УДК 62-50

СИНТЕЗ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. В. Дылевский

Воронежский государственный университет

Решается задача построения бесконечномерного модального регулятора для объекта с распределенными параметрами. Передаточные функции объекта, регулятора и замкнутой системы рассматриваются в классе мероморфных функций. Модальный регулятор синтезируется непосредственно по желаемой передаточной функции замкнутой системы. Метод синтеза регулятора сводится к поиску интерполяционного ряда. Приводится пример.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления объектами с распределенными параметрами представляет собой одну из актуальных проблем теории автоматического управления [1, 2, 3]. Об этом свидетельствует появление в отечественных и зарубежных изданиях многочисленных публикаций как теоретического, так и прикладного характера, проведение различных конференций и симпозиумов, посвященных этой проблеме. Трудно указать какую-нибудь естественно-научную, техническую или промышленную область, где бы не возникали задачи, связанные с использованием объектов с распределенными параметрами. Кроме того, интерес исследователей к данной проблеме объясняется тем, что объекты с распределенными параметрами, являясь бесконечномерными, описываются трансцендентными передаточными функциями. Это обстоятельство не позволяет непосредственно применять к объектам с распределенными параметрами методы теории автоматического управления объектами с сосредоточенными параметрами. Однако на основе структурной теории распределенных систем для достаточно широкого класса распределенных объектов могут быть получены эффективные методы синтеза линейных систем автоматического управления [4, 5].

В данной работе решается задача синтеза модальной системы управления для объекта с распределенными параметрами, описываемого мероморфной передаточной функцией. Передаточные функции регулятора и замкнутой системы также рассматриваются в классе мероморфных функций. Иными словами, для бесконечномерного объекта управления решается задача построения бесконечномерного регулятора, обеспечивающего заданное желаемое распределение полюсов и части нулей передаточной функции замкнутой системы. Метод синтеза регулятора сводится к поиску интерполяционного ряда, решающего задачу интерполирования мероморфной функции в счетном числе узлов (не обязательно различных), являющихся нулями некоторой целой функции. В качестве иллюстрации метода в статье рассматривается пример построения модального регулятора для однородного механического элемента, испытывающего продольные колебания.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть передаточная функция $W(p)$ объекта управления является мероморфной функцией в конечной комплексной плоскости (исключая $p=\infty$). Известно [6], что каждую функцию, мероморфную в комплексной плоскости, можно представить в виде отношения двух целых функций, не имеющих общих нулей, т. е. в следующем виде:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}. \tag{1}$$

Здесь $A(p)$ и $B(p)$ — целые функции, не имеющие общих нулей.

Обозначим через $C^{<\rho,\sigma>}$ множество целых функций порядка ρ и типа σ. Относительно целых функций $A(p)$ и $B(p)$ будем дополнительно предполагать, что $A(p)$ и $B(p)$ функции конечного порядка, для которых выполнено одно из следующих условий:

$$\text{либо } 0 \le \rho_B < \rho_A, \tag{2}$$

$$\text{либо } 0 < \rho_B = \rho_A,\ \sigma_B \le \sigma_A. \tag{3}$$

Так как величины ρ и σ являются характеристиками роста (скорости роста) модуля целой функции, то неравенства (2) и (3) означают, что числитель $B(p)$ мероморфной функции $W(p)$ должен расти не быстрее знаменателя $A(p)$. Поэтому каждое из соотношений (2) или (3) можно рассматривать как условие физической реализуемости передаточной функции (1).

Следует отметить, что функции конечного порядка являются простейшими после многочленов целыми функциями (порядок многочленов равен нулю).

Итак, для заданной мероморфной передаточной функции $W(p)$ объекта (1) рассмотрим задачу построения мероморфной передаточной функции регулятора

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)}, \tag{4}$$

обеспечивающего заданное распределение полюсов и части нулей передаточной функции $\Phi(p)$ замкнутой системы управления, структурная схема которой изображена на рис. 1.

