УДК 517.88

О ЧИСЛЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ*

М. С. Денисов

Воронежский государственный университет

Основной результат работы состоит в следующем: если A и B — линейные, непрерывные, самосопряженные операторы, причем $\sigma(A)\cap(-\infty,0)$ и $\sigma(B)\cap(-\infty,0)$ состоят из m и n соответственно, отрицательных собственных значений, с учетом их кратности, при этом $\ker(A)=\ker(B)=\{0\}$ и $n>m\geq 0$, то операторы AB и BA имеют не менее $n-m$ отрицательных собственных значений, с учетом их кратности.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Приведем некоторые определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $\{\mathcal{H},(\cdot,\cdot)\}$ — гильбертово пространство, а $G:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — линейный, самосопряженный, непрерывный оператор, причем $\lambda=0$ не является его собственным значением.

Рассмотрим полуторалинейную форму $[\cdot,\cdot]:=(G\cdot,\cdot)$. Гильбертово пространство $\{\mathcal{H},[\cdot,\cdot]\}$ называется сингулярным G-пространством, если 0 — точка непрерывного спектра оператора G, и регулярным G-пространством, если 0 — регулярная точка оператора G.

В частности, если $\ker(G)=\{\theta\}$ и $\sigma(G)\cap(-\infty,0)$ состоит из κ, с учетом кратностей, собственных значений, то гильбертово пространство $\{\mathcal{H},[\cdot,\cdot]\}$ называется $G^{(\kappa)}$-пространством, а если при этом $G=G^*=G^{-1}$ то гильбертово пространство $\{\mathcal{H},[\cdot,\cdot]\}$ называется пространством Понтрягина и обозначается Π_κ.

Определение 1. *Линейный непрерывный оператор $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ называется G-самосопряженным, если $[Ax,y]=[x,Ay]$ для любого $x,y\in\mathcal{H}$.*

Определение 2. *Линейный непрерывный оператор $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ называется G-диссипативным, если $Im[Ax,x]\geq 0$ для любого $x\in\mathcal{H}$.*

Определение 3. *Вектор x называется положительным или неотрицательным, если $[x,x]>0$ или $[x,x]\geq 0$, отрицательным (неположительным), если выполнено $[x,x]<0$ $([x,x]\leq 0)$, или нейтральным, если $[x,x]=0$. Аналогичным образом, подпространство $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ назовем положительным (неотрицательным), отрицательным (неположительным) или нейтральным, если для любого $x\in\mathcal{L}$ будет верно одно из следующих соотношений: $[x,x]>0$ $([x,x]\geq 0)$, $[x,x]<0$ $([x,x]\leq 0)$ или $[x,x]=0$.*

* Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Напомним хорошо известный факт (см. [1]), который понадобится нам для доказательства вспомогательной теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть $\{\mathcal{H},(\cdot,\cdot)\}$ — гильбертово пространство, а $G:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — линейный непрерывный самосопряженный неотрицательный оператор и $\ker G=\{\theta\}$. Введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_1:=(G\cdot,\cdot)$ и пополним по нему $\mathcal{H}$ до $\tilde{\mathcal{H}}$.*

Тогда G допускает расширение до ограниченного оператора $\tilde{G}:\tilde{\mathcal{H}}\to\mathcal{H}$ и область значения оператора $\tilde{G}$ совпадает с областью значения оператора $G^{\frac{1}{2}}$.

Докажем вспомогательную теорему 1, которая понадобится для доказательства основной теоремы 3.

Теорема 1. *Пусть $B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — линейный непрерывный и диссипативный оператор, а $G:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — линейный непрерывный самосопряженный оператор.*

Если $\lambda=0$ не является собственным значением операторов B и G, а отрицательный спектр оператора G состоит из κ, $0<\kappa<\infty$ собственных значений (с учетом кратностей), то у оператора BG существует κ-мерное G-неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}$, такое, что $Im(\sigma(BG\restriction\mathcal{L}))\geq 0$.

Доказательство проведем аналогично доказательству теоремы 2, следующей ниже.

