УДК 517.9

О ФАКТОРИЗАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ БОРЕЛЕВСКИХ $(2,0)$ -ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих*

Воронежский государственный университет

Доказано, что неотрицательно определенное симметрическое $(2,0)$ -тензорное поле α, измеримое по Борелю, может быть представлено в виде $\alpha = AA^*$ с измеримым по Борелю A, где в случае линейного пространства A — $(1,1)$ -тензорное поле и A^* — сопряженное тензорное поле, а в случае гладкого многообразия A — поле линейных операторов, действующих из некоторого линейного пространства в касательные пространства к многообразию, и A^* — поле сопряженных операторов.

ВВЕДЕНИЕ

Широко известен метод изучения параболических уравнений, основанный на сведении их к стохастическим дифференциальным уравнениям. Для того, чтобы этот метод был применим, необходимо, чтобы симметрическую неотрицательно определенную матрицу α $(2,0)$ -тензорного поля, составленную из коэффициентов при вторых частных производных эллиптического оператора, стоящего в правой части параболического уравнения, можно было представить в виде $\alpha = AA^*$, где A — (не обязательно квадратная) матрица, а A^* — транспонированная матрица. Аналогичное представление необходимо при переходе от уравнений с производными в среднем к обычным стохастическим дифференциальным уравнениям (см. [1, 2]). Следуя [3], мы называем такое представление факторизацией.

Возможность такого представления при различных условиях доказана во многих публикациях. Если поле α положительно определено и гладко (непрерывно, измеримо), то легко показать, что существует поле A, имеющее ту же гладкость, что и α (соответственно, непрерывное, измеримое). То же самое справедливо, если α имеет вырождение постоянного ранга. В общем случае неотрицательно определенного α в [3] показано, что если α достаточно гладко, то существует локально липшицево A, а в [4] получено некоторое условие для существования гладкого A при более высокой гладкости α.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве существования измеримого по Борелю A в общем случае неотрицательно определенного α, если α измеримо по Борелю, как в конечномерном линейном пространстве, так и на конечномерном многообразии.

1. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Обозначим через $S_+(n)$ множество всех положительно определенных симметрических квадратных матриц порядка n, а через $\overline{S}_+(n)$ его замыкание, т.е. множество всех неотрицательно определенных симметрических квадратных матриц порядка $n \times n$. Через $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ обозначим векторное пространство $n \times n$ матриц.

Лемма 1. *Пусть $\alpha(t,x)$ — непрерывное (измеримое, гладкое) по совокупности переменных отображение из $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ в $S_+(n)$. Тогда существует непрерывное (соответственно, измеримое, гладкое) по совокупности переменных отображение $A(t,x)$ из $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такое, что при любых $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.*

Доказательство. Поскольку симметрические матрицы $\alpha(t,x)$ положительно определены, то все их главные (угловые) миноры положительны и, в частности, отличны от нуля. Тогда имеет место разложение Гаусса (см. теорему II.9.3 [5]) $\alpha = \zeta\delta z$, где ζ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, z — верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, δ — диагональная матрица. При этом элементы матриц ζ, δ и z выражаются рационально через элементы α, т.е. указанные матрицы непрерывны (соответственно, измеримы, гладки) по совокупности переменных t, x. Из того, что α — симметрические матрицы, легко увидеть,

* Исследование частично поддержано грантом РФФИ № 07-01-00137.

что $z = \zeta^*$ (z равно транспонированному ζ). Также нетрудно видеть, что в рассматриваемых условиях элементы диагональной матрицы δ положительны. Следовательно корректно определена диагональная матрица $\sqrt{\delta}$, на диагонали которой стоят квадратные корни из соответствующих элементов матрицы δ. Рассмотрим матрицы $A(t,x) = \zeta\sqrt{\delta}$. По построению $A(t,x)$ непрерывно (соответственно, гладко, измеримо) по совокупности переменных t, x и при этом $A(t,x)A^*(t,x) = \zeta(t,x)\delta(t,x)z(t,x) = \alpha(t,x)$. ■

Теорема 2. *Пусть* $\alpha(t,x)$ *— измеримое по Борелю по совокупности переменных отображение из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в* $\bar{S}_+(n)$. *Тогда существует измеримое по Борелю совокупности переменных отображение* $A(t,x)$ *из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в пространство* $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *такое, что при любых* $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$ *выполняется* $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.

