УДК 517.984.3

ОБ ОЦЕНКАХ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Е. Б. Грибанов

Воронежский государственный университет

В статье получены оценки норм элементов обратных матриц линейных ограниченных операторов, действующих в банаховых пространствах.

§ 1. ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Пусть X, Y — бесконечномерные комплексные банаховы пространства, $Hom\,(X,Y)$ — банахово пространство ограниченных операторов, действующих из X в Y, $(P_n)_{n\geq 0}$, $(Q_n)_{n\geq 0}$ — дизъюнктные последовательности проекторов из $End\,X = Hom\,(X,X)$ и $End\,Y = Hom\,(Y,Y)$ соответственно.

В дальнейшем будем предполагать, что системы проекторов $(P_n)_{n\geq 0}$, $(Q_n)_{n\geq 0}$ удовлетворяют следующим условиям:

Предположение 1. Имеют место равенства:

$$C(P) = \sup_{\alpha_k \in T}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k P_k\right\| = 1,$$

$$C(Q) = \sup_{\alpha_k \in T}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k Q_k\right\| = 1,$$

где $\mathbf{T} = \{\alpha \in \mathbf{C} : |\alpha| = 1\}$.

Предположение 2. Для любого оператора A из $Hom\,(X,Y)$ и любых конечных подмножеств σ_1, σ_2, Δ_1, Δ_2 из $\mathbf{N}\cup\{0\}$, удовлетворяющих условиям $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, выполнено равенство:

$$\|Q(\sigma_1)AP(\Delta_1) + Q(\sigma_2)AP(\Delta_2)\| = \\ = \max\left\{\|Q(\sigma_1)AP(\Delta_1)\|, \|Q(\sigma_2)AP(\Delta_2)\|\right\},$$

где под $P(\sigma), Q(\sigma), \sigma \subset \mathbf{N}\cup\{0\}$ понимаются соответственно суммы $\sum_{i\in\sigma} P_i, \sum_{i\in\sigma} Q_i$.

В статье [1] было доказано, что если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} P_k x$ и $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k x$ безусловно сходятся соответственно к x и к y, то оператору $A \in Hom\,(X,Y)$ можно поставить в соответствие бесконечномерную матрицу $A = (A_{ij}), i, j \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, составленную из операторных блоков $A_{ij} = Q_i A P_j \in Hom\,(X,Y)$. С помощью функции $d_A(k) = \sup_{i-j=k}\|A_{ij}\|, k \in \mathbf{Z}$ выделено несколько классов операторов с заданным законом убывания элементов от главной диагонали. Для этих классов доказана замкнутость относительно операции взятия обратного, а также приведены оценки убывания элементов обратных матриц.

В данной статье выделены классы операторов из $Hom\,(X,Y)$, для которых эти утверждения и оценки верны даже тогда, когда условие безусловной сходимости рядов $\sum_{k=0}^{\infty} P_k x$ и $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k x$ соответсвенно к x и к y не выполнено.

Рассмотрим непрерывно обратимый оператор $A \in Hom\,(X,Y)$, удовлетворяющий условию:

$$\|A\Psi_l - \widetilde{\Psi}_l A\| \to 0 \text{ при } l \to \infty, \qquad (1)$$

где последовательности операторов $(\Psi_l)_{l=1}^{\infty} \subset End\,X$ и $(\widetilde{\Psi}_l)_{l=1}^{\infty} \subset End\,Y$ определяются с помощью функций $\psi_l : \mathbf{N}\cup\{0\} \to \mathbf{R}, l \in \mathbf{N}$,

$$\psi_l(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{l}, k \leq l \\ 0, k > l \end{cases}$$

формулами

$$\Psi_l x = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_l(k)P_k x = \sum_{k=0}^{l-1}\left(1-\frac{k}{l}\right)P_k x, x \in X, \quad (2)$$

$$\widetilde{\Psi}_l y = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_l(k)Q_k y = \sum_{k=0}^{l-1}\left(1-\frac{k}{l}\right)Q_k y, y \in Y. \quad (3)$$

