,\psi\Delta\Phi)dt\right|\le \le\frac{1}{m}\left\|\tau_m\right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)}\int_0^T\left\|\psi\Delta\Phi\right\|_{\mathcal{L}_2}dt\to 0. \tag{72}$$

Учитывая, что $W\subset L_2(0,T;C(\Omega))$ вполне непрерывно, что $\tau_m-\tau\in L_\infty(0,T;L_2)=L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*$ и что $\psi\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\in L_1(0,T;\mathcal{L}_2)$ так как

$$\left\|\psi\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)}=\int_0^T\left(\int_\Omega\left|\psi\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{1/2}dt\le$$
$$\le\int_0^T|\psi|\left(\int_\Omega|v|^2\left|\nabla\Phi\right|^2dx\right)^{1/2}dt\le$$
$$\le\int_0^T|\psi|\left(\left\|v\right\|^2_{(C(\Omega))^n}\left\|\Phi\right\|^2_{\mathcal{H}^1}\right)^{1/2}dt\le$$
$$\le\left\|\psi\right\|_{L_2(0,T)}\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}^1}\left\|v\right\|_{L_1(0,T;(C(\Omega))^n)},$$

получим следующую сходимость:

$$\left|\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^n\left(v^i\tau_m,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\right)\psi dt\right|=$$
$$=\left|\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\left(v^i(\tau-\tau_m),\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\right)\psi dt\right|= \quad (73)$$
$$=\left|\int_0^T\int_\Omega(\tau-\tau_m):\psi\sum_{i=1}^n v^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dxdt\right|\to 0.$$

Очевидно, что в силу (69) и того, что $\psi\Phi\in L_1(0,T;\mathcal{L}_2)$

$$\int_0^T(\tau-\tau_m,\Phi)\psi dt=\int_0^T(\tau-\tau_m,\psi\Phi)dt\to 0$$
$$\text{при } m\to\infty. \quad (74)$$

В силу (72)—(74) получим, что $\tau$ удовлетворяет (25) в смысле распределений на $(0,T)$:

$$2\mu_2\int_0^T(\mathcal{E}(v),\Phi)\psi dt=\lim_{m\to\infty}\left(-\int_0^T(\tau_m,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt-\right.$$
$$-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau_m,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau_m,\Phi)\psi dt+$$
$$\left.+\frac{1}{2m\lambda_1}\int_0^T(\nabla\tau_m,\nabla\Phi)\psi dt-(\tau_0,\Phi)\psi(0)\right)=$$
$$=-\int_0^T(\tau,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt+ \quad (75)$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau,\Phi)\psi dt-(\tau_0,\Phi)\psi(0)=$$
$$=\int_0^T\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\psi dt-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau,\Phi)\psi dt.$$

Покажем, что $\tau$ удовлетворяет начальному условию (36). Так как

$$\int_0^T\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\psi dt-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau,\Phi)\psi dt=-\int_0^T(\tau,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt-$$
$$-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau,\Phi)\psi dt-(\tau_0,\Phi)\psi(0),$$

то после приведения подобных слагаемых в предыдущем равенстве получим, что

$$\int_0^T\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\psi dt=-\int_0^T(\tau,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt+$$
$$+(\tau,\Phi)(t)\psi(t)\,|_{t=0}^{t=T}=$$
$$=-\int_0^T(\tau,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt-(\tau_0,\Phi)\psi(0) \quad (76)$$
$$\text{и } (\tau,\Phi)\psi\,|_{t=0}=(\tau_0,\Phi)\psi(0).$$

□

**Лемма 4.0.6.** *Если $v\in W\cap(H^3(\Omega))^n$, то существует единственное решение задачи (25), (36) $\tau_s\in L_\infty(0,T;\mathcal{H}^2)$, причем для любой последовательности решений аппроксимационной задачи (35)—(36) с $\xi=1$ $\{\tau_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ верно, что $\tau_\varepsilon\to\tau_s$ в $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ при $\varepsilon\to 0$.*

