*УДК:517.988.6*

# ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

**Б. Д. Гельман**

*Воронежский государственный университет*

Данная статья посвящена приложению теорем о неподвижных точках многозначных отображений к доказательству разрешимости и изучению свойств множества решений задачи Коши для вырожденных дифференциальных уравнений с вполне непрерывной правой частью, у которых вырожденность задается замкнутым сюръективным оператором.

## ВВЕДЕНИЕ

Задачу Коши для уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производных, впервые изучал С. Л. Соболев [1]. С тех пор вырожденные дифференциальные уравнения соболевского типа активно изучались многими авторами (см., например, монографии [2], [3] и статьи [4], [5]). Отметим работы [6] и [7], в которых изучались вырожденные дифференциальные включения.

Данная статья посвящена приложению теорем о существовании и структуре множества неподвижных точек многозначных отображений к изучению разрешимости и свойств множества решений задачи Коши для вырожденных дифференциальных уравнений с компактной правой частью.

## 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЗАМКНУТЫХ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $E_1, E_2$ — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор.

**1.1. Определение.** *Число*

$$\left\|a^{-1}\right\| = \sup_{y \in E_2}\left(\frac{\inf\{\|x\| \mid x \in E_1, a(x) = y\}}{\|y\|}\right)$$

*называется нормой многозначного отображения* $a^{-1}$.

Нетрудно проверить, что $|| a^{-1} || < \infty$.

Изучим многозначное отображение $a^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где

$$a^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid a(x) = y\}.$$

**1.2. Лемма.** *Отображение $a^{-1}$ является липшицевым многозначным отображением с константой Липшица $|| a^{-1} ||$, т.е.*

$$h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) \le || a^{-1} || \, || x_1 - x_2 ||,$$

здесь $h$ — метрика Хаусдорфа[1], порожденная нормой в $E_1$.

**Доказательство.** Пусть $x_1, x_2 \in E_2$, вычислим $h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2))$. Тогда:

$$\begin{aligned} &h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) = \\ &= \inf\{\|z_1 - z_2\| \mid z_1 \in a^{-1}(x_1), z_2 \in a^{-1}(x_2)\} = \\ &= \inf\{\|z_1 - z_2\| \mid z_1 - z_2 \in a^{-1}(x_1 - x_2)\} \le \\ &\le \|a^{-1}\| \|x_1 - x_2\| \, || . \end{aligned}$$

Если подпространство $Ker(a)$ не является дополняемым в пространстве $E_1$, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору $a$, однако имеет место следующее утверждение.

**1.3. Лемма.** *(i) Пусть $y_0$ — произвольная точка из пространства $E_2$, $x_0$ — произвольная точка из множества $a^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа $k$, $|| a^{-1} || < k$, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*

*1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;*

*2) $\|x_0 - q(y)\| \le k\|y_0 - y\|$ для любого $y \in E_2$.*

*(ii) Для любого числа $k$, $|| a^{-1} || < k$, существует нечетное непрерывное отображение $\tilde{q} : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*

*1) $a(\tilde{q}(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;*

*2) $|| \tilde{q}(y) || \le k \, || y ||$ для любого $y \in E_2$.*

**Доказательство.** (i) Пусть $a^{-1} : E_2 \to E_1$ — отображение обратное к $a$. Очевидно, что оно имеет выпуклые замкнутые образы. Так как оно липшицево, то оно является полунепрерывным снизу многозначным отображением. Пусть $k$ — произвольное число, большее $|| a^{-1} ||$. Рассмотрим другое многозначное отображение $\Phi : E_2 \setminus y_0 \to Cv(E_1)$,

$$\Phi(y) = \{x \in E_1 \| \, x - x_0 \, || < k \, || y - y_0 \, || .$$

Покажем, что для любого $y \in (E_2 \setminus y_0)$ пересечение



* Исследование поддержано РФФИ грант № 05-01-00100.

[1] Свойства метрики Хаусдорфа можно посмотреть в [8]

$$F(y) = a^{-1}(y) \cap \Phi(y) \neq \varnothing.$$

Действительно, так как

$$h(a^{-1}(y_0), a^{-1}(y)) \leq \| a^{-1} \| \| y - y_0 \| < k \| y - y_0 \|,$$

то существует точка $x \in a^{-1}(y)$ такая, что $\| x - x_0 \| < k \| y - y_0 \|$. Это и доказывает непустоту $F(y)$.

