УДК 517.986

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПАР ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Б. Диденко

Воронежский государственный университет

Получено представление линейных отношений на конечномерных пространствах через упорядоченную пару линейных операторов и найдено необходимое и достаточное условие непустоты резольвентного множества упорядоченной пары линейных операторов.

1. О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X — конечномерное линейное пространство. Любое линейное подпространство $\Gamma \subseteq X \times X$ называется *линейным отношением* на пространстве X. Множество всех линейных отношений на X будем обозначать $LR(X)$. Каждое линейное отношение $\Gamma \in LR(X)$ является графиком некоторого многозначного отображения. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ Γ. Символом $EndX$ будем обозначать множество всех линейных операторов, определенных на всем X. Используемые далее понятия из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) можно найти в монографиях [1, 2] и в статье [3].

Областью определения $D(\Gamma)$ отношения $\Gamma \in LR(X)$ называется множество вида $D(\Gamma) = \{x : \exists y : (x,y) \in \Gamma\}$.

Для отношения $\Gamma \in LR(X)$ и множества $M \subset X$ определим множество вида $\Gamma(M) = \{y : \exists x \in M \cap D(\Gamma), (x,y) \in \Gamma\}$, называемое *образом* множества M. В частности, множество $\Gamma 0$ имеет вид $\Gamma 0 = \{y : (0,y) \in \Gamma\}$.

Отметим, что множества $D(\Gamma)$ и $\Gamma 0$ являются линейными подпространствами из X.

Пусть Γ — произвольное отношение из $LR(X)$. Тогда для любого элемента $x \in D(\Gamma)$ справедливо равенство $\Gamma x = y + \Gamma 0$, где y некоторый элемент из X, такой что $(x,y) \in \Gamma$.

Обратным к линейному отношению $\Gamma \in LR(X)$ называется линейное отношение $\Gamma^{-1} = \{(y,x) \in X \times X : (x,y) \in \Gamma\}$.

Произведением линейных отношений $\Gamma_1, \Gamma_2 \in LR(X)$ называется линейное отношение вида $\Gamma_1\Gamma_2 = \{(x,z) : \exists y \in D(\Gamma_1) : (x,y) \in \Gamma_2, (y,z) \in \Gamma_1\}$.

Пусть Γ произвольное линейное отношение из $LR(X)$. Поскольку $\Gamma 0$ линейное подпространство из X, то найдётся такое подпространство X_Γ, что $X = X_\Gamma \oplus \Gamma 0$.

Определим линейный оператор $A_\Gamma : D(A_\Gamma) \subset X \to X$, с областью определения $D(A_\Gamma) = D(\Gamma)$. Пусть $\Gamma x = y + \Gamma 0$. Поскольку $X = X_\Gamma \oplus \Gamma 0$, то y представим в виде $y = y_\Gamma + y_{\Gamma 0}$, где $y_\Gamma \in X_\Gamma$, $y_{\Gamma 0} \in \Gamma 0$. Тогда $\Gamma x = y_\Gamma + \Gamma 0$. Положим

$$A_\Gamma x = y_\Gamma .$$

Оператор A_Γ называется *сечением* отношения Γ.

Пусть даны линейные операторы $A, B \in EndX$. Рассмотрим следующие линейные отношения:

$$\Gamma_1 = \{(Ax, Bx), x \in X\} = BA^{-1} \in LR(X), \quad (1)$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) : Ax = By\} = B^{-1}A \in LR(X). \quad (2)$$

Теорема 1. *Для того, чтобы произвольное отношение $\Gamma \in LR(X)$ было представимо в виде (1), для некоторых операторов $A, B \in EndX$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 \le dimX .$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть существуют линейные операторы $A, B \in EndX$ такие, что Γ представимо в виде (1). Тогда верны равенства $D(\Gamma) = ImA$, $\Gamma 0 = BKerA$. Отсюда следует следующая оценка: $dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 = dimImA + dimBKerA \le dimImA + dimKerA = dimX$. Необходимость доказана.

Достаточность. Поскольку $D(\Gamma)$ линейное подпространство из X, то найдётся такое подпространство X_1, что $X = X_1 \oplus D(\Gamma)$. Из неравенства $dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 \le dimX$ следует, что $dimX_1 \ge dim\Gamma 0$, а значит существует такой линейный оператор $C : X_1 \to \Gamma 0$, что $CX_1 = \Gamma 0$. Определим линейный оператор B следующим образом: $Bx = A_\Gamma x$ для любого элемента $x \in D(\Gamma)$, $Bx = Cx$ для любого элемента $x \in X_1$. В качестве оператора A возьмем проектор: $Ax = x$ для любого элемента $x \in D(\Gamma)$, $Ax = 0$ для любого элемента $x \in X_1$. Тогда для любого $x \in D(\Gamma) = ImA = D(BA^{-1})$ выполняется равенство $BA^{-1}x = B(x + X_1) = A_\Gamma x + C(X_1) = A_\Gamma x + \Gamma 0 = \Gamma x$. Отсюда следует, что $\Gamma = BA^{-1}$.