*Доказательство.* Известно ([1]), лемма 2.3, что при $v\in W\cap(H^3(\Omega))^n$, $\tau_0\in\mathcal{H}^2$ существует и единственно решение $\tau_s\in C([0,T],\mathcal{H}^2)$ задачи (22), (36), причем $\frac{\partial\tau}{\partial t}\in C([0,T],\mathcal{H}^1)$. Заметим, что для $x\in\partial\Omega$ уравнение (22) можно переписать как

$$\frac{\partial\tau_s}{\partial t}+\frac{1}{\lambda_1}\tau_s=0. \quad (77)$$

из чего следует, что $\tau_s\big|_{\partial\Omega}=\tau_0\big|_{\partial\Omega}e^{-t/\lambda_1}=0$, так как $\tau_0\in\mathcal{H}_0^1$. Для любого $\Phi\in\mathcal{H}_0^1$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(\tau_s,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau_s,\Phi)-\sum_{i=1}^n\left(v^i\tau_s,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)= \quad (78)$$
$$=2\mu_2(\mathcal{E}(v),\Phi).$$

В силу леммы 4.0.4 для каждого $\varepsilon>0$ существует единственное $\tau_\varepsilon$, такое, что

$$\frac{d}{dt}(\tau_\varepsilon,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau_\varepsilon,\Phi)-\sum_{i=1}^n\left(v^i\tau_\varepsilon,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)+ \quad (79)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_\varepsilon,\nabla\Phi)=2\mu_2(\mathcal{E}(v),\Phi).$$

Вычтем почленно (79) из (78):

$$\frac{d}{dt}(\tau_s-\tau_\varepsilon,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau_s-\tau_\varepsilon,\Phi)- \quad (80)$$
$$-\sum_{i=1}^n\left(v^i(\tau_s-\tau_\varepsilon),\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)-\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_\varepsilon,\nabla\Phi)=0.$$

Возьмем в (80) $\Phi=\tau_s-\tau_\varepsilon\in L_\infty(0,T;\mathcal{H}_0^1)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tau_s-\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau_s-\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2-$$
$$-\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_\varepsilon,\nabla(\tau_s-\tau_\varepsilon))= \quad (81)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tau_s-\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau_s-\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2-$$
$$-\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_\varepsilon,\nabla\tau_s)+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\nabla\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2=0.$$

Из этого получается, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tau_s-\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|\tau_s-\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2+ \quad (82)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\nabla\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}^2=\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}(\nabla\tau_\varepsilon,\nabla\tau_s).$$

Пусть $\|\tau_s - \tau_\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} = \|\tau_s - \tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}(t_0)$. Проинтегрируем предыдущее равенство по $t \in [0, t_0]$ аналогично тому, как это делалось в лемме 4.0.2. Так как $\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\nabla\tau_\varepsilon\|^2_{\mathcal{L}_2} \geq 0$, то в силу леммы 4.0.2

$$\frac{1}{2}\|\tau_s - \tau_\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} + \frac{1}{\lambda_1}\|\tau_s - \tau_\varepsilon\|^2_{L_2(0,t_0;\mathcal{L}_2)} \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\int_0^{t_0}(\nabla\tau_\varepsilon, \nabla\tau_s)dt \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\int_0^T \|\nabla\tau_\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}\|\nabla\tau_s\|_{\mathcal{L}_2}\,dt \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|\nabla\tau_\varepsilon\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}\|\nabla\tau_s\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla\tau_\varepsilon\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}}\|\nabla\tau_s\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_1}}(8\mu_2^2\lambda_1\|v\|^2_{L_2(0,T;V)} +$$
$$+2\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2})^{1/2}\|\nabla\tau_s\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