Теорема 2. *Пусть $B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ и $G:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ линейные непрерывные самосопряженные операторы. Если $\lambda=0$ не является собственным значением операторов B и G, а отрицательный спектр оператора G состоит из κ, $0<\kappa<\infty$ собственных значений (с учетом кратностей), то у оператора BG существует G-неположительное, κ-мерное, инвариантное подпространство $\mathcal{L}$, причем $Im(\sigma(BG\restriction\mathcal{L}))\geq 0$.*

Последний результат (теорема 2) был сообщен Т. Я. Азизовым в докладе [2] .

Доказательство 1. Пусть $G = J|G| = |G|^{-1} G|G|$ — полярное разложение оператора G. Введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_1 := (|G|\cdot,\cdot)$ и пополним $\mathcal{H}$ по нему до гильбертова пространства $\{\tilde{\mathcal{H}},(\cdot,\cdot)_1\}$.

Так как оператор G непрерывен и самосопряжен, то $J = |G|^{-1} G$ — непрерывен, самосопряжен и является изометрическим, как относительно исходного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, так и относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_1$.

Действительно, в первом случае имеем:

$$(Jx,Jy) = (|G|^{-1} Gx, |G|^{-1} Gy) =$$
$$= (|G|^{-2}|G|^2 x,y) = (x,y),$$

причем это равенство выполняется для $x,y \in \mathcal{H}$.

Во втором случае имеем:

$$(Jx,y)_1 = (|G||G|^{-1} Gx,y) = (x,Gy) =$$
$$= (|G|x,|G|^{-1} Gy) = (x,Jy)_1,$$
$$(Jx,Jy)_1 = (|G||G|^{-1} Gx,|G|^{-1} Gy) =$$
$$= (|G|^{-1}|G|^2 x,y) = (x,y)_1,$$

причем эти равенства выполняются для $x,y \in \mathcal{H}$.

Поскольку из последнего равенства следует ограниченность оператора J в $\tilde{\mathcal{H}}$, то он допускает расширение по непрерывности до оператора $\tilde{J}$, являющегося в $\tilde{H}$ унитарным и самосопряженным.

Введем в $\tilde{H}$ индефинитную метрику $[\cdot,\cdot]_1^{\sim} := (\tilde{J}\cdot,\cdot)_1$, и заметим, что для векторов $x,y \in \mathcal{H}$ выполняется равенство: $[x,y]_1^{\sim} = [x,y] := (Gx,y)$. Оператор BG будет G-диссипативным оператором в $G^{(\kappa)}$-пространстве $\{\mathcal{H},[\cdot,\cdot]\}$.

Действительно, поскольку оператор B диссипативный, получим:

$$\operatorname{Im}[BGx,x] = \operatorname{Im}(GBGx,x) = \operatorname{Im}(BGx,Gx) \geq 0.$$

Оператор $A = BG$ допускает расширение по непрерывности до оператора $\tilde{A}$, который является $\tilde{J}$-диссипативным в $\tilde{\mathcal{H}}$ (см.[3, с. 221]).

Так как $\tilde{G} \supset |G|^{-1} G\left|\tilde{G}\right|$, то из леммы 1 и того, что $Ran(G) = Ran(|G|)$ следует, $\tilde{G} = |G|^{-1} G\left|\tilde{G}\right|$, откуда получаем: $Ran(\tilde{G}) \subset \mathcal{H}$. Таким образом, поскольку $\tilde{A} \supset B\tilde{G}$ и оператор $B\tilde{G}$ определен на всем $\tilde{\mathcal{H}}$, получим $\tilde{A} = B\tilde{G}$.

Заметим, что $\ker B = \{\theta\}$ и $\ker G = \{\theta\}$ тогда и $\ker \tilde{A} = \{\theta\}$. Следовательно, все конечномерные инвариантные подпространства оператора $\tilde{A}$ содержатся в $\mathcal{H}$, откуда следует, что конечномерные инвариантные подпространства операторов $\tilde{A}$ и A совпадают.