Теорема 2. *Для того, чтобы произвольное отношение $\Gamma \in LR(X)$ было представимо в виде (2), для некоторых операторов $A, B \in EndX$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 \geq dimX.$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть существуют линейные операторы $A, B \in EndX$ такие, что Γ представимо в виде (2). Тогда верны равенства $D(\Gamma) = A^{-1}(ImB)$, $\Gamma 0 = KerB$. Достаточно показать, что $dimD(\Gamma) = dimA^{-1}(ImB) \geq dimImB$. Через X_1 обозначим пространство $X_1 = ImB \cap ImA = L(e_1,..,e_k)$, где $L(e_1,..,e_k)$ — линейная оболочка натянутая на линейно независимые векторы $e_1,..,e_k$ из ImB. Пусть образ ImB представим в виде $ImB = L(e_1,..,e_k, z_1,..,z_p)$, где $L(e_1,..,e_k, z_1,..,z_p)$ — линейная оболочка, натянутая на линейно независимые векторы $e_1,..,e_k, z_1,..,z_p$. Поскольку $ImA \cap L(z_1,..,z_p) = \{0\}$, то отсюда получим, что $dimKerA \geq p$. Заметим, что область определения $D(\Gamma)$ представима в виде $D(\Gamma) = A^{-1}ImB = A^{-1}X_1 = X_2 \oplus KerA$, причем $dimX_1 = dimX_2$. Тогда $dimD(\Gamma) = dimX_2 + dimKerA = dimX_1 + dimKerA \geq k + p = dimImB$. Необходимость показана.

Достаточность. Поскольку $D(\Gamma)$ линейное подпространство из X, то найдётся такое подпространство X_3, что $X = X_3 \oplus D(\Gamma)$. Из неравенства $dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 \geq dimX$ следует, что $dimX_3 \leq dim\Gamma 0$, а значит существует такой линейный оператор $C : X_3 \to \Gamma 0$, что $KerC = \{0\}$. Определим линейный оператор A следующим образом: $Ax = A_\Gamma x$ для любого элемента $x \in D(\Gamma)$, $Ax = Cx$ для любого элемента $x \in X_3$. В качестве оператора B возьмем проектор: $Bx = x$ для любого элемента $x \in X_\Gamma$, $Bx = 0$ для любого элемента $x \in \Gamma 0$. Для любого $x \in D(\Gamma)$ выполняется $Bx = A_\Gamma x \in X_\Gamma = ImB$, причем $B^{-1}Ax = Ax + KerB = A_\Gamma x + \Gamma 0 = \Gamma x$. Для всех ненулевых элементов $x \in X_3$ выполняется $Ax = Cx \overline{\in} ImB$. Отсюда получаем, что $D(\Gamma) = D(B^{-1}A)$, а следовательно $\Gamma = B^{-1}A$.

Следствие 1. *Для любого отношения $\Gamma \in LR(X)$ существуют операторы $A, B \in EndX$ такие, что выполнено одно из представлений (1) или (2).*

Замечание 1. *Если выполнено условие утверждения (1), то оператор A можно выбрать проектором на $D(\Gamma)$, а если утверждения (2), то оператор B — проектором с ядром $KerB = \Gamma 0$. Так построенные представления для Γ назовем каноническими (хотя они определяются неоднозначно).*

2. ОБ УСЛОВИИ НЕПУСТОТЫ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО МНОЖЕСТВА УПОРЯДОЧЕННОЙ ПАРЫ ОПЕРАТОРОВ

Пусть даны два линейных оператора A, B из $EndX$. Далее символом (A, B) будем обозначать упорядоченную пару линейных операторов.

К *резольвентному множеству* $\rho(A, B)$ упорядоченной пары операторов (A, B), где A, B из $EndX$, отнесем все числа $\lambda \neq 0$ из $\mathbb{K}$, для которых оператор $A - \lambda B$ обратим. Множество $\sigma(A, B) = \mathbb{K} \setminus \rho(A, B)$ назовем *спектром этой пары*.