□

**Теорема 4.0.3.** *Если $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $W$ к $v_* \in W$ при $l \to \infty$, $\tau_l \in L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ — решение задачи (25), (36) с $v = v_l$, то существует $\tau_*$ — одно из решений задачи (25), (36) с $v = v_*$, и такая подпоследовательность $\{\tau_{l_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{\tau_l\}_{l=1}^\infty$, что $\tau_{l_k} \rightharpoonup \tau_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ при $k \to \infty$.*

*Доказательство.* В силу оценки (67) и ограниченности (вследствие слабой сходимости $v_m$ в $W$) последовательности $\|v_l\|_W$ существует $\tau_{l_k} \rightharpoonup \tau_+$ *-слабо в $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$. Далее будем для простоты обозначать $l_k = m$. Поэтому необходимо только показать, что $\tau_+$ удовлетворяет (25), (36) с $v = v_*$ и можно взять $\tau_* = \tau_+$. Доказательство этого факта во многом повторяет доказательство предыдущей леммы. Пусть $\psi \in H^1(0,T)$, $\Phi \in H_0^2(\Omega, M_s(n))$ — произвольные (но зафиксированные при переходе к пределу) функции и $\psi(T) = 0$. Тогда в силу вложения $W \subset L_2(0,T;V)$, следующего, например, из теоремы 2 справедливо, что

$$\left|\int_0^T(\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*), \Phi)\psi dt\right| \leq$$
$$\leq \int_0^T |(\mathcal{E}(v_m - v_*), \Phi)\psi|\,dt \leq \qquad (83)$$
$$\leq \int_0^T \|\mathcal{E}(v_m - v_*)\|_{L_2}|\psi|\,dt\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2} \leq$$
$$\leq \|v_m - v_*\|_{L_2(0,T;V)}\|\psi\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2} \to 0.$$

Учитывая, что $W \subset L_2(0,T;C(\Omega))$ вполне непрерывно, что $\tau_m - \tau_* \in \mathcal{L}_\infty(0,T;L_2) = L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*$ и что $\psi\sum_{i=1}^n v_*^i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \in L_1(0,T;\mathcal{L}_2)$ так как

$$\left\|\psi\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)} = \int_0^T(\int_\Omega\left|\psi\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right|^2 dx)^{1/2}dt \leq$$
$$\leq \int_0^T|\psi|(\int_\Omega|v|^2|\nabla\Phi|^2\,dx)^{1/2}dt \leq$$
$$\leq \int_0^T|\psi|(\|v\|^2_{(C(\Omega))^n}\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}^1})^{1/2}dt \leq$$
$$\leq \|\psi\|_{L_2(0,T)}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}\|v\|_{L_1(0,T;(C(\Omega))^n)},$$

получим следующую сходимость:

$$\left|\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\left(v_m^i\tau_m, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^n\left(v_*^i\tau_+, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\right)\psi dt\right| \leq$$
$$\leq \left|\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega((v_m^i - v_*^i)\tau_m + v_*^i(\tau_m - \tau_+)) : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx\psi dt\right| \leq$$
$$\leq \left|\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega v_*^i(\tau_m - \tau_+) : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx\psi dt\right| +$$
$$+\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega\left|\tau_m(v_m^i - v_*^i) : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\psi\right|dxdt \leq$$
$$\leq \left|\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega(\tau_m - \tau_+) : \psi v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dxdt\right| +$$
$$+\sum_{i=1}^n\int_0^T\|v_m^i - v_*^i\|_{C(\Omega)}\int_\Omega\left|\tau_m : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\psi\right|dxdt \leq$$
$$\leq \left\|\tau_m - \tau_+, \psi\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*\times L_1(0,T;\mathcal{L}_2)} +$$
$$+\sum_{i=1}^n\int_0^T\|v_m^i - v_*^i\|_{C(\Omega)}|\psi|\int_\Omega\left|\tau_m : \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right|dxdt \leq \qquad (84)$$
$$\leq \left\|\tau_m - \tau_+, \psi\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*\times L_1(0,T;\mathcal{L}_2)} +$$
$$+\sum_{i=1}^n\int_0^T\|v_m^i - v_*^i\|_{C(\Omega)}|\psi|\|\tau_m\|_{\mathcal{L}_2}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{\mathcal{L}_2}dxdt \leq$$
$$\leq \left\|\tau_m - \tau_+, \psi\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*\times L_1(0,T;\mathcal{L}_2)} +$$
$$+\|\tau_m\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)}\|\psi\|_{L_2(0,T)}\sum_{i=1}^n\|v_m^i - v_*^i\|_{L_2(0,T;C(\Omega))}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{\mathcal{L}_2} \leq$$
$$\leq \left\|\tau_m - \tau_+, \psi\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*\times L_1(0,T;\mathcal{L}_2)} +$$
$$+\|\tau_m\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)}\|\psi\|_{L_2(0,T)}\|v_m - v_*\|_{L_2(0,T;(C(\Omega))^n)}\|\Phi\|_{\mathcal{H}_1} \to 0.$$

