УДК 517.98

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ, ПОРОЖДЕННЫМ ЗАДАЧЕЙ КОШИ В ВЕСОВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ИЗ ПОДПРОСТРАНСТВА

А. С. Загорский

Воронежский государственный университет

В данной статье рассматриваются спектральные свойства дифференциального оператора, порожденного задачей Коши в весовом функциональном пространстве $L_p^w(\mathbb{R}_+, X)$ с начальным условием из заданного подпространства E банахова пространства X.

Пусть X — комплексное банахово пространство и $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ — весовая функция обладающая свойством *сбалансированности*: $W = \sup\limits_{\substack{t\in\mathbb{R}_+\\ \tau\in[-1,1]}} \dfrac{w(t+\tau)}{w(t)} < \infty$.

Через $L_p^w = L_p^w(\mathbb{R}_+, X)$, где $p \in [1,\infty)$, обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) и суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ нормы (классов) функций, определённых на $\mathbb{R}_+$ со значениями в X и имеющих конечную норму, определенную равенством

$$\|x\|_{L_p^w} = \left(\int_0^\infty \|w(t)x(t)\|^p \, dt \right)^{1/p}, \; x \in L_p^w.$$

Символом $L_\infty^w = L_\infty^w(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим банахово пространство существенно ограниченных измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций, принимающих значения в X и имеющих конечную норму, определенную равенством

$$\|x\|_{L_\infty^w} = \operatorname*{vraisup}_{t\in\mathbb{R}_+} \|w(t)x(t)\|, \quad x \in L_\infty^w.$$

Через $C_b^w = C_b^w(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим подпространство из L_∞^w непрерывных функций. В дальнейшем оно выступает в качестве «самостоятельного» банахова пространства.

Далее, символом $\mathcal{F}^w = \mathcal{F}^w(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим одно из рассматриваемых функциональных пространств (используется обозначение $\mathcal{F}^w \in \{L_p^w, \in [1,\infty], C_b^w\}$).

В случае $w \equiv 1$ пространства $\mathcal{F}^w, L_p^w, C_b^w$ будем обозначать через $\mathcal{F}, L_p, C_b$ соответственно.

В работе изучается дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \; f \in \mathbb{R}^w, \; t \ge 0, \qquad (1)$$

рассматриваемое в функциональном пространстве $\mathcal{F}^w$, где отображение $A : \mathbb{R}_+ \to LO(X)$ таково, что любое решение $x \in \mathcal{F}^w$ уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию $x(t) = U(t,s)x(s)$ для сильно непрерывного семейства эволюционных операторов $\{U(t,s), 0 \le s \le t < \infty\} \subset End\ X$, обладающего свойством $M_U = \sup\limits_{0\le t-s\le 1} \|U(t,s)\| < \infty$ (и, значит, для некоторых $C \ge 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ допускающего оценку вида $\|U(t,s)\| \le Ce^{\alpha(t-s)}$).

Пусть E — замкнутое подпространство из X. Рассматривается задача существования слабых решений x уравнения (1), принадлежащих банахову пространству $\mathcal{F}^w$ и для которых выполнено условие

$$x(0) \in E. \qquad (2)$$

При этом функция $x \in \mathcal{F}^w$ называется слабым решением (mild solution [3]) дифференциального уравнения (1), если существуют функция $f \in \mathcal{F}^w$ и вектор $x_0 \in X$ такие, что для всех $t \ge 0$ верно равенство

$$x(t) = U(t)x_0 - \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

Исследуя такую задачу, удобно ввести в рассмотрение линейный оператор

$$\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}^w \to \mathcal{F}^w = \mathcal{F}^w,$$

область определения которого состоит из непрерывных функций $x \in \mathcal{F}^w$, удовлетворяющих условию (2), причем существует $f \in \mathcal{F}^w$ такая, что функции x и f удовлетворяют равенству (3). Тогда полагается $\mathcal{L}_E x = f$.

Следует отметить, что определение оператора $\mathcal{L}_E$ корректно, то есть функция f, для кото-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00131

рой верно равенство (3) единственна (что означает принадлежность $\mathcal{L}_E$ множеству $LO(\mathcal{F}^w)$).