Поскольку отрицательный спектр оператора G состоит из κ с учетом кратности собственных значений, то пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ с $\tilde{J}$ метрикой является пространством Понтрягина Π_κ, (см. [3, с. 91]). Тогда, (см.[3, с. 212]), оператор $\tilde{A}$ обладает κ-мерным инвариантным $\tilde{J}$-неположительным подпространством $\mathcal{L}$ и при этом $Im(\sigma(\tilde{A}\restriction \mathcal{L})) \geq 0$.

Так как конечномерные инвариантные подпространства операторов $\tilde{A}$ и A совпадают, а на векторах из $\mathcal{H}$ значения $\tilde{J}$-метрики и G-метрики одинаковы потому, что для любого $x \in \mathcal{H}$ $(\tilde{J}x,x)_1 = (|G||G|^{-1} Gx,x) = (Gx,x)$, то теорема доказана.

§ 2. ОЦЕНКА ЧИСЛА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Докажем теперь основную теорему данной работы. В процессе доказательства нам понадобится следующее определение.

Определение 4. *Корневым линеалом* $\mathcal{L}_\lambda(A)$ *линейного оператора* A, *отвечающим его собственному значению* λ, *называют подпространство состоящее из векторов* x, *таких, что существует* $l = l(x) \in \mathbb{N}$, *при котором* $(A - \lambda I)^l x = \theta$.

Теорема 3. *Пусть* $\{\mathcal{H},(\cdot,\cdot)\}$ *— гильбертово пространство,* $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *и* $B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *— линейные, непрерывные, самосопряженные операторы. Если выполнены следующие три условия,*

1. $\sigma(B)\cap(-\infty,0)$ *состоит из* n *отрицательных собственных значений, с учетом их кратности и* $\ker(B) = \{\theta\}$.

2. $\sigma(A)\cap(-\infty,0)$ *состоит из* m *отрицательных собственных значений, с учетом их кратности и* $\ker(A) = \{\theta\}$.

3. $n > m \geq 0$

то операторы $AB:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *и* $BA:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *имеют не менее* $n - m$ *отрицательных собственных значений с учетом их кратностей.*

Доказательство 3. Зададим в $\{\mathcal{H},(\cdot,\cdot)\}$ две полуторалинейные формы:

$[\cdot,\cdot]_B := (B\cdot,\cdot)$ и $[\cdot,\cdot]_A := (A\cdot,\cdot)$. Тогда $\{\mathcal{H},[\cdot,\cdot]_B\}$ — $B^{(n)}$-пространство, и $\{\mathcal{H},[\cdot,\cdot]_A\}$ — $A^{(m)}$-пространство (см. [3, гл. 1, § 9]).

Оператор AB в $B^{(n)}$-пространстве является B-самосопряженным, а следовательно и B-диссипативным. Тогда, по теореме 1, он обладает инвариантным B-неположительным подпространством $\mathcal{L}$, причем $dim(\mathcal{L}) = n$ и $Im(\sigma(AB \downharpoonright \mathcal{L})) \geq 0$.

Подпространство $\mathcal{L}$ можно представить в виде прямой B-ортогональной суммы инвариантных подпространств оператора AB:

$$\mathcal{L} = \mathcal{M}_{\lambda_1}[\dot{+}]_B \ldots [\dot{+}]_B \mathcal{M}_{\lambda_k}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{M}_{\lambda_i} = \mathcal{L}_{\lambda_i}(AB) \cap \mathcal{L}$ и $\lambda_i \in \sigma(AB \downharpoonright \mathcal{L})$ для любого $i = 1,\ldots,k$. Здесь и далее символом $\mathcal{L}_{\lambda_i}(AB)$ мы обозначаем корневой линеал, отвечающий собственному значению λ_i оператора AB.

Представление (1) возможно, так как $\mathcal{L}_{\lambda_i}(AB)[\perp]_B \mathcal{L}_{\lambda_j}(AB)$ если $\lambda_i \neq \overline{\lambda_j}$ (см. [3, гл. 2, § 3, с. 144]), и для любого $\lambda_i \in \sigma(AB \downharpoonright \mathcal{L})$ выполняется следующее неравенство: $Im(\lambda_i) \geq 0$. Инвариантность каждого из подпространств $\mathcal{M}_{\lambda_i}$ следует из того, что каждое из них является пересечением инвариантных подпространств оператора AB.