Доказательство. Из теоремы II.4.1 [6] следует, что, как и в доказательстве Леммы 1, для каждого (t,x), независимо от того, вырождена матрица $\alpha(t,x)$ или нет, существует нижнетреугольная матрица $\zeta(t,x)$ с единицами по диагонали и диагональная матрица $\delta(t,x)$ такие, что $\alpha(t,x) = \zeta(t,x)\delta(t,x)\zeta^*(t,x)$. Однако если $\alpha(t,x)$ вырождена, то это разложение не единственно. Поэтому, основываясь на рассуждениях из доказательства Леммы 1, нам надо показать, что всегда можно выбрать ветви матриц, которые были бы измеримы по Борелю.

Элементы матрицы $\alpha(t,x)$ мы обозначим $\alpha_{kl}(t,x)$.

Выберем последовательность $\varepsilon_i \to 0$ и рассмотрим последовательность матриц $\alpha_i(t,x) = \alpha(t,x) + \varepsilon_i I$, где I — единичная матрица. Понятно, что $\alpha_i(t,x)$ равномерно по (t,x) сходятся к $\alpha(t,x)$. Элементы этих матриц мы обозначим $\alpha^i_{kl}(t,x)$. При $\varepsilon_i \to 0$ элементы $\alpha^i_{kl}(t,x)$ при $k = l$ стремятся к $\alpha_{kl}(t,x)$, а при $k \neq l$ тождественно равны $\alpha_{kl}(t,x)$.

Так как все $\alpha_i(t,x)$ невырождены, для них выполняется утверждение Леммы 1, т.е. они представимы в виде

$$\alpha_i(t,x) = \zeta_i(t,x)\delta_i(t,x)\zeta_i^*(t,x),$$

где $\zeta_i(t,x)$ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, $\zeta_i^*(t,x)$ — ее сопряженная (транспонированная), т.е. верхнетреугольная с единицами на диагонали, а $\delta_i(t,x)$ — диагональная матрица, на диагонали которой находятся числа, которые мы обозначим $\delta^i_k(t,x)$. Элементы матрицы $\zeta_i(t,x)$ мы обозначим $\zeta^i_{kl}(t,x)$ и сохраним эти же обозначения для равных им элементов транспонированной матрицы $\zeta_i^*(t,x)$.

Непосредственные выкладки показывают, что

$$\begin{gathered}\delta^i_1(t,x) = \alpha^i_{11}(t,x),\\ (\zeta^i_{12}(t,x))^2\delta^i_1(t,x) + \delta^i_2(t,x) = \alpha^i_{22}(t,x),\\ (\zeta^i_{12}(t,x))^2\delta^i_1(t,x) + (\zeta^i_{23}(t,x))^2\delta^i_2(t,x) +\\ +\delta^i_3(t,x) = \alpha^i_{33}(t,x)\end{gathered}$$

и так далее, а элементы k-го столбца симметрической матрицы $\alpha_i(t,x)$ ниже диагонали (и соответственно элементы k-й строки вправо от диагонали) выражаются через элементы матриц $\zeta_i(t,x)$ и $\delta_i(t,x)$ как суммы слагаемых, одним из которых является произведение δ^i_k поочередно с элементами k-го столбца матрицы $\zeta_i(t,x)$, а остальные слагаемые являются произведениями $\delta_p(t,x)$, $p < k$, с несколькими элементами p-го столбца матрицы $\zeta_i(t,x)$.