Определение 0.1. *Будем говорить, что семейство эволюционных операторов* $\{U(t,s),\ 0 \le s \le t < \infty\} \subset End\,X$ *для* $\alpha \in \mathbb{R}$ *допускает (экспоненциальную)* α*-**дихотомию**, если существует проекторозначная функция* $P : \mathbb{R}_+ \to End\,X$ *такая, что для любых* $t,s \in \Omega$, $t \ge s$ *и некоторых* $C, \varepsilon > 0$ *выполнены свойства*

1. $U(t,s)ImP(s) \subseteq ImP(t),\ U(t,s)KerP(s) = KerP(t)$;

2. $\|U(t,s)x\| \le Ce^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)}\|x\|$ *для любых* $x \in ImP(s)$;

3. $\|U(t,s)x\| \ge C^{-1}e^{(\alpha+\varepsilon)(t-s)}\|x\|$ *для любых* $x \in KerP(s)$.

В этом случае будем использовать обозначения

$$\chi_{-\alpha}(U) = \overline{\lim_{t,s\to\infty}} \frac{\ln\|U(s+t,s)P(s)\|}{t},$$

$$\chi_{+\alpha}(U) = -\overline{\lim_{t,s\to\infty}} \frac{\ln\left\|(U(s+t,s)\mid KerP(s))^{-1} \oplus 0_{\operatorname{Im}P(s+t)}\right\|}{t}.$$

В случае $P \equiv 0$, *будем полагать* $\chi_{-\alpha}(U) = -\infty$, *в случае* $P \equiv I$ *— положим* $\chi_{+\alpha}(U) = \infty$.

Замечание 1. Отметим, что α-дихотомия семейства U эквивалентна дихотомии (в традиционном смысле) эволюционного семейства $\{U_1(t,s), 0 \le s \le t < \infty\}$, $U_1(t,s) = \alpha^{s-t}U(t,s)$, а величины $\alpha^{-1}\chi_{-\alpha}(U)$ и $\alpha\chi_{+\alpha}(U)^{-1}$ совпадают с верхним генеральным показателем ([2]), соответственно, сужения семейства U_1 на образы значений функции P и обратного семейства к сужению U_1 на ядра значений функции P.

Теорема 1. Резольвентное множество оператора $\mathcal{L}_E \in LO(\mathcal{F}^w)$ не пусто тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что семейство U допускает α-дихотомию, а проекторозначная функция P, осуществляющая дихотомию семейства U, обладает свойством $Ker\,P(0) = E$. В этом случае $\rho(\mathcal{L}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_{-\alpha} < \operatorname{Re}\lambda < \chi_{+\alpha}\}$.

► Доказательство непосредственно вытекает из [1]. ◄

Теорема 2. Резольвентное множество оператора $\mathcal{L}_E \in LO(\mathcal{F}^w)$ не пусто тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что семейство U обладает свойством α-дихотомии, а проекторозначная функция P, осуществляющая дихотомию семейства U, обладает свойством $Ker\,P(0) = E$, причем $w_+ - w_- < \chi_{+\alpha} - \chi_{-\alpha}$, где $w_+ = \overline{\lim\limits_{t,s\to\infty}} \dfrac{\ln w(t+s) - \ln w(s)}{t}$,

$w_- = \underline{\lim\limits_{t,s\to\infty}} \dfrac{\ln w(t+s) - \ln w(s)}{t}$. В этом случае $\rho(\mathcal{L}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_{-\alpha} + w_+ < \operatorname{Re}\lambda < \chi_{+\alpha} + w_-\}$.

► Рассмотрим эволюционное семейство $\{V(t,s), 0 \le s \le t < \infty\} \subset \mathcal{F}$, $(t,s) = w(t)w^{-1}(s)U(t,s)$ и оператор $B \in LO(\mathcal{F}^w, \mathcal{F})$, $(Bx)(t) = w(t)x(t)$. Поскольку $\mathcal{L}_E = B^{-1}\mathfrak{L}_E B$, где $\mathfrak{L}_E = \{(x,y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : x(t) = V(t,0)x_0 - \int_0^t V(t,\tau)y(\tau)$ для некоторого $x_0 \in E\}$, то спектры операторов $\mathcal{L}_E$ и $\mathfrak{L}_E$ совпадают. В силу сбалансированности функции w величины w_+ и w_- конечны, кроме того верно неравенство $\sup\limits_{0\le t-s\le 1}\|V(t,s)\| < \infty$, что позволяет применить к оператору $\mathfrak{L}_E$ теорему 1, получив справедливость утверждения данной теоремы. ◄

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А.Г.* Линейные отношения в исследовании дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами // Вестник ВГУ, Серия: Физика, Математика, 2007, вып. 2, С.(см. настоящий выпуск).

2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука. — 1970.

3. *Chicone C., Latushkin Y.* Evolution Semigroups in Dynamical System and Differential Equations // Amer. Math. Soc. — 1999.

Поступила в редакцию 26.10.2007