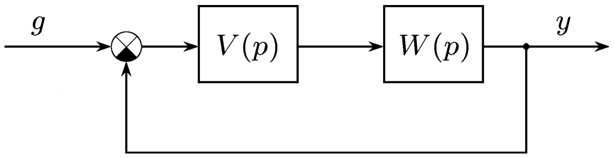

Рис. 1

В формуле (4) предполагается, что искомые функции $S(p) \in C^{<\rho_S,\sigma_S>}$ и $R(p) \in C^{<\rho_R,\sigma_R>}$ являются целыми функциями конечного порядка, для которых выполнено одно из условий физической реализуемости передаточной функции регулятора

$$\text{или } 0 \le \rho_S < \rho_R, \tag{5}$$

$$\text{или } 0 < \rho_S = \rho_R,\ \sigma_S \le \sigma_R. \tag{6}$$

2. СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

По структурной схеме, представленной на рис. 1, находим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)V(p)}{1 + W(p)V(p)}. \tag{7}$$

Далее, принимая во внимание формулы (1) и (4), представим передаточную функцию $\Phi(p)$ следующим образом:

$$\Phi(p) = \frac{B(p)S(p)}{B(p)S(p) + A(p)R(p)}. \tag{8}$$

Зададимся желаемым распределением нулей и полюсов передаточной функции $\Phi(p)$. С этой целью введем в рассмотрение целую функцию $Q(p) \in C^{<\rho_Q,\sigma_Q>}$, определяющую распределение части нулей функции $\Phi(p)$, и целую функцию $D(p) \in C^{<\rho_D,\sigma_D>}$, определяющую распределение полюсов передаточной функции $\Phi(p)$. Тогда желаемая передаточная функция $\Phi(p)$ замкнутой системы управления может быть представлена в виде

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}. \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9), приравнивая соответственно числители и знаменатели дробей, получаем систему уравнений относительно функций $S(p)$ и $R(p)$

$$\begin{cases} B(p)S(p) = Q(p), \\ B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что при известной целой функции $S(p)$ функция $Q(p)$ полностью определена. Таким образом, для решения поставленной задачи требуется решить следующее уравнение:

$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \tag{11}$$

Для того чтобы обеспечить заданное расположение части нулей передаточной функции $\Phi(p)$, решение уравнения (11) будем искать в виде

$$\begin{aligned} S(p) &= S_0(p) - \gamma(p)A(p), \\ R(p) &= R_0(p) + \gamma(p)B(p), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\gamma(p) \in C^{<\rho_\gamma,\sigma_\gamma>}$ — произвольная целая функция, а функции $S_0(p)$ и $R_0(p)$ являются решением уравнения

$$B(p)S_0(p) + A(p)R_0(p) = D(p). \tag{13}$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если целые функции $A(p) \in C^{<\rho_A,\sigma_A>}$ и $B(p) \in C^{<\rho_B,\sigma_B>}$ не имеют общих нулей и удовлетворяют условию (2) или (3), то для любой целой функции $D(p) \in C^{<\rho_A,\sigma_D>}$, $\sigma_D \ge \sigma_A$, существует единственная пара целых функций $S_0(p) \in C^{<\rho_{S_0},\sigma_{S_0}>}$, где либо $\rho_{S_0} = 0$, $\sigma_{S_0} = 0$, либо $\rho_{S_0} = \rho_A$, $\sigma_{S_0} = \sigma_A$, и $R_0(p) \in C^{<\rho_A,\sigma_D-\sigma_A>}$, являющаяся решением уравнения (13).*

Доказательство. Обозначим через α_i, $i \in \mathbb{N}$, нуль кратности ν_i целой функции $A(p)$. Так как

$A(p)$ имеет счетное число нулей, то перенумеруем нули α_i в порядке неубывания их модулей

$$0 \le |\alpha_1| \le |\alpha_2| \le \ldots \le |\alpha_i| \le \ldots .$$

Тогда, дифференцируя μ_i раз ($\mu_i = \overline{0, \nu_i - 1}$) уравнение (13) и учитывая, что по условию теоремы функции $A(p)$ и $B(p)$ не имеют общих нулей, т. е.

$$B(\alpha_i) \ne 0 \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

получаем интерполяционную задачу

$$[B(p)S_0(p)]_{p=\alpha_i}^{(\mu_i)} = D^{(\mu_i)}(\alpha_i), \quad \mu_i = \overline{0, \nu_i - 1},\ i \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Условие (14) после элементарных преобразований представим следующим образом:

$$S^{(\mu_i)}(\alpha_i) = \left[\frac{D(p)}{B(p)}\right]_{p=\alpha_i}^{(\mu_i)},\ \mu_i = \overline{0, \nu_i - 1},\ i \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Следует отметить, что если

$$\left[\frac{D(p)}{B(p)}\right]_{p=\alpha_i}^{(\mu_i)} = q = const\ \forall i \in \mathbb{N},\ \mu_i = \overline{0, \nu_i - 1}, \tag{16}$$

то полагаем

$$S_0(p) = q,\ \rho_{S_0} = 0,\ \sigma_{S_0} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, решением интерполяционной задачи (15) является целая рациональная функция.