Замечание 1. Если обратимый оператор $A \in Hom\,(X,Y)$ удовлетворяет условию (1), то подобным же свойством обладает обратный оператор $A^{-1} \in Hom\,(Y,X)$:

$$\|A^{-1}\widetilde{\Psi}_l - \Psi_l A^{-1}\| \to 0 \text{ при } l \to \infty. \qquad (4)$$

Действительно, по условию последовательность операторов $(A\Psi_l - \widetilde{\Psi}_l A)_{l=1}^{\infty}$ сходится по норме к нулевому оператору 0. Применив к ее элементам справа и слева оператор A^{-1}, получим соотношения:

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00131.

$$A\Psi_l - \widetilde{\Psi}_l A \to 0,$$
$$A^{-1}A\Psi_l A^{-1} - A^{-1}\widetilde{\Psi}_l A A^{-1} \to 0,$$
$$\Psi_l A^{-1} - A^{-1}\widetilde{\Psi}_l \to 0, l \to \infty,$$

откуда и следует сходимость (4).

В пространствах X, Y выделим подпространства

$$X_0 = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : \text{ряд} \sum_{k=0}^{\infty} P_k x \text{ безусловно} \\ \text{сходится к } x \end{array} \right\},$$

$$Y_0 = \left\{ \begin{array}{l} y \in Y : \text{ряд} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k y \text{ безусловно} \\ \text{сходится к } y \end{array} \right\}.$$

Лемма 1. Подпространства X_0, Y_0 замкнуты.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X_0$, сходящуюся к вектору x_0. Требуется показать, что $x_0 \in X_0$, то есть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k x_0$ безусловно сходится к x_0.

Для любого $n \in \mathbf{N}$ имеют место следующие соотношения:

$$\left\| x_0 - \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_0 \right\| =$$
$$= \left\| x_0 - x_n + x_n - \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_n + \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_n - \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_0 \right\| \le$$
$$\le \| x_0 - x_n \| + \left\| \sum_{k=0}^{\infty} P_k (x_0 - x_n) \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_n - x_n \right\|.$$

В силу сходимости последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ к x_0, ограниченности оператора $\sum_{k=0}^{\infty} P_k$ (предположение 1), а также сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} P_k x_n$ к x_n правая часть последнего неравенства для достаточно больших n меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$. Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k x_0$ сходится по норме к x_0, а так как система проекторов $(P_n)_{n \ge 0}$ удовлетворяет предположению 1, то данный ряд сходится к x_0 безусловно.

Таким образом, вектор x_0 принадлежит пространству X_0, а значит, оно замкнуто.

Аналогичные рассуждения верны и для пространства Y_0.

Лемма 2. Последовательность $(\Psi_l x)_{l=1}^{\infty}$ сходится к x при $l \to \infty$, $\forall x \in X_0$. Последовательность $(\widetilde{\Psi}_l y)_{l=1}^{\infty}$ сходится к y при $l \to \infty$, $\forall y \in Y_0$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное 2π-периодическое отображение $f : \mathbf{R} \to End\, X$ вида

$$f(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} P_k e^{ikt} x.$$

Согласно теореме Фейера [2] последовательность операторозначных функций $(f_l(t))_{l=1}^{\infty}$, определённых по формуле

$$f_l(t)x = \left(\frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} S_j \right) x = \sum_{k=0}^{l-1} \left(1 - \frac{k}{l} \right) P_k x e^{ikt}, \quad \forall l \in \mathbf{N}.$$

где $S_j x = \sum_{k=0}^{j} P_k x e^{ikt}$, сходится к $f(t)x$ равномерно по t при $l \to \infty$. В частности, при $t = 0$ операторы $f_l(0) = \sum_{k=0}^{l-1} \left(1 - \frac{k}{l}\right) P_k = \Psi_l$ сильно сходятся к оператору $f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$ при $l \to \infty$. Для любого $x \in X_0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k x$ безусловно сходится к x, а значит, $\Psi_l x \to x$ при $l \to \infty$.