Определение 1. *Пусть $e_1,..,e_n$ — произвольный базис в пространстве X. Рассмотрим упорядоченную пару линейных операторов (A, B), где $A, B \in EndX$. Через $S_{e_1,..,e_n}(A, B)$ обозначим набор векторов, состоящий из максимального числа линейно независимых векторов из набора $Ae_1,..,Ae_n, Be_1,..,Be_n$, такой, что, если вектор Ae_i попал в набор, то Be_i в него не вошел. Число векторов, вошедших в $S_{e_1,..,e_n}(A, B)$, назовем сбалансированным рангом упорядоченной пары (A, B) относительно выбранного базиса $e_1,..,e_n$ и будем обозначать $Srang_{e_1,..,e_n}(A, B)$.*

В следующем примере мы покажем, что сбалансированный ранг зависит от выбора базиса.

Пример 1. *Пусть X — двумерное линейное пространство с базисом e_1, e_2. Рассмотрим два оператора $A, B \in EndX$, определенных по правилу: $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1$, $Be_1 = e_2$, $Be_2 = e_2$. Очевидно, что в качестве $S_{e_1,e_2}(A, B)$ можно взять набор Ae_1, Be_2, а значит $Srang_{e_1,e_2}(A, B) = 2$.*

Теперь в качестве базиса в X возьмем набор e_1', e_2', где $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 - e_2$. Тогда $Ae_1' = e_1$, $Ae_2' = 0$, $Be_1' = e_2$, $Be_2' = 0$. Очевидно, что $Srang_{e_1',e_2'} = 1$. Таким образом мы показали, что сбалансированный ранг зависит от выбора базиса.

Теорема 3. *Пусть A, B из $EndX$. Для того, чтобы резольвентное множество упорядоченной пары (A, B) было непусто, необходимо и достаточно, чтобы сбалансированный ранг упорядоченной пары был равен размерности пространства X при любом выборе базиса.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим противное. Пусть резольвентное множество $\rho(A,B)$ непусто, и в тоже время существует базис $e_1,..,e_n$ в X такой, что $Srang_{e_1,..,e_n}(A,B)=k$, $k<n$, где $n=dimX$. Возможны два случая :

Случай 1. $rang(A,B)<n$. Тогда, т.к. $Im(A-\lambda B)\in$ $\in L(Ae_1,..,Ae_n,Be_1,..,Be_n)$, то $Im(A-\lambda B)\neq X$ для любого $\lambda\in\mathbb{K}$, а значит $\rho(A,B)$ пусто. Мы пришли к противоречию.

Случай 2. $rang(A,B)=n$. Тогда можно из векторов $Ae_1,..,Ae_n,Be_1,..,Be_n$ составить базис в X. Для определенности будем считать, что в качестве набора $S_{e_1,..,e_n}(A,B)$ можно взять набор $S_{e_1,...,e_n}(A,B)=\{Ae_1,..,Ae_p,Be_{p+1},..,Be_k\}$, а в качестве базиса можно взять набор $E=\{Ae_1,..,Ae_p,$ $Be_{p+1},..,Be_k,Be_1,..,Be_q,Ae_{p+1},..,Ae_r\}$.

Через $\tilde{S}$ обозначим набор $\tilde{S}=\{Be_1,..,Be_q,$ $Ae_1,..,Ae_q,Be_{p+1},..,Be_r,Ae_{p+1},..,Ae_r\}$. Через S_1 обозначим набор $S_1=\{Ae_{k+1},..,Ae_n,Be_{k+1},..,Be_n\}$. Покажем, что в разложении любого вектора из S_1 по базису E нет ненулевых коэффициентов при векторах из $\tilde{S}$. Рассмотрим вектор Ae_m, $m>k$. По определению набора $S_{e_1,...,e_n}(A,B)$ элемент Ae_m раскладывается по векторам из него. С другой стороны, вместо набора $S_{e_1,...,e_n}(A,B)$ можно взять набор, составленный из элементов из $S_{e_1,..,e_n}(A,B)$, заменив в нем вектора, входящие в набор $\tilde{S}$, на вектора, образующие с ними пару, т.е. набор $\hat{S}_{e_1,..,e_n}=\{Be_1,..,Be_q,Ae_{q+1},..,$ $Ae_p,Ae_{p+1},..,Ae_r,Be_{r+1},..,Be_k\}$. В силу единственности разложения вектора Ae_m по базису E получаем, что в его разложении нет ненулевых коэффициентов при векторах из $\tilde{S}$. Аналогичное утверждение справедливо и для любого вектора $Be_m, m>k$.