В силу (83)—(84) получим, что $\tau_+$ удовлетворяет (25):

$$\lim_{m\to\infty} 2\mu_2\int_0^T(\mathcal{E}(v_m),\Phi)\psi dt =$$
$$= 2\mu_2\int_0^T(\mathcal{E}(v_*),\Phi)\psi dt = \lim_{m\to\infty}(-\int_0^T(\tau_m,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt -$$
$$-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau_m,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau_m,\Phi)\psi dt -$$
$$-(\tau_0,\Phi)\psi(0)) = -\int_0^T(\tau_+,\Phi)\frac{d}{dt}\psi dt -$$
$$-\sum_{i=1}^n\int_0^T\left(v^i\tau_+,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\psi dt + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^T(\tau_+,\Phi)\psi dt - (\tau_0,\Phi)\psi(0).$$

То что $\tau_+$ удовлетворяет (36) доказывается также, как и в предыдущей лемме, с учетом того, что из оценки (68) и слабой сходимости в $W$ $\frac{d}{dt}(\tau_+,\Phi)\in L_2(0,T)$. □

Определим многозначный оператор
$$M_0 : WL_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$$
следующим образом. Положим, что $M_0(v)\subset L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ — это множество таких решений задачи (25), (36) $\tau$, что существует последовательность решений аппроксимационной задачи (35), (36) $\tau_\varepsilon \rightharpoonup \tau$ слабо в $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ при $\varepsilon\to 0$. Заметим, что сужение $M_0$ на $W\cap(H^3(\Omega))^n$ в силу леммы 4.0.6 является однозначным оператором и для $v\in W\cap(H^3(\Omega))^n$ верно, что $M_0(v)=\tau_s\in C([0,T],\mathcal{H}^2)$. В силу теоремы 4.0.3 так введенный оператор $M_0$ обладает следующим свойством: если $v_l\rightharpoonup v_*$ слабо в $W$, то
$$\exists(k\in\mathbb{N},\tau_*\in M_0(v_*),\tau_{l_k}\in M_0(v_{l_k}))\quad \tau_{l_k}\rightharpoonup\tau_*$$
$$*\text{-слабо } L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2).$$

Очевидно, что для оператора $N$, упомянутого в начале работы, справедливо:
$$N : W \multimap L_2(0,T;V^*),$$
$$\forall(v\in W,\varphi\in V)(N(v),\varphi) = -(M_0(v),\nabla\varphi),$$
$$\forall(v\in W\cap(H^3(\Omega))^n,\varphi\in V)(N(v),\varphi) =$$
$$= (\operatorname{Div}\tau_s(v),\varphi).$$