Пусть теперь условие (16) не выполняется. Введем в рассмотрение правильную систему контуров $\{C_n\}$ (см. [7]). Кроме того, обозначим через β_i , $i \in \mathbb{N}$, нули целой функции $B(p)$, упорядоченные в порядке неубывания их модулей

$$0 \le |\beta_1| \le |\beta_2| \le \ldots \le |\beta_i| \le \ldots .$$

Тогда, как показано в [8], многочлен Эрмита

$$S_N(p) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{C'_N} \frac{A(s) - A(p)}{A(s)(s-p)} \frac{D(s)}{B(s)} ds,\ p \in E'_N, \tag{18}$$

интерполирует функцию $\dfrac{D(s)}{B(s)}$ в точках α_1, α_2, …, α_N . Здесь E'_N — M -связная область аналитичности функции $\dfrac{D(s)}{B(s)}$, содержащая нули α_1, α_2, …, α_N функции $A(p)$ и не содержащая нули β_1, β_2, …, β_M , $|\beta_M| \le |\alpha_N|$, функции $B(p)$; C'_N — граница области E'_N , контур из правильной системы контуров $\{C_n\}$. Применяя к функции (18) теорему Коши о вычетах, после элементарных преобразований получаем следующее представление интерполяционного полинома:

$$S_0(p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{\nu_i - 1} \frac{A(p)}{(p-\alpha_i)^{r+1}} \sum_{l=r}^{\nu_i - 1} \left[\frac{(s-\alpha_i)^{\nu_i}}{A(s)}\right]_{s=\alpha_i}^{(\nu_i - 1 - l)} \times \left[\frac{D(s)}{B(s)}\right]_{s=\alpha_i}^{(l-r)} \frac{1}{(\nu_i - 1 - l)!(l-r)!}. \tag{19}$$

Устремляя в формуле (18) $N \to \infty$, находим интерполяционный ряд, являющийся единственным решением [1, 8] интерполяционной задачи (15)

$$S_0(p) = \lim_{N\to\infty} S_N(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\nu_i - 1} \frac{A(p)}{(p-\alpha_i)^{r+1}} \times \sum_{l=r}^{\nu_i - 1} \left[\frac{(s-\alpha_i)^{\nu_i}}{A(s)}\right]_{s=\alpha_i}^{(\nu_i - 1 - l)} \left[\frac{D(s)}{B(s)}\right]_{s=\alpha_i}^{(l-r)} \times \frac{1}{(\nu_i - 1 - l)!(l-r)!}. \tag{20}$$

Так как α_i являются нулями функции $A(p)$, то интерполяционный ряд (20) имеет своими членами целые функции и по построению сходится во всех точках конечной комплексной плоскости. Поэтому в силу утверждения [9] о том, что сумма равномерно сходящегося ряда голоморфных функций является голоморфной функцией во всех внутренних точках того множества, на котором этот ряд равномерно сходится, функция $S_0(p)$, определяемая интерполяционным рядом (20), является целой. Кроме того, порядок и тип функции $S_0(p)$ совпадают с порядком и типом целой функции $A(p)$. Это следует из того, что интегрирование и дифференцирование не меняет порядок и тип целой функции [6]. Таким образом, $S_0(p)$ — целая трансцендентная функция и

$$\rho_{S_0} = \rho_A,\ \sigma_{S_0} = \sigma_A. \tag{21}$$

Так как функция $S_0(p)$ удовлетворяет условию (14), то все нули функции $A(p)$ являются нулями функции $D(p) - B(p)S_0(p)$. Поэтому функцию $D(p) - B(p)S_0(p)$ можно представить в следующем виде [6]:

$$D(p) - B(p)S_0(p) = P(p)P_A(p)e^{T(p)}, \tag{22}$$

где $T(p)$ — многочлен конечной степени, $P(p)$ и $P_A(p)$ — некоторые канонические произведения. При этом

$$A(p) = P_A(p)e^{T_A(p)}, \tag{23}$$

$T_A(p)$ — многочлен степени, не превосходящей ρ_A; $P_A(p)$ — как и ранее, бесконечное произведение, построенное по нулям функции $A(p)$. Тогда из формул (22), (23) и (24) находим функцию

$$R_0(p) = \frac{D(p) - B(p)S_0(p)}{A(p)} = = P(p)e^{T(p)-T_A(p)} = P_R(p)e^{T_R(p)}. \quad (24)$$