Так как $\Phi$ является многозначным $U$-отображением (см. [9]), то у многозначного отображения $F$ существует непрерывное сечение $g : E_2 \setminus y_0 \to E_1$, т.е. $g(y) \in F(y)$ для любого $y \in (E_2 \setminus y_0)$. Рассмотрим отображение $q : E_2 \to E_1$,

$$q(y) = \begin{cases} g(y), & \text{если } y \neq y_0; \\ x_0, & \text{если } y = y_0; \end{cases}$$

Так как $\| g(y) - x_0 \| \leq k \| y - y_0 \|$ для любого $y \in E_2 \setminus 0$, то отображение $q$ является непрерывным. Это и доказывает (i).

(ii) Так как $0 \in a^{-1}(0)$, то в силу доказанного, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$ удовлетворяющее условиям:

(1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\| q(y) \| \leq k \| y \|$ для любого $y \in E_2$.

Рассмотрим отображение $\tilde{q} : E_2 \to E_1$, $\tilde{q}(x) = \dfrac{1}{2}(q(x) - q(-x))$. Нетрудно проверить, что это отображение и будет искомым. Лемма доказана.

Если $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор, то естественно определяется отображение $\hat{a} : D(\hat{a}) \subset C_{([a,b],E_1)} \to$ $\to C_{([a,b],E_2)}$ по следующему правилу:

$$\hat{a}(x)(t) = a(x(t)),$$

где $D(\hat{a}) = C_{([a,b],D(a))} \bigcap \hat{a}^{-1}(C_{([a,b],E_2)})$. Очевидно, что $D(\hat{a}) \neq \varnothing$. Изучим свойства отображения $\hat{a}$.

**1.4. Предложение.** *(i) Отображение $\hat{a}$ линейно и замкнуто.*

*(ii) Отображение $\hat{a}$ сюръективно.*

*(iii) $\| \hat{a}^{-1} \| = \| a^{-1} \|$.*

**Доказательство.** (i) Линейность отображения $\hat{a}$ очевидна. Проверим замкнутость. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{a})$ и $\{x_n\} \to x_*$. Пусть последовательность $\{y_n\} \to y_*$, где $y_n = \hat{a}(x_n)$. Тогда для любого $t \in [a,b]$ имеем, $x_n(t) \to x_*(t)$ и $a(x_n(t)) = y_n(t) \to y_*(t)$. Следовательно, в силу замкнутости оператора $a$ получаем, $x_*(t) \in D(a)$ и $a(x_*(t)) = y_*(t)$. Таким образом, $x_* \in D(\hat{a})$ и $\hat{a}(x_*) = y_*$, т.е. $\hat{a}$ является замкнутым оператором.

(ii) Докажем сюръективность оператора $\hat{a}$. Пусть $y \in C_{([a,b],E_2)}$ — произвольная функция. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — произвольное непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 1.3. Пусть функция $x(t) = q(y(t))$. Нетрудно проверить тогда, что $x \in D(\hat{a})$ и $\hat{a}(x) = y$.

(iii) Пусть $k$ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $k > \| a^{-1} \|$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — произвольное непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 1.3. Тогда для любой функции $y \in C_{([a,b],E_2)}$ существует функция $x(t) = q(y(t))$ такая, что $a(x) = y$ и $\| x \| \leq k \| y \|$. Следовательно, $\| \hat{a}^{-1} \| \leq k$. Так как число $k$ бралось произвольно, то $\| \hat{a}^{-1} \| \leq \| a^{-1} \|$.

Докажем теперь неравенство в обратную сторону. Пусть $k > \| \hat{a}^{-1} \|$, рассмотрим произвольную точку $y_0 \in E_2$ и функцию $\breve{y}$, $\breve{y}(t) = y_0$ для любого $t \in [a,b]$. Тогда существует функция $x \in \hat{a}^{-1}(\breve{y})$ такая, что $\| x \| \leq k \| \breve{y} \|$. Следовательно, $\| x(t) \| \leq k \| y_0 \|$ для любого $t \in [a,b]$. Пусть $x_0 = x(t_0) \in E_1$, где $t_0$ некоторая точка из $[a,b]$. Тогда, $a(x_0) = y_0$ и $\| x_0 \| \leq k \| y_0 \|$. Теперь требуемое неравенство вытекает из произвольности числа $k$.

## 2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе нас будет интересовать топологическая размерность dim множества решений одного класса операторных уравнений. Свойства размерности dim содержатся, например, в [10].

Пусть $E$ — банахово пространство, $U$ — ограниченное открытое множество в $E$, $F : \overline{U} \to E$ — многозначное отображение. Обозначим $N(F, \overline{U})$ множество неподвижных точек $F$, т.е. $N(F, \overline{U}) = \{x \in \overline{U} \mid x \in F(x)\}$.

В работе [11] была доказана следующая теорема.