В частности, в первом столбце ниже диагонали находятся произведения $\delta^i_1(t,x)\zeta^i_{21}(t,x)$, $\delta^i_1(t,x)\zeta^i_{31}(t,x)$ и т.д. Тогда из указанной выше сходимости $\alpha_i(t,x)$ к $\alpha(t,x)$ следует, что на борелевском подмножестве в $\mathbb{R}^n\times[0,T]$, где $\alpha_{11}(t,x) = \lim_{i\to\infty}\delta^i_1(t,x) \neq 0$, все элементы первого столбца матрицы $\zeta_i(t,x)$ имеют пределы, являющиеся борелевскими функциями. Тем самым мы определили значения элементов первого столбца матрицы $\zeta(t,x)$ ниже диагонали на указанном борелевском подмножестве. На его дополнении доопределим указанные элементы нулевым значением. Значение $\delta_1(t,x)$ положим равным $\alpha_{11}(t,x)$.

Тогда корректно определено значение $\delta_2(t,x) = \lim_{i\to\infty}\delta^i_2(t,x) = \alpha_{22}(t,x) - (\zeta_{12}(t,x))^2\delta_1$. После этого очевидно, что на борелевском подмножестве в $\mathbb{R}^n\times[0,T]$, где $\delta_2(t,x) \neq 0$, все элементы второго столбца матрицы $\zeta_i(t,x)$ имеют пределы, являющиеся борелевскими функциями, которые мы доопределим нулем на дополнении до указанного множества. И так далее: на борелевском подмножестве в $\mathbb{R}^n\times[0,T]$, где $\delta_k(t,x) \neq 0$, все элементы k-го столбца матрицы $\zeta_i(t,x)$ имеют пределы, являющиеся борелевскими функциями, которые доопределим нулем на дополнении до указанного множества.

Таким образом, мы построили диагональную матрицу $\delta(t,x)$ и нижнетреугольную матрицу $\zeta(t,x)$ с борелевскими по (t,x) коэффициентами такие, что $\alpha(t,x) = \zeta(t,x)\delta(t,x)\zeta^*(t,x)$.

Отметим, что все главные (угловые) миноры диагональных матриц $\delta_i(t,x)$ равны аналогичным минорам матриц $\alpha_i(t,x)$ (см. [5]), то есть положительны. Отсюда следует, что положительны все функции $\delta_k^i(t,x)$. Следовательно, их поточечные пределы $\delta_k(t,x)$ неотрицательны. Это означает, что корректно определена матрица $\sqrt{\delta(t,x)}$ и искомая матрица $A(t,x)$ имеет вид $A(t,x)=\zeta(t,x)\sqrt{\delta(t,x)}$. ■

2. СЛУЧАЙ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть на гладком многообразии M задано симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле $\alpha(t,m)$.

Здесь под факторизацией мы понимаем представление этого поля в виде $\alpha = AA^*$, где A — поле линейных операторов, действующих из некоторого линейного пространства R^N в касательные пространства к M. В этом случае A^* — поле сопряженных операторов, действующих из кокасательных пространств к M в сопряженное пространство к R^N, которое мы отождествляем с R^N с использованием стандартного скалярного произведения в этом пространстве.

Замечание 3 *Если матрица оператора A вычислена относительно стандартного базиса в R^N и базиса в касательном пространстве, порожденного системой координат некоторой карты, то транспонированная матрица — это матрица сопряженного оператора, вычисленная относительно дуального базиса в кокасательном пространстве и стандартного базиса в R^N. Подчеркнем, что суперпозиция AA^* переводит кокасательные пространства в соответствующие касательные, т.е. паре векторов кокасательного пространства ставится в соответствие пара касательный вектор — кокасательный вектор, при спаривании которых получается число, линейно зависящее от каждого ковектора из указанной пары. Иными словами, AA^* — действительно $(2,0)$-тензорное поле при A, как выше.*

Теорема 4 *Пусть поле α измеримо по Борелю. Тогда существует измеримое по Борелю поле A линейных операторов, действующих из некоторого векторного пространства в касательные пространства к M, такое, что $\alpha = AA^*$.*