Предположим противное: оператор AB имеет меньше чем $n - m$ отрицательных собственных значений с учетом их кратности. Пусть $\mathcal{L}_{\lambda_p}(AB),\ldots,\mathcal{L}_{\lambda_k}(AB)$ — корневые линеалы, отвечающие отрицательным собственным значениям $\lambda_i \in \sigma(AB \downharpoonright \mathcal{L})$ $i = p,\ldots,k$. Рассматривая разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}_2$, где

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_{\lambda_1}[\dot{+}]_B \ldots [\dot{+}]_B \mathcal{M}_{\lambda_{p-1}},$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_{\lambda_p}[\dot{+}]_B \ldots [\dot{+}]_B \mathcal{M}_{\lambda_k}$$

получим, что $\dim(\mathcal{L}_2) < n - m$. Отсюда следует $\dim(\mathcal{L}_1) = \dim(\mathcal{L}) - \dim(\mathcal{L}_2) > n - (n - m) = m$.

Покажем теперь, что размерность подпространства $B\mathcal{L}_1$ больше чем m. Действительно, из того что $ker(B) = \{\theta\}$ и $\mathcal{L}_1$ —конечномерно, следует, что $\dim(B\mathcal{L}_1) = \dim(\mathcal{L}_1) > m$.

Докажем A-неотрицательность подпространства $B\mathcal{L}_1$ в $A^{(m)}$- пространстве. Для этого сначала рассмотрим те из подпространств $\mathcal{M}_{\lambda_i} \subset \mathcal{L}_1$, для которых $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Все эти $\mathcal{M}_{\lambda_i}$ — B-нейтральные подпространства, это следует из B-нейтральности корневых линеалов $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ отвечающих комплексным собственным значениям, (см. [3, гл. 2, § 3, с. 132]). Возьмем произвольный вектор $x \in \mathcal{M}_{\lambda_i}$ и рассмотрим выражение $[Bx, Bx]_A$. Получим: $[Bx, Bx]_A = (ABx, Bx) = [ABx, x]_B = 0$, это следует из инвариантности подпространства $\mathcal{M}_{\lambda_i}$ относительно оператора AB и его нейтральности в $B^{(n)}$-пространстве. В силу произвольности выбора вектора x получим, что все $B\mathcal{M}_{\lambda_i}$ с $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ нейтральны в $A^{(m)}$-пространстве.

Теперь рассмотрим те подпространства $\mathcal{M}_{\lambda_i} \subset \mathcal{L}_1$, для которых $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$. Возьмем произвольный вектор x, принадлежащий какому-нибудь из этих подпространств $\mathcal{M}_{\lambda_i}$. Поскольку $x \in \mathcal{L}_{\lambda_i}$, то существует натуральное число $l = l(x) \geq 0$, такое, что $(AB - \lambda_i)^l x = \theta$.

Покажем, что в цепочке векторов $x, (AB - \lambda_i)x, \ldots, (AB - \lambda_i)^{l-1}x$ $(l \geq 2)$ вектора $(AB - \lambda_i)x, \ldots, (AB - \lambda_i)^{l-1}x$ — B-нейтральны.

Доказательство проведем по индукции. Сначала докажем B- нейтральность вектора $(AB - \lambda_i)^{l-1}x$. Действительно,

$$[(AB - \lambda_i)^{l-1}x, (AB - \lambda_i)^{l-1}x]_B =$$
$$= [(AB - \lambda_i)^{l-2}x, (AB - \lambda_i)^{l}x] = 0.$$

Предположим, что вектор $(AB - \lambda_i)^i x$ — B-нейтрален, и докажем, что вектор $(AB - \lambda_i)^{i-1}x$ — B-нейтрален. Рассмотрим выражение

$$[(AB - \lambda_{i-1})^i x, (AB - \lambda_i)^{i-1}].$$

Поскольку подпространство $\mathcal{M}_{\lambda_i}$ — B-неположительно, то можно воспользоваться неравенством Коши—Буняковского (см. [3, гл. 1, § 1]).