Те же рассуждения позволяют получить аналогичный результат для векторов из Y_0.

Возьмём вектор $x_0 \in X_0$ и применим к нему оператор A. В силу непрерывности оператора A и леммы 2 верно равенство $\lim_{l \to \infty} A\Psi_l x_0 = Ax_0$. Согласно условию (1), его можно дополнить следующим образом:

$$Ax_0 = \lim_{l \to \infty} A\Psi_l x_0 = \lim_{l \to \infty} \widetilde{\Psi}_l A x_0.$$

Нетрудно показать, что для любого $l \in \mathbf{N}$ верно включение $Im\, \widetilde{\Psi}_l \subset Y_0$, а значит $\widetilde{\Psi}_l A x_0 \in Y_0$ при любых $x_0 \in X_0$, $l \in \mathbf{N}$. В силу замкнутости подпространства Y_0 (лемма 1) $Ax_0 = \lim_{l \to \infty} \widetilde{\Psi}_l A x_0$ принадлежит Y_0.

Таким образом, оператор A переводит векторы из пространства X_0 в пространство Y_0. Воспользовавшись замечанием 1, можно тем же путём показать, что обратный оператор A^{-1} переводит векторы из пространства Y_0 в X_0.

Рассмотрим операторы $B : X_0 \to Y_0$ и $C : Y_0 \to X_0$ — сужения соответственно операторов A и A^{-1}:

$$Bx = Ax, \quad \forall x \in X_0$$
$$Cy = A^{-1}y, \quad \forall y \in Y_0.$$

Для них выполнены равенства:

$$CB = I,$$
$$BC = I,$$

где I — тождественный оператор, а это означает, что оператор B непрерывно обратим и $B^{-1} = C$.

Лемма 3. Матрицы операторов A и B, состоящие из операторных блоков $A_{ij} = Q_i A P_j$ и $B_{ij} = Q_i B P_j$ совпадают.

Доказательство. Рассмотрим операторный блок $A_{ij} = Q_i A P_j$. Так как $Im\, P_j \subset X_0$, то $AP_j = BP_j$, следовательно, для любых $i, j \geq 0$ $A_{ij} = B_{ij}$.

К оператору $B \in Hom\,(X_0, Y_0)$ мы можем применить результаты статьи [1]. Так например, пусть матрица $\mathcal{B}$ оператора B имеет экспоненциальное убывание диагоналей, то есть найдутся константы $M = M(B) > 0$, $\gamma = \gamma(B) \in (0,1)$, для которых выполняется неравенство $d_B(k) \leq M\gamma^{|k|}$ $\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Тогда диагонали матрицы C оператора $C = B^{-1}$ из $Hom\,(Y_0, X_0)$ также убывают экспоненциально, и имеют место оценки:

$$\left\|C_{ij}\right\| \leq d_C(k) \leq$$

$$\leq \left(2 - \frac{2 - 2\gamma^2}{8\kappa(B) + 3 - 3\gamma^2}\right)\|C\|\left(1 - \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma + 4\kappa(B)}\right)^{|k|},$$

если $k = i - j \neq 0$ и

$$\left\|C_{ii}\right\| \leq d_C(0) \leq \left\|C^{-1}\right\|,$$

где $\kappa(B) = M(B)\gamma(B)\left\|B^{-1}\right\|$.

Из сказанного и леммы 3 следует

Теорема 1. Пусть матрица $\mathcal{A} = (A_{ij})$ обратимого оператора $A \in Hom\,(X, Y)$ такова, что найдутся константы $M = M(A) > 0,$ $\gamma = \gamma(A) \in (0,1),$ для которых выполняется неравенство $d_A(k) \leq M\gamma^{|k|}$ $\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Тогда диагонали матрицы $\mathcal{A}^{-1}$ оператора $A^{-1} \in Hom\,(Y, X)$ убывают экспоненциально, и имеют место оценки:

$$\left\|A_{ij}^{-1}\right\| \leq d_{A^{-1}}(k) \leq$$

$$\leq \left(2 - \frac{2 - 2\gamma^2}{8\kappa(A) + 3 - 3\gamma^2}\right)\left\|A^{-1}\right\|\left(1 - \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma + 4\kappa(A)}\right)^{|k|}, \tag{5}$$