Обозначим через E_1 набор векторов из E, по которым раскладывается вектора из S_1. Пусть $E_1=\{Ae_{q+1},..,Ae_{q_1},Be_{r+1},..,Be_{r_1}\}$. Через $\overline{E}_1$ обозначим набор векторов, составляющих пару с векторами из E_1, то есть набор $\overline{E}_1=\{Be_{q+1},..,Be_{q_1},Ae_{r+1},..,Ae_{r_1}\}$. Покажем, что для любого вектора из $\overline{E}_1$ в его разложении по базису E нет ненулевых коэффициентов при векторах из $\tilde{S}$.

Предположим противное. Пусть в разложении вектора Be_{q+1} по базису E есть ненулевой коэффициент хотя бы при одном векторе из $\tilde{S}$. Для определенности будем считать, что это вектор Ae_1. По построению набора E_1 существует вектор из S_1, такой что в его разложении по базису E есть ненулевой коэффициент при векторе Ae_{q+1}. Для определенности будем считать, что это вектор Ae_{k+1}. Тогда набор, полученный из $S_{e_1,...,e_n}(A,B)$ удалением векторов Ae_{q+1}, Ae_1 и добавлением векторов Be_1, Be_{q+1}, Ae_{k+1}, будет состоять из $k+1$ линейно независимых векторов, что противоречит определению набора $S_{e_1,...,e_n}$. Таким образом мы пришли к противоречию. Следовательно мы доказали, что для любого вектора из $\overline{E}_1$ в его разложении по базису E нет ненулевых коэффициентов при векторах из $\tilde{S}$.

Аналогично рассуждая, в силу конечномерности пространства X существует такое натуральное число l, что для любого вектора из наборов S_1, E_1,..., E_l, $\overline{E_1}$,..., $\overline{E_l}$ в его разложении по базису E нет ненулевых коэффициентов при векторах из $\tilde{S}$ и, кроме того, раскладывается по векторам из E_1,..., E_l, где E_s — набор, состоящий из векторов, по которым раскладываются вектора из $\overline{E_{s-1}}$, кроме тех векторов, которые вошли в наборы $E_1,..,E_{s-1}$, $\forall s=2,..,l$. Отсюда следует, что среди векторов $(A-\lambda B)e_i$, $i=1,..,n$ линейно независимых будет меньше чем n для любого числа $\lambda\in\mathbb{K}$, а значит резольвентное множество $\rho(A,B)$ пусто. Мы пришли к противоречию.

Достаточность. Пусть сбалансированный ранг упорядоченной пары (A,B) равен n при любом выборе базиса. Рассмотрим линейное отношение вида $\Gamma=A^{-1}B$. Через m обозначим такое натуральное число, что $\Gamma^{m-1}0\neq\Gamma^m 0$, $\Gamma^m 0=\Gamma^{m+1}0$. Тогда пространство X можно разложить в прямую сумму вида $X=E_1\oplus...\oplus E_m$ $\oplus X_1$, где $E_1=\Gamma 0$, $E_1\oplus E_2=\Gamma^2 0$, $E_1\oplus...\oplus E_m=$ $=\Gamma^m 0$. Выберем базис в X следующим образом: $e_1^1,..,e_{k_1}^1$ — базис в E_1, $e_1^2,..,e_{k_2}^2$ — базис в E_2,.., $e_1^m,..,e_{k_m}^m$ — базис в E_m, $e_1,..,e_k$ — базис в X_1.

Заметим, что так как $E_1=\Gamma 0=A^{-1}B0=KerA$, то $Ae_i^1=0$ для любого $i=1,..,k_1$. Поскольку по предположению $Srang_{e_1^1,...,e_k}(A,B)=n$, то вектора Be_i^1 обязательно должны войти в набор $S_{e_1^1,...,e_k}(A,B)$ для любого $i=1,..,k_1$.

Так как $E_2=\Gamma^2 0=A^{-1}BKerA=\{x: Ax\in$ $\in BKerA\}$, то $Ae_i^2\in L(Be_1^1,..,Be_{k_1}^1)$, а значит в $S_{e_1^1,...,e_k}(A,B)$ обязательно должны войти вектора Be_i^2 для любого $i=1,..,k_2$. Аналогично рассуждая, можно показать, что Be_i^j обязательно должны войти в набор $S_{e_1^1,...,e_k}$ для любого $i=1,..,k_j$, $j=1,..,m$.