$$\left|[(AB - \lambda_{i-1})^i x, (AB - \lambda_i)^{i-1}]\right|^2 =$$
$$= \left|[(AB - \lambda_i)^i x, (AB - \lambda_i)^{i-2}]\right|^2 \leq$$
$$\leq [(AB - \lambda_i)^i x, (AB - \lambda_i)^i] \times$$
$$\times [(AB - \lambda_i)^{i-2}x, (AB - \lambda_i)^{i-2}] = 0.$$

Последнее равенство следует из B-нейтральности вектора $(AB - \lambda_i)^i x$. Таким образом, получим:

$$[(AB - \lambda_{i-1})^i x, (AB - \lambda_i)^{i-1}] =$$
$$= [(AB - \lambda_i)^i x, (AB - \lambda_i)^{i-2}] = 0.$$

Докажем A-неположительность подпространств $B\mathcal{M}_{\lambda_i} \subset B\mathcal{L}_1$. Возьмем произвольный вектор $x \in \mathcal{M}_{\lambda_i}$ и рассмотрим вектор Bx:

$$[Bx, Bx]_A = (ABx, Bx) = [ABx, x]_B =$$
$$= [\lambda_i x + (AB - \lambda_i x), x]_B =$$
$$= \lambda_i [x, x]_B + [(AB - \lambda_i x), x]_B = \lambda_i [x, x]_B \leq 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\lambda_i > 0$, а $[x, x]_B \leq 0$.

Заметим, что для любых $\mathcal{M}_{\lambda_i} \subset \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{M}_{\lambda_j} \subset \mathcal{L}_1$, при $i \neq j$, верно, что $B\mathcal{M}_{\lambda_i}[\perp]_A B\mathcal{M}_{\lambda_j}$. Возьмем произвольные векторы $x \in \mathcal{M}_{\lambda_i}$ и $y \in \mathcal{M}_{\lambda_j}$ и рассмотрим векторы Bx и By:

$$[Bx, By]_A = (ABx, By) = [ABx, y]_B = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что $\mathcal{M}_{\lambda_i}$ инвариантно относительно AB и $\mathcal{M}_{\lambda_i}[\perp]_B \mathcal{M}_{\lambda_j}$, при $i \neq j$.

Докажем A-неотрицательность подпространства $B\mathcal{L}_1$ в $A^{(m)}$-пространстве. Возьмем произвольный вектор $x \in \mathcal{L}^1$, его можно представить в виде суммы попарно B-ортогональных элементов:

$x = \sum x_i$, где $x_i \in \mathcal{M}_{\lambda_i}$ и $\lambda_i \in \sigma(AB \downharpoonleft \mathcal{L}^1) \subset \mathbb{R}^+$, Тогда $[Bx, Bx]_A = (ABx, Bx) = [ABx, x]_B = [AB\sum x_i, \sum x_i]_B = [\sum ABx_i, \sum x_i]_B = \sum [ABx_i, x_i]_B = \sum \lambda_i [x_i, x_i]_B < 0$, так как для любого $i = 1, \ldots, p$, $[x_i, x_i]_B \le 0$ и $\lambda_i > 0$.

Мы получили, что $B\mathcal{L}_1$ является A-неположительным подпространством и $\dim(B\mathcal{L}_1) > m$, но этого не может быть, поскольку размерность A-неположительного подпространства в $A^{(m)}$-пространстве $\mathcal{H}$ не превосходит m (см.[3, гл. 1, § 9]).

Из полученного противоречия следует, что оператор AB имеет не менее чем $n-m$ отрицательных собственных значений с учетом их кратностей. Тогда оператор BA будет также иметь не менее чем $n-m$ отрицательных собственных значений, с учетом их кратности, так как собственные значения и их кратности для операторов AB и BA совпадают (см.[4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

2. *Azizov T. Ya.* Pontryagin theorem and an analisis of the spectral stability of the solitons // Internetional Conference «Sixth Workshop Operator Theory in Krein Spaces and Operator Polinomials». — Book of abstrakts. — Berlin 2006.

3. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теориии линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986. — 352 с.

4. *Азизов Т.Я.* О спектрах некоторых классов операторов в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. — 1971. — Т.9. — № 3. — С.303 — 310.

Поступила в редакцию 25.09.2007