если $k = i - j \neq 0$ и

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\| \leq d_{A^{-1}}(0) \leq \left\|A^{-1}\right\|.$$

§ 2. ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ В ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Перейдём к рассмотрению случая, когда X, Y — вещественные банаховы пространства. Пусть A — непрерывно обратимый оператор из $Hom(X, Y)$, удовлетворяющий условию (1), для дизъюнктных систем проекторов $(P_n)_{n \geq 0}$, $(Q_n)_{n \geq 0}$ соответственно из $End\, X$ и $End\, Y$ выполены предположения 1 и 2.

Рассмотрим комплексификации пространств X, Y — пространства $\mathbb{X} = X \times X$, $\mathbb{Y} = Y \times Y$ с законом внешней композиции $(\alpha + i\beta)(x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \beta x_2, \alpha x_2 \beta x_1)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{X}$. Нормы в пространствах $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ определяются равенствами:

$$\left\|(x_1, x_2)\right\|_{\mathbb{X}} = \max_{\psi \in [0, 2\pi]} \left\|x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi\right\|_X,$$

$$\left\|(y_1, y_2)\right\|_{\mathbb{Y}} = \max_{\psi \in [0, 2\pi]} \left\|y_1 \cos\psi + y_2 \sin\psi\right\|_Y.$$

Комплексификацией оператора $A \in Hom(X, Y)$ будем называть оператор $\mathbb{A} \in Hom(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, действующий по правилу:

$$\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1, Ax_2).$$

Замечание 2. Нетрудно показать, что для оператора $\mathbb{A}$ выполнено условие (1).

Лемма 4. Нормы операторов A и $\mathbb{A}$ равны.

Доказательство. Рассмотрим норму оператора A:

$$\|\mathbb{A}\| = \sup_{\|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{X}} = 1} \left\|\mathbb{A}(x_1, x_2)\right\|_{\mathbb{Y}} =$$

$$= \sup_{\|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{X}} = 1} \max_{\psi \in [0, 2\pi]} \left\|Ax_1 \cos\psi + Ax_2 \sin\psi\right\|_Y =$$

$$= \sup_{\|x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi\|_X = 1} \left\|A(x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi)\right\|_Y =$$

$$= \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \|A\|.$$

Лемма 5 ([3]). Оператор $\mathbb{A}$ является комплексификацией некоторого оператора A тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $\mathbb{A} = \mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{J}$, где — $\mathbb{J}$ оператор взятия комплексного сопряженного, то есть

$$\mathbb{J}(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{X},$$
$$\mathbb{J}(y_1, y_2) = (y_1, -y_2) \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{Y}.$$

Лемма 6. Если оператор $\mathbb{A} \in Hom\,(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является комплексификацией обратимого оператора $A \in Hom\,(X, Y)$, то он обратим, и обратный есть комплексификация оператора $A^{-1} \in Hom\,(Y, X)$.

$$\mathbb{A}^{-1}(x_1, x_2) = \left(A^{-1}x_1, A^{-1}x_2\right).$$

Доказательство. В силу леммы 5 $\mathbb{A} = \mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{J}$ или, что эквивалентно, $\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{J}$. Имеют место соотношения

$$I = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{A}\left(\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J}\right)$$

$$I = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{J}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{J} = \left(\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J}\right)\mathbb{A},$$

то есть оператор $\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J}$ является обратным к оператору $\mathbb{A}$, а значит $\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{A}^{-1}$.