Отметим, что в силу того, что $\Gamma^m 0=\Gamma^{m+1}0$, вектора $Be_1^1,..,Be_{k_1}^1,..,Be_1^m,..,Be_{k_m}^m$, $Ae_1,..,Ae_k$ должны образовывать базис. Рассмотрим разложение вектора Be_p по этому базису : $Be_p = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^p Ae_i + \sum_{i,j} \gamma_{ji}^p Be_i^j$, $p = 1,..,k$. Рассмотрим два оператора: $I' : L(Ae_1,..,Ae_k) \to \to L(Ae_1,..,Ae_k)$, $I'x = x \quad \forall x \in L(Ae_1,..,Ae_k)$ и $B' : L(Ae_1,..,Ae_k) \to L(Ae_1,..,Ae_k)$, $B'Ae_p = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^p Ae_i$, $\forall p = 1,..k$. Тогда вектора $Be_1^1,..,Be_{k_1}^1,..,Be_1^m,..,$ $Be_{k_m}^m, Ae_1 - \lambda Be_1,..,Ae_k - \lambda Be_k$, при $\lambda \neq 0$, будут образовывать базис тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\lambda} \in \rho(B')$, поскольку $Ae_p - \lambda Be_p =$ $= \frac{1}{\lambda}(\lambda I' - B')Ae_p - \lambda \sum_{i,j} \gamma_{ji}^p Be_i^j$.

Рассмотрим матрицу системы

$$\alpha_1^1(A - \lambda B)e_1^1 + .. + \alpha_{k_1}^1(A - \lambda B)e_{k_1}^1 + ... +$$
$$+\alpha_1^m(A - \lambda B)e_1^m + .. + \alpha_{k_m}^m(A - \lambda B)e_{k_m}^m + ... + :$$
$$+\alpha_1(A - \lambda B)e_1 + ... + \alpha_k(A - \lambda B)e_k = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & & & & & & & . \\ . & & -\lambda & & & & & & . \\ . & & & . & & & & & . \\ . & & & & -\lambda & & & & . \\ . & & & & & . & & & . \\ . & & & & & & 1 & & . \\ & & & & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где строки матрицы соответствуют векторам $Be_1^1,..,Be_{k_1}^1,..,Be_1^m,..,Be_{k_m}^m, Ae_1 - \lambda Be_1, ..., Ae_k - \lambda Be_k$, а столбцы переменным $\alpha_1^1,..,\alpha_{k_1}^1,..,\alpha_1^m,..,\alpha_{k_m}^m$, $\alpha_1,..,\alpha_k$. Отметим, что если $\lambda \neq 0$ и $\frac{1}{\lambda} \overline{\in} \sigma(B')$, то мы получим однородную систему из n уравнений с n переменными, с обратимой матрицей. Такая система имеет только нулевое решение, а значит в этом случае $Im(A - \lambda B) = X$. Так как $\sigma(B')$ конечен, то существует $\lambda \neq 0$ такое, что $Im(A - \lambda B) = X$, а значит λ будет принадлежать резольвентному множеству упорядоченной пары (A, B).

Замечание 2. *Как следует из доказательства теоремы, для проверки на пустоту резольвентного множества упорядоченной пары (A, B), достаточно найти сбалансированный ранг относительно базиса построенного следующим образом.*

Рассмотрим линейное отношение вида $\Gamma = A^{-1}B$. Через m обозначим такое натуральное число, что $\Gamma^{m-1}0 \neq \Gamma^m 0$, $\Gamma^m 0 = \Gamma^{m+1}0$. Тогда пространство X можно разложить в прямую сумму вида $X = E_1 \oplus ... \oplus E_m \oplus X_1$, где $E_1 = \Gamma 0$, $E_1 \oplus E_2 = \Gamma^2 0$, $E_1 \oplus ... \oplus E_m = \Gamma^m 0$. Выберем базис в X следующим образом : $e_1^1,..,e_{k_1}^1$ — базис в E_1, $e_1^2,..,e_{k_2}^2$ — базис в E_2,.., $e_1^m,..,e_{k_m}^m$ — базис в E_m, $e_1,..,e_k$ — базис в X_1.

Тогда, если векторы $Be_1^1,..,Be_{k_1}^1,..,Be_1^m,..,Be_{k_m}^m$ линейно независимы, то резольвентное множество упорядоченной пары (A, B) будет непусто. Если же вектора будут линейно зависимы, то сбалансированный ранг пары (A, B) относительно выбранного базиса будет меньше размерности пространства, а значит резольвентное множество упорядоченной пары (A, B) будет пусто.

Автор выражает благодарность А. Г. Баскакову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Favini A., Yagi A.* Degenerate evolution equations in Banach spaces. New York: M. Dekker, 1998.

2. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

3. *Баскаков А. Г., Чернышов К.* И. Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. Математ. сборник. 2002. Т. 193, 11. С. 3—42.

Поступила в редакцию 22.10.2007