Определим теперь порядок и тип целой функции $R_0(p)$. Из определения порядка целой функции, неравенств (2), (3), а также соотношений (17), (21) и условия теоремы $\rho_D = \rho_A$ вытекает, что разность $D(p) - B(p)S_0(p)$ имеет порядок ρ_A. Поэтому в силу формулы (24) порядок целой функции $R_0(p)$ будет равен

$$\rho_{R_0} = \rho_A. \quad (25)$$

Далее определим σ_{R_0}. Так как $\rho_D = \rho_{BS_0} = \rho_A$ и по условию теоремы $\sigma_D \geq \sigma_A$, то тип функции $D(p) - B(p)S_0(p)$ равен σ_D. Тогда, принимая во внимание формулу (24), находим

$$\sigma_{R_0} = \sigma_D - \sigma_A. \quad (26)$$

Теорема доказана.

Следует особо отметить конструктивный характер доказательства теоремы 1. Действительно, формулы (20) и (24) не только позволяют доказать утверждения теоремы, но и дают возможность практического определения передаточной функции регулятора.

З а м е ч а н и е 1. *Если все нули функции $A(p)$ являются простыми, то формула (20) может быть представлена следующим образом:*

$$S_0(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A(p)}{p - \alpha_i} \frac{D(\alpha_i)}{B(\alpha_i)A'(\alpha_i)}. \quad (27)$$

Итак, если выполнены все условия теоремы 1, то искомые функции $S_0(p)$ и $R_0(p)$ могут быть всегда найдены (например, по формулам (20) и (24)), причем единственным образом, а значит, передаточная функция регулятора полностью определена и представляет собой мероморфную функцию

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{S_0(p) - \gamma(p)A(p)}{R_0(p) + \gamma(p)B(p)}, \quad (28)$$

где, как и ранее, $\gamma(p) \in C^{<\rho_\gamma, \sigma_\gamma>}$ — произвольная целая функция. При этом передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)} = \frac{B(p)[S_0(p) - \gamma(p)A(p)]}{D(p)}. \quad (29)$$

З а м е ч а н и е 2. *В том случае, если в качестве функции $\gamma(p)$ выступает целая рациональная функция, можно воспользоваться следующим фактом, вытекающим из определения порядка и типа целой функции. Целые трансцендентные функции $\Psi(p)$ и $P_1(p)\Psi(p) + P_2(p)$, где $P_1(p)$ и $P_2(p)$ — произвольные многочлены, одного порядка и одного типа.*

Нетрудно заметить, что задача распределения нулей передаточной функции замкнутой системы $\Phi(p)$ сводится к решению следующего уравнения:

$$B(p)(S_0(p) - \gamma(p)A(p)) = Q(p) \quad (30)$$

относительно неизвестной функции $\gamma(p)$. Очевидно, что в силу (30) функция $Q(p)$ всегда будет содержать нули функции $B(p)$. Тем самым, задача распределения нулей передаточной функции замкнутой системы может быть решена лишь частично, т. е. можно говорить о распределении только части нулей мероморфной функции $\Phi(p)$.

Исследуем теперь вопрос о физической реализуемости передаточных функций модального регулятора $V(p)$ и замкнутой системы $\Phi(p)$. С этой целью рассмотрим следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Передаточные функции регулятора (28) и замкнутой системы (29) всегда реализуемы, если выполняются неравенства*

$$\rho_\gamma \leq \rho_A, \quad (31)$$

$$\sigma_D \geq 2\sigma_A + \sigma_\gamma \chi, \quad (32)$$

где

$$\chi = \begin{cases} 1, & \rho_\gamma = \rho_A, \\ 0, & \rho_\gamma < \rho_A. \end{cases} \quad (33)$$

Доказательство. Одним из условий физической реализуемости передаточной функции регулятора (28) является выполнение неравенства

$$\rho_R \geq \rho_S. \quad (34)$$

Так как по условию (31) порядок функции $\gamma(p)$ не превосходит ρ_A, то согласно определения порядка целой функции, теоремы 1 и формул (12), (25) имеем

$$\rho_S = \rho_A, \; \rho_R = \rho_A. \quad (35)$$

Таким образом, неравенство (34) выполняется.