## 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Назовем множество пар $(v,u)\in W\times$ $\times L_2(0,T;H)$, удовлетворяющих задаче
$$J(\dot v,v,u) = \int_0^T\Phi(\dot v(t,\cdot),v(t,\cdot),u(t,\cdot))dt\to\inf, \tag{85}$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial t},\varphi\right) - \mu_1(\Delta v,\varphi) + \sum_{i=1}^n\left(v^i\frac{\partial v}{\partial x_i},\varphi\right) - \\ -(u,\varphi)\in(N(v),\varphi), \tag{86}$$
$$v|_{t=0}=v_0,\quad \tau|_{t=0}=\tau_0, \tag{87}$$
где $v_0\in V^2\cap(H^3(\Omega))^n$, $\tau_0\in\mathcal{H}^2\cap\mathcal{H}_0^1$, $\varphi\in V$ множеством допустимых элементов $\mathfrak{A}$. Очевидно, что $\mathfrak{A}\subset W\times L_2(0,T;H)$.

**Лемма 5.0.7.** $\mathfrak{A}$ *не пусто.*

*Доказательство.* Возьмем $v_\mathfrak{a}\in W\cap(H^3(\Omega))^n$, $v_\mathfrak{a}|_{t=0}=v_0$. Тогда
$$u_\mathfrak{a} = \frac{\partial v_\mathfrak{a}}{\partial t} - \mu_1P\Delta v_\mathfrak{a} + P\sum_{i=1}^n v_\mathfrak{a}^i\frac{\partial v_\mathfrak{a}}{\partial x_i} -$$
$$-PDiv\tau_s(v_\mathfrak{a})\in L_2(0,T;H).$$
□

**Теорема 5.0.4.** *Существует решение* $(v_*,u_*)\in W\times L_2(0,T;H)$ *задачи (31)—(32).*

*Доказательство.* Так как $\mathfrak{A}\neq\varnothing$, то существует последовательность $\{(v_m,u_m)\}_{m=1}^\infty\subset\mathfrak{A}$, такая, что:
$$\inf_{(v,u)\in\mathfrak{A}} J(\dot v,v,u) = \lim_{m\to\infty}J(\dot v_m,v_m,u_m), \tag{88}$$
причем $J(\dot v_m,v_m,u_m)\le R<\infty$ равномерно по $m$. Поэтому, в силу (30)
$$\begin{gathered} C_1\left(\int_0^T\|\dot v_m\|_H^2\,dt + \int_0^T\|v_m\|_{(H^2(\Omega))^n}^2\,dt + \right.\\ \left.+\int_0^T\|u_m\|_{L_2(0,T;H)}^2\,dt\right)\le \\ \le\int_0^T\Phi(\dot v_m,v_m,u_m)dt + CT = \\ = J(\dot v_m,v_m,u_m)+CT\le R+CT.\end{gathered} \tag{89}$$
В силу (89) существует $c_1>0$, такая, что $\|v_m\|_W\le c_1$, $\|u_m\|_{L_2(0,T;H)}\le c_1$ равномерно по $m>0$. Вследствие этого, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим, что
$$v_m\rightharpoonup v_* \text{ слабо в } W,\ u_m\rightharpoonup u_* \\ \text{слабо в } L_2(0,T;H), \tag{90}$$
$$\frac{\partial v_m}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial v_*}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(0,T;H). \tag{91}$$
В силу (90) и вложения $W\subset L_2(0,T;V)$, следующего, например, из теоремы 4.0.2, можно считать, что $v_m\to v_*$ сильно в $L_2(0,T;V)$. Пусть $\tau_m\in M_0(v_m)$, $\tau_*\in M_0(v_*)$ выбраны такими, что из $\{\tau_m\}$ можно выбрать сходящуюся к $\tau_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ подпоследовательность. Такой выбор возможен в силу теоремы 4.0.3. Необходимо показать, что $(v_*,u_*)$ — решение задачи (85)—(87). Пусть $\varphi\in L_2(0,T;V)$. В силу того, что $\nabla\varphi\in L_2(0,T;\mathcal{L}_2)$, из теоремы 4.0.3 (возможно, после перехода к подпоследовательности $\{v_{m_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{v_m\}_{m=1}^\infty$) следует:
$$\left|\int_0^T(\tau_*,\nabla\varphi)dt - \int_0^T(\tau_m,\nabla\varphi)dt\right|\to 0. \tag{92}$$