Рассмотрим два равномерно непрерывных 2π-периодических изометрических отображения $P:\mathbf{R}\to EndX$, $Q:\mathbf{R}\to EndY$, определенных формулами

$$P(t)x=\sum_{k=0}^{\infty}P_k x e^{ikt}, x\in X$$

$$Q(t)x=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k x e^{ikt}, y\in Y,$$

а также отображения $\mathbb{P}:\mathbf{R}\to End\mathbb{X}$, $\mathbb{Q}:\mathbf{R}\to End\mathbb{Y}$:

$$\mathbb{P}(t)x=\sum_{k=0}^{\infty}(P_k x_1+iP_k x_2)e^{ikt}, x\in\mathbb{X}$$

$$\mathbb{Q}(t)x=\sum_{k=0}^{\infty}(Q_k x_1+iQ_k x_2)e^{ikt}, y\in\mathbb{Y}.$$

Отметим, что

$$\mathbb{P}(t)\mathbb{J}=\mathbb{J}\mathbb{P}(-t),\quad \mathbb{Q}(t)\mathbb{J}=\mathbb{J}\mathbb{Q}(-t).$$

Оператор $\mathbb{A}_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{Q}(t)\mathbb{A}\mathbb{P}(-t)e^{-ikt}dt$ из $Hom\,(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ является комплексификацией оператора $A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(t)AP(-t)e^{-ikt}dt$ из $Hom\,(X,Y)$:

$$\mathbb{J}\mathbb{A}_k\mathbb{J}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{J}\mathbb{Q}(t)\mathbb{A}\mathbb{P}(-t)e^{-ikt}\mathbb{J}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{J}^2\mathbb{Q}(-t)\mathbb{A}\mathbb{P}(t)e^{-ik(-t)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{Q}(t_1)\mathbb{A}\mathbb{P}(-t_1)e^{-ikt_1}d(-t_1)=\mathbb{A}_k.$$

Оператор $\mathbb{A}$ принадлежит банахову пространству ограниченных операторов, действующих в комплексных банаховых пространствах, а значит к нему применимы результаты, полученные в статье [1].

Например, если обратимый оператор $\mathbb{A}\in Hom\,(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ принадлежит пространству операторов с суммируемыми диагоналями, то обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}\in Hom\,(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ также принадлежит этому пространству. Более того, с помощью функций $\varphi_{\mathbb{A}}:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $\psi_{\mathbb{A}}:\mathbf{R}\to\mathbf{N}$ вида

$$\varphi_{\mathbb{A}}(k)=2\sum_{|j|\ge k+1}d_{\mathbb{A}}(j),$$

$$\psi_{\mathbb{A}}(t)=\min\{k\in\mathbf{N}:\varphi_{\mathbb{A}}(k)\le t\},$$

величину $\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{\mathbb{A}^{-1}}(k)$ можно оценить сверху:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{\mathbb{A}^{-1}}(k)\le 64\kappa(\mathbb{A})\psi_{\mathbb{A}}\left(\frac{1}{(4+32\kappa(\mathbb{A}))\|\mathbb{A}^{-1}\|}\right)\|\mathbb{A}^{-1}\|,$$

где $\kappa(\mathbb{A})=\|\mathbb{A}\|\|\mathbb{A}^{-1}\|$.

Воспользовавшись леммами 4 и 6, этот результат можно распространить на случай вещественных пространств. Для этого введём в рассмотрение функции $\varphi_A:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $\psi_A:\mathbf{R}\to\mathbf{N}$:

$$\varphi_A(k)=2\sum_{|j|\ge k+1}d_A(j),$$

$$\psi_A(t)=\min\{k\in\mathbf{N}:\varphi_A(k)\le t\}.$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть $A\in Hom\,(X,Y)$ — обратимый оператор с суммируемыми диагоналями матрицы, то есть $\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_A(k)<\infty$. Тогда диагонали обратного оператора $A^{-1}\in Hom\,(Y,X)$ суммируемы, причём верна оценка:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{A^{-1}}(k)\le 64\kappa(A)\psi_A\left(\frac{1}{(4+32\kappa(A))\|A^{-1}\|}\right)\|A^{-1}\|, \quad (6)$$

где $\kappa(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. // Известия РАН. Серия: математика. 1997. Т. 61, № 6. С. 1113—1135.

2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

3. *Баскаков А. Г., Загорский А. С.* К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах. // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 1. С. 17—31.

Поступила в редакцию 22.10.2007