**2.1. Теорема.** *Пусть $F : \overline{U} \to E$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными образами, удовлетворяющее следующим условиям:*

*1) $F$ — непрерывное компактное многозначное отображение,*

*2) отображение $F$ не имеет неподвижных точек на $\partial U$.*

*Если:*

*а) топологическая степень $\gamma(i - F, \overline{U}) \neq 0$,*

*б) $dim(F(x)) \geq n$ для любого $x \in U$,* *то* $dim(N(F,\overline{U})) \geq n$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $E$ — банахово пространство, $E_0 = E \times E^n$, где $E^n$ — $n$-мерное пространство. Пусть $U$ — ограниченное открытое множество в пространстве $E_0$, а $f : \overline{U} \to E$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим уравнение

$$f(x,l) = x.$$

Решением этого уравнения назовем такую пару $(x_*, l_*) \in \overline{U}$, которая обращает это уравнение в тождество. Обозначим $N(f,\overline{U}) \subset \overline{U}$ множество решений этого уравнения.

Пусть $U_0 = U \cap (E \times 0) \neq \emptyset$, $f_0$ — сужение отображения $f$ на $U_0$, т.е. $f_0(x) = f(x,0)$ для любой точки $(x,0) \in U_0$. Будем отождествлять множество $U_0$ с соответствующим множеством в $E$.

**2.2. Лемма.** *Если топологическая степень* $\gamma(i - f_0, \overline{U_0}) \neq 0$, *то множество* $N(f,\overline{U}) \neq \emptyset$ *и* $dim(N(f,\overline{U}) \geq n$.

**Доказательство.** Рассмотрим многозначное отображение $F : \overline{U} \to E_0$, определенное условием: $F(x,l) = f(x,l) \times B_r[0]$, где $B_r[0] \subset E^n$ — замкнутый шар радиуса $r$ с центром в нуле.

Покажем, что существует такое положительное число $r$, что многозначное отображение $F$ не имеет неподвижных точек на $\partial U$. Предположим противное, тогда для любого натурального $k$ отображение $F_k$, $F_k(x,l) = f(x,l) \times B_{\frac{1}{k}}[0]$ имеет неподвижную точку $(x_k, l_k) \in \partial U$. В силу полной непрерывности отображения $f$, без ограничения общности можно считать, что последовательность $x_k \to x_0$. Так как множество $\partial U$ является замкнутым, то $x_0 = f(x_0, 0) \in \partial U_0$, что противоречит предположению.

Пусть положительное число $r$ такое, что многозначное отображение $F$ не имеет неподвижных точек на $\partial U$. Тогда определена топологическая степень векторного поля $\Psi = i - F$ на области $U$. Покажем, что $\gamma(\Psi, \overline{U}) \neq 0$.

Действительно, отображение $f_1(x,l) = (f(x,l), 0)$ является непрерывным сечением многозначного отображения $F$, следовательно, $\gamma(\Psi, \overline{U}) = \gamma(i - f_1, \overline{U})$. С другой стороны, отображение $f_1$ действует из $\overline{U}$ в подпространство $E$, следовательно, имеем равенство, $\gamma(i - f_1, \overline{U}) = \gamma(i - f_0, \overline{U_0}) \neq 0$. Откуда и следует, что $\gamma(\Psi, \overline{U}) \neq 0$.

Так как многозначное отображение $F$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и $dim(F(x,l)) = n$, то $dim(N(F,\overline{U})) \geq n$.

Так как $N(F,\overline{U}) \subset N(f,\overline{U})$, то, в силу монотонности размерности dim, имеем неравенство:

$$dim(N(f,\overline{U})) \geq N(F,\overline{U}) \geq n.$$

Лемма доказана.

Пусть $E_1, E_2$ — два банаховых пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор, $f : X \subset E_1 \to E_2$ - нелинейное отображение. Рассмотрим следующее уравнение:

$$a(x) = f(x).(1)$$

Обозначим $N(a,f)$ множество решений этого уравнения.

Уравнения такого вида с непрерывным оператором $a$, в случае когда $X = E_1$, рассматривалось в работах [12], [13]. В работе [14] изучалось уравнение (1) с замкнутым оператором $a$ в случае, когда $X$ является сферой в пространстве $E_1$.

Изучим теперь разрешимость и размерность множества решений уравнения (1) на шаре в пространстве $E_1$.

Пусть $x_0 \in E_1$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса $R$ с центром в $x_0$, $f : B_R[x_0] \to E_2$ — вполне непрерывное отображение.