Покажем, что справедливо неравенство

$$\sigma_S \leq \sigma_R. \quad (36)$$

В самом деле, принимая во внимание формулы (12) и условия (2), (3), а также соотношения (21), (26), (32), (33), получаем

$$\sigma_S = \sigma_\gamma \chi + \sigma_A, \quad \sigma_R = \sigma_D - \sigma_A. \qquad (37)$$

Очевидно, что из равенств (37) и условия (32) сразу вытекает справедливость неравенства (36). Таким образом, условие (32) теоремы гарантирует выполнение соотношений (35), (36), обеспечивающих физическую реализуемость передаточной функции регулятора $V(p)$, описываемой формулой (28).

Для передаточной функции замкнутой системы (29) в силу условий (10), (12), неравенств (2), (3), а также условия (32) теоремы получаем

$$\rho_Q = \rho_A = \rho_D,$$

$$\sigma_Q \le \sigma_B + \sigma_\gamma \chi + \sigma_A \le \sigma_\gamma \chi + 2\sigma_A \le \sigma_D.$$

Отсюда сразу следует физическая реализуемость передаточной функции $\Phi(p)$ замкнутой системы, определяемой формулой (29). Теорема доказана.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу построения модального регулятора для однородного механического элемента с распределенными параметрами, испытывающего продольные колебания, передаточная функция которого определяется следующей формулой [10]:

$$W(p) = \frac{k}{p \operatorname{sh} \tau p}. \qquad (38)$$

Здесь k и τ — некоторые положительные постоянные. Из формулы (38) сразу следует, что

$$B(p) = k, \quad A(p) = p \operatorname{sh} \tau p. \qquad (39)$$

Поэтому $B(p) \in C^{<0,0>}$, $A(p) \in C^{<1,\tau>}$. Очевидно, что условие (2) выполняется.

Из условий физической реализуемости (31), (32) следует, при $\gamma(p) \in C^{<0,\sigma_\gamma>}$ и $\rho_D = \rho_A = 1$ должно выполняться следующее неравенство:

$$\sigma_D \ge 2\sigma_A = 2\tau. \qquad (40)$$

Пусть распределение полюсов передаточной функции $\Phi(p)$ замкнутой системы задается целой функцией

$$D(p) = (\tau p + \beta)\operatorname{sh}^2(\tau p + \lambda), \quad D(p) \in C^{<1,2\tau>}, \quad (41)$$

где $\beta > 0$ и $\lambda > 0$ — некоторые произвольные действительные числа. Очевидно, что условия (40) для заданной целой функции (41) выполнены.

Нетрудно проверить, что целая функция $A(p)$ имеет своими нулями

$$\alpha_0 = 0, \nu_0 = 2, \quad \alpha_n = j\frac{\pi n}{\tau}, \nu_n = 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Поэтому формула (16) в данном случае принимает вид

$$S_0(p) = J_1(p) + J_2(p), \qquad (42)$$

где

$$J_1(p) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty} \frac{A(p)}{p - \alpha_n} \frac{D(\alpha_n)}{B(\alpha_n)A'(\alpha_n)}, \qquad (43)$$

$$J_2(p) = \sum_{r=0}^{1} \frac{A(p)}{p^{r+1}} \times \sum_{l=r}^{1} \left[\frac{s^2}{A(s)}\right]^{(1-l)}_{s=0} \left[\frac{D(s)}{B(s)}\right]^{(l-r)}_{s=0} \frac{1}{(1-l)!(l-r)!}. \qquad (44)$$

Рассмотрим интерполяционный ряд (42) подробнее. С этой целью при $n \in \mathbb{Z}$ находим

$$D(\alpha_n) = (\beta + j\pi n)\operatorname{sh}^2 \lambda, \quad A'(\alpha_n) = (-1)^n j\pi n.$$

Отсюда, учитывая очевидное равенство $B(\alpha_n) = k$, получаем

$$J_1(p) = \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{k} p \operatorname{sh} \tau p \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n(\beta + j\pi n)}{j\pi n\left(p - j\dfrac{\pi n}{\tau}\right)}. \qquad (45)$$

Объединяя в формуле (45) слагаемые с индексами n и $-n$, находим

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n(\beta + j\pi n)}{j\pi n\left(p - j\dfrac{\pi n}{\tau}\right)} = 2\left(p + \frac{\beta}{\tau}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^2 + \dfrac{\pi^2 n^2}{\tau^2}}. \qquad (46)$$