$$\left|\int_0^T\left(\frac{\partial v_*}{\partial t}-\mu_1\Delta v_*-\frac{\partial v_m}{\partial t}+\mu_1\Delta v_m,\varphi\right)dt\right|\le$$
$$\le\left|\int_0^T\left(\frac{\partial v_*}{\partial t}-\frac{\partial v_m}{\partial t},\varphi\right)dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^T(-\mu_1\Delta v_*+\mu_1\Delta v_m,\varphi)dt\right|=$$
$$=\left|\left\langle\frac{\partial v_*}{\partial t}-\frac{\partial v_m}{\partial t},\varphi\right\rangle_{L_2(0,T;H)^*\times L_2(0,T;H)}\right|+$$
$$+\left|\int_0^T(-\mu_1\nabla v_*+\mu_1\nabla v_m,\nabla\varphi)dt\right|\le$$
$$\le\left|\left\langle\frac{\partial v_*}{\partial t}-\frac{\partial v_m}{\partial t},\varphi\right\rangle_{L_2(0,T;H)^*\times L_2(0,T;H)}\right|+ \qquad (93)$$
$$+\mu_1\int_0^T\|\nabla(v_m-v_*)\|_{\mathcal{L}_2}\|\nabla\varphi\|_{\mathcal{L}_2}dt\le$$
$$\le\left|\left\langle\frac{\partial v_*}{\partial t}-\frac{\partial v_m}{\partial t},\varphi\right\rangle_{L_2(0,T;H)^*\times L_2(0,T;H)}\right|+$$
$$+\mu_1\|\nabla(v_m-v_*)\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}\le$$
$$\le\mu_1\|v_m-v_*\|_{L_2(0,T;V)}\|\varphi\|_V+$$
$$+\left|\left\langle\frac{\partial v_*}{\partial t}-\frac{\partial v_m}{\partial t},\varphi\right\rangle_{L_2(0,T;H)^*\times L_2(0,T;H)}\right|\to 0.$$

Покажем, что $W\subset L_\infty(0,T;H)$ компактно. Известно (например в [7], с. 172), что $W\subset C([0,T];V)$ непрерывно и, таким образом всякое ограниченное в $W$ множество $M$ будет ограниченно и в $W(0,T;\infty,2;V;H)$. Заметим, что $V\subset H$ компактно. В [4] показано, что в этом случае $M$ относительно компактно в $C([0,T];H)$ (см. также [8], теорема 4.14, с. 71). В силу компактности вложения $W\subset L_\infty(0,T;H)$, а также компактности вложения $W\subset L_2(0,T;(C(\Omega))^n)$, показанной в лемме 4.0.1, и ограниченности последовательности $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ в $W$:

$$\left|\int_0^T\sum_{i=1}^m\left(v_*^i\frac{\partial v_*}{\partial x_i}-v_m^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i},\varphi\right)dt\right|=$$
$$=\left|\sum_{i=1}^m\int_0^T\left(v_*^i\frac{\partial v_*}{\partial x_i}-v_*^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i}+v_*^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i}-v_m^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i},\varphi\right)dt\right|\le$$
$$\le\left|\sum_{i=1}^m\int_0^T\left(v_*^i\frac{\partial v_*}{\partial x_i}-v_*^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i},\varphi\right)dt\right|+$$
$$+\left|\sum_{i=1}^m\int_0^T\left(v_*^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i}-v_m^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i},\varphi\right)dt\right|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^m\int_0^T\left|\left(v_*^i(v_*-v_m),\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|dt+$$
$$+\sum_{i=1}^m\int_0^T\left|\left((v_*^i-v_m^i)v_m,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|dt\le \qquad (94)$$
$$\le\sum_{i=1}^m\int_0^T\|v_*^i\|_{C(\Omega)}\|v_*-v_m\|_H\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_H dt+$$
$$+\sum_{i=1}^m\int_0^T\|v_*^i-v_m^i\|_H\|v_m\|_{(C(\Omega))^n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_H dt\le$$
$$\le\|v_*-v_m\|_{L_\infty(0,T;H)}(\|v_*\|_{L_2(0,T;(C(\Omega))^n)}+$$
$$+\|v_m\|_{L_2(0,T;(C(\Omega))^n)})\|\varphi\|_{L_2(0,T;V)}\le$$
$$\le 2c_6\|v_*-v_m\|_{L_\infty(0,T;H)}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V)}\to 0.$$

В силу (92)—(94):

$$0=\lim_{m\to\infty}(\int_0^T\left(\frac{\partial v_m}{\partial t},\varphi\right)dt-\mu_1\int_0^T(\Delta v_m,\varphi)dt+$$
$$+\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(v_m^i\frac{\partial v_m}{\partial x_i},\varphi\right)dt-$$
$$-\int_0^T(u_m,\varphi)dt+\int_0^T(\tau_m,\nabla\varphi)dt)= \qquad (95)$$
$$=-\int_0^T\left(v_*,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dt-\mu_1\int_0^T(\Delta v_*,\varphi)dt+$$
$$+\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(v_*^i\frac{\partial v_*}{\partial x_i},\varphi\right)dt-\int_0^T(u_*,\varphi)dt+$$
$$+\int_0^T(\tau_*,\nabla\varphi)dt+(v_0,\varphi)(0).$$

Заметим, что в силу (90)

$$\frac{\partial v_*}{\partial t}\in L_2(0,T;H),\ \Delta v_*\in L_2(0,T;H). \qquad (96)$$

В силу непрерывности вложений $W\subset L_\infty(0,T;V)$ (например в [7], с. 172), и $W\subset L_2(0,T;(C(\Omega))^n)$ (лемма 4.0.1), имеем:

$$\left\|\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial v_*}{\partial x_i}\right\|^2_{L_2(0,T;H)}=\int_0^T\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n v_*^i\frac{\partial v_*}{\partial x_i}\right|^2dxdt\le$$
$$\le\sum_{i=1}^n\int_0^T\|v_*^i\|^2_{C(\Omega)}\int_\Omega\left|\frac{\partial v_*}{\partial x_i}\right|^2dxdt\le \qquad (97)$$
$$\le\int_0^T\|v_*\|^2_{(C(\Omega))^n}\|v_*\|_V^2dt\le$$
$$\le\|v_*\|^2_{L_\infty(0,T;V)}\|v_*\|^2_{L_2(0,T;(C(\Omega))^n)}\le c_3\|v_*\|_W^4.$$

Аналогично (76) показывается, что $v_*$ удовлетворяет начальному условию (87). Отсюда следует, что $(v_*,u_*)$ — обобщенное решение задачи (85)—(87). Покажем теперь, что $(v_*,u_*)$ — сильное решение задачи (31)—(32). Рассмотрим функционал

$$\tilde{N}(v_*) : L_2(0,T;V) \to \mathbb{R},$$
$$\forall(\varphi \in L_2(0,T;V)) \left\langle \tilde{N}(v_*), \varphi \right\rangle_{L_2(0,T;V)^* \times L_2(0,T;V)} =$$
$$= -\int_0^T (\tau_*, \nabla\varphi) dt.$$