Доказательство. Зададим на M произвольную риманову метрику g и обозначим через $\overline{g}$ соответствующий метрический $(2,0)$-тензор. Тогда $(2,0)$-тензорное поле α представимо в виде $\alpha(\cdot,\cdot)=\overline{g}(b(\cdot),\cdot)$, где $b(\cdot)$ — $(1,1)$-тензорное поле самосопряженных линейных операторов, действующих в касательных пространствах к M. В локальных координатах некоторой карты U на M коэффициенты матрицы b выражаются в виде $b_j^i = g_{jk}\alpha^{ik}$, где g_{ij} — коэффициенты римановой метрики, а α^{ij} — коэффициенты тензора α в указанной системе координат. Так как метрический тензор является C^∞-гладким, поле b является измеримым (непрерывным, гладким), если α измеримо (соответственно, непрерывно, гладко).

Поскольку M паракомпактно и удовлетворяет второй аксиоме счетности, на M существует атлас, состоящий из не более, чем счетного числа карт, которые образуют локально конечное покрытие. Обозначим карты этого атласа через U_i, $i=1,2,\dots$.

Зададим в карте U_1 гладкое поле ортонормированных (в римановой метрике g) базисов в касательных пространствах. Относительно указанных базисов матрицы $\overline{b}$ операторов b в касательных пространствах являются симметрическими и неотрицательно определенными. Из сказанного выше следует, что это поле измеримо по Борелю. Используя Теорему 2, представим его в виде $\overline{b} = cc^*$.

Поскольку риманова метрика g — гладкая, вложим по теореме Нэша многообразие M изометрично в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ (см. [8]). Обозначим через P_m оператор ортогонального проектирования пространства R^N на его подпространство T_mM (касательное пространство к M в точке $m \in M$).

Нетрудно видеть, что на карте U_1 поле операторов $A = c\cdot P_m$ является искомым для факторизации поля α.

Проведем аналогичное построение на $U_2 \setminus U_1$, затем на $U_3 \setminus (U_1 \bigcup U_2)$, и так далее. Иными словами, на каждом k-м шаге мы проводим указанную конструкцию на $U_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i\right)$. Нетрудно видеть, что построенное таким образом поле A дает необходимую факторизацию и является измеримым по Борелю, поскольку указанные выше дополнения карт являются борелевскими множествами и на каждом из них поле A измеримо по Борелю. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азарина С.В.* Дифференциальные уравнения и включения с производными в среднем справа в $\mathbb{R}^n$ / С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих // Вестник ВГУ. Серия Физика, Математика. — 2006. — № 2. — С. 138—146.

2. *Azarina S.V.* Differential Inclusions with Mean Derivatives / S. V. Azarina, Yu. E. Gliklikh // Dynamic Systems and Applications. — 2007. — Vol. 16. — № 1. — P. 49—72.

3. *Фрейдлин М.И.* О факторизации неотрицательно определенных матриц / М. И. Фрейдлин // Теория вероятностей и ее применения. 1968. — Т. 13, № 2. — С. 375—378.

4. *Гликлих Ю.Е.* О существовании гладкого квадратного корня из тензорных полей типа (2,0) и (0,2) / Ю. Е. Гликлих, А. Н. Пырков // Труды математического факультета ВГУ, 2006. — Вып. 10. — С. 69—73.

5. *Желобенко, Д.П.* Компактные группы Ли и их представления / Д. П. Желобенко. — М.: Физматлит, 1970. — 554 с.

6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 1967. — 575 с.

7. *Островский А.М.* Решение уравнений и систем уравнений / А. М. Островский.— М.: Изд-во Иностранной литературы, 1963.— 219 с.

8. *Nash J.* The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds / J. Nash // The Annals of Mathematics, 1956. — Vol. 63, № 1. — P. 20—63.

Поступила в редакцию 28.09.2007