Принимая во внимание равенство [6]

$$\frac{1}{\operatorname{sh} p} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2p}{p^2 + \pi^2 n^2}, \qquad (47)$$

из формул (45), (46) после элементарных преобразований окончательно получаем следующее выражение:

$$J_1(p) = \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{k}\left(\tau p - \operatorname{sh} \tau p + \beta - \frac{\beta}{\tau}\frac{\operatorname{sh} \tau p}{p}\right). \qquad (48)$$

Далее рассмотрим сумму $J_2(p)$. Так как

$$\lim_{p\to 0} \frac{p^2}{A(p)} = \frac{1}{\tau},$$

$$\lim_{p\to 0}\left[\frac{p^2}{A(p)}\right]' = \lim_{p\to 0} \frac{\operatorname{sh} \tau p - \tau p \operatorname{ch} \tau p}{\operatorname{sh}^2 \tau p} = 0 \qquad (49)$$

и

$$\lim_{p\to 0} \frac{D(p)}{B(p)} = \frac{\beta}{k}\operatorname{sh}^2 \lambda,$$

$$\lim_{p\to 0}\left[\frac{D(p)}{B(p)}\right]' = \frac{\tau}{k}(\operatorname{sh}^2 \lambda + \beta \operatorname{sh} 2\lambda), \qquad (50)$$

то из формулы (44) и соотношений (39), (49), (50) сразу получаем

$$J_2(p) =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{k} \operatorname{sh} \tau p + \frac{\beta \operatorname{sh} 2\lambda}{k} \operatorname{sh} \tau p + \frac{\beta \operatorname{sh}^2 \lambda}{\tau k} \frac{\operatorname{sh} \tau p}{p}. \quad (51)$$

Таким образом, учитывая равенства (48) и (51), а также обозначения (43), (44), формула (42) принимает окончательный вид

$$S_0(p) = \frac{1}{k}\left[(\tau p + \beta)\operatorname{sh}^2 \lambda + \beta \operatorname{sh}^2 2\lambda \operatorname{sh} \tau p\right].$$

Из условия (13) найдем функцию $R_0(p)$. В самом деле,

$$D(p) - B(p)S_0(p) =$$

$$= (\tau p + \beta)\operatorname{sh} \tau p \operatorname{sh}(\tau p + 2\lambda) - \beta \operatorname{sh} 2\lambda \operatorname{sh} \tau p.$$

Тогда

$$R_0(p) = \frac{D(p) - B(p)S_0(p)}{A(p)} =$$

$$= (\tau p + \beta)(\tau p + 2\lambda) - \beta 2\lambda.$$

В результате передаточная функция регулятора для объекта управления с передаточной функцией (38) и произвольной целой рациональной функции $\gamma(p)$ имеет вид

$$V(p) = \frac{S_0(p)}{R_0(p)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{k}\left[(\tau p + \beta)\operatorname{sh}^2 \lambda + \beta \operatorname{sh}^2 2\lambda \operatorname{sh} \tau p\right] - \gamma(p) p \operatorname{sh} \tau p}{(\tau p + \beta)\operatorname{sh}(\tau p + 2\lambda) - \beta \operatorname{sh} 2\lambda + k\gamma(p)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы управления задается формулой

$$\mathbf{\Phi}(p) =$$

$$= \frac{(\tau p + \beta)\operatorname{sh}^2 \lambda + \beta \operatorname{sh}^2 2\lambda \operatorname{sh} \tau p - k\gamma(p) p \operatorname{sh} \tau p}{(\tau p + \beta)\operatorname{sh}^2(\tau p + \lambda)}.$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условия $\gamma(0) = 0$ (например, для $\gamma(p) = p$) система управления имеет астатизм 1-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.

2. *Curtain R., Zwart H.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. — New York: Springer-Verlag, 1995. — 698 p.

3. *Luo Z. H., Guo B. Z., Mörgul O.* Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications. — Springer-Verlag: London, 1999. — 410 p.

4. *Бутковский А. Г.* Структурная теория распределенных систем. — М.: Наука, 1977. — 320 с.

5. *Рапопорт Э. Я.* Структурно-параметрический синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — 4.— С. 47—60.

6. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980. — 464 с.

7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.

8. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.— М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. — 508 с.

9. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1991. — 448 с.

10. *Рассудов Л. Н., Мядзель В. Н.* Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. — Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. — 144 с.

Поступила в редакцию 11.04.2007