Из (95), (97) следует, что

$$\left| \left\langle \tilde{N}(v_*), \varphi \right\rangle_{L_2(0,T;V)^* \times L_2(0,T;V)} \right| = \left| \int_0^T (\tau_*, \nabla\varphi) dt \right| =$$
$$= \left| \int_0^T \left( \frac{\partial v_*}{\partial t}, \varphi \right) dt - \mu_1 \int_0^T (\Delta v_*, \varphi) dt + \right.$$
$$\left. + \int_0^T \sum_{i=1}^n \left( v_*^i \frac{\partial v_*}{\partial x_i}, \varphi \right) dt - \int_0^T (u_*, \varphi) dt \right| \leq$$
$$\leq \left\| \frac{\partial v_*}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;H)} \|\varphi\|_{L_2(0,T;H)} + \tag{98}$$
$$+ \mu_1 \|\Delta v_*\|_{L_2(0,T;H)} \|\varphi\|_{L_2(0,T;H)} +$$
$$+ \|v_*\|_{L_\infty(0,T;V)} \|v_*\|_{L_2(0,T;(C(\Omega))^n)} \|\varphi\|_{L_2(0,T;H)} +$$
$$+ \|u_*\|_{L_2(0,T;H)} \|\varphi\|_{L_2(0,T;H)} \leq C \|\varphi\|_{L_2(0,T;H)}.$$

По теореме Хана—Банаха функционал $\tilde{N}(v_*)$ продолжается с сохранением нормы на все $L_2(0,T;H)$ (такое продолжение единственно), а так как $(L_2(0,T;H))^*$ отождествляется с $L_2(0,T;H)$, то можно считать, что $\tilde{N}(v_*) \in L_2(0,T;H)$. Известно (см. [9]), что функционал вида (85) является выпуклым и полунепрерывным снизу. Так как выпуклый полунепрерывный снизу функционал полунепрерывен снизу также и в слабой топологии $W \times L_2(0,T;H)$ (см., например, [10], с. 20), то из (88) следует, что

$$J(\dot{v}_*, v_*, u_*) \leq \liminf_{m\to\infty} J(\dot{v}_m, v_m, u_m). \tag{99}$$

Таким образом, из (96)—(98) следует, что $(v_*, u_*)$ — сильное решение задачи (31)—(32), так как для любого $\varphi \in L_2(0,T;V)$ справедливо равенство

$$\left( \frac{\partial v_*}{\partial t} - \mu_1 \Delta v_* + \sum_{i=1}^n v_*^i \frac{\partial v_*}{\partial x_i} - \tilde{N}(v_*) - u_*, \varphi \right) = 0. \tag{100}$$

□

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guilliope C.* Existence results for the flow of viscoelastic fluids with differential constitutive law / C. Guilliope, J.-C. Saut // Nonlinear Anal. , 1990. — V. 15, № 9. — P. 849—869.

2. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ /Р. Темам — М. : Мир, 1987. — 408 с.

3. *Vorotnikov D.A.* On the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem in the Jeffreys model of motion of a viscoelastic medium / D. A. Vorotnikov, V.G. Zvyagin // Abstract and Applied Analysis, 2004 . — № 10 (2004). — P. 815—829.

4. *Simon J.* Compact sets in $L_p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. ser. IV, 1987. — V. CXLVI. — P. 65—96.

5. Функциональный анализ / сост. Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. С. Г. Крейна. — М. : Наука, 1964. — 424 с.

6. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. М. Захарис. — М. : Мир, 1978. — 336 с.

7. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределительными системами: Теория и приложения: Учеб. пособие / А. В. Фурсиков. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с. — (Университетская сер. ; Т. 5).

8. *Звягин В.Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье—Стокса / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.

9. *Фурсиков А.В.* Задачи управления и уравнения Навье—Стокса и Эйлера / А.В. Фурсиков // Математический сборник, 1981. — Т. 115(157) : 2(6). — С. 281—306.

10. *Экланд И.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. — М. : Мир, 1979. — 339 с.

11. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М. : Наука, 1972. — 496 с.

*Поступила в редакцию 18.10.2007*