**2.3. Теорема.** *Если существует такое число* $k > \| a^{-1} \|$, *что для любой точки* $x \in B_R[x_0]$ *справедливо неравенство*

$$\| a(x_0) - f(x) \| < \frac{R}{k},$$

*то* $N(a,f) \neq \emptyset$ *и* $dim(N(a,f)) \geq dim(Ker(a))$.

**Доказательство.** Пусть $q : E_2 \to E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $a(q(y) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\| x_0 - q(y) \| \leq k \| a(x_0) - y \|$ для любого $y \in E_2$.

Такое отображение всегда существует в силу леммы 1.3(i). Рассмотрим произвольное число $n \leq dim(Ker(a))$ и $n$-мерное подпространство $E^n \subset Ker(a)$. Пусть непрерывное отображение $p : B_R[x_0] \times E^n \to E_1$, определено условием $p(x,u) = q(f(x)) + u$. Очевидно, что отображение $p$ является вполне непрерывным.

Рассмотрим уравнение $x = p(x,u)$. Нетрудно проверить, что любое решение $(x_*, u_*)$ этого уравнения определяет решение уравнения (1).

Пусть $B_1[0]$ — единичный шар в пространстве $E^n$, обозначим $\overline{U} = B_R[x_0] \times B_1[0]$. Покажем, что топологическая степень векторного поля $\gamma(i - p_0, \overline{U_0}) \neq 0$, где $\overline{U_0} = B_R[x_0]$, а $p_0(x) = q(f(x))$. Для этого заметим, что

$$|| q(f(x)) - x_0 || \leq k|| f(x) - a(x_0) || < R,$$

т.е. $g(B_R[x_0]) \subset U_R(x_0)$. Тогда $\gamma(i - p_0, \overline{U_0}) = 1$. В силу леммы 2.2 получаем, что множество $N(p, \overline{U})$ непусто и имеет топологическую размерность большую или равную $n$. Пусть отображение $\alpha : N(p, \overline{U}) \to N(a, f)$ определено по правилу $\alpha(x, u) = x$. Покажем, что это отображение является иньекцией. Действительно, если $\alpha(x_1, u_1) = \alpha(x_2, u_2)$, то

$$x_1 = x_2 = q(f(x_1)) + u_1 = q(f(x_2)) + u_2.$$

Тогда $u_1 = u_2$, т.е. $(x_1, u_1) = (x_2, u_2)$. Так как множество $N(p, \overline{U})$ является компактом, то $\alpha$ является гомеоморфизмом на свою область значений. Таким образом,

$$dim(N(a, f)) \geq dim(\alpha(N(p, \overline{U}))) =$$
$$= dim(N(p, \overline{U})) \geq n.$$

Так как число $n$ выбиралось произвольно, то $dim(N(a, f)) \geq dim(Ker(a))$. Теорема доказана.

## 3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С КОМПАКТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Пусть $E_1, E_2$ — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $x_0 \in E_1$ — произвольная точка,

$$B_R[x_0] = \{x \in E_1 \,|\, || x - x_0 || \leq R\}$$

— замкнутый шар в пространстве $E_1$, $f : [0, T] \times B_R[x_0] \to E_2$ — непрерывное компактное отображение.

Рассмотрим следующую задачу:

$$a(x'(t)) = f(t, x(t)), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Решением задачи (2), (3) на промежутке $[0, h]$, $0 < h \leq T$, называется непрерывно дифференцируемая функция $x_* : [0, h] \to E_1$ такая, что $a(x_*'(t)) = f(t, x_*(t))$ для любого $t \in [0, h]$ и $x_*(0) = x_0$. Обозначим $\Sigma(x_0, [0, h])$ — множество решений задачи (2), (3) на промежутке $[0, h]$.

Имеет место следующая теорема.

**3.1. Теорема.** *При сделанных предположениях существует $h > 0$ такое, что задача (2),(3) имеет решение на промежутке $[0, h]$. Если $Ker(a) \neq \{0\}$, то топологическая размерность $dim(\Sigma(x_0, [0, h])) = \infty$.*

**Доказательство.** В случае, если $Ker(a) = \{0\}$, то оператор $a$ имеет непрерывный правый обратный оператор и задача (2),(3) эквивалентна задаче

$$x'(t) = a^{-1}(f(t, x(t))),$$
$$x(0) = x_0.$$

Хорошо известно, что такая задача всегда имеет решение.

Рассмотрим теперь случай, когда $Ker(a) \neq \{0\}$. Пусть число $M \geq || f(t, x) ||$ для любой точки $(t, x) \in [0, T] \times B_R[x_0]$. Рассмотрим положительное число

$$h < \frac{R}{|| a^{-1} || M}.$$

Пусть $k$ — произвольное число удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|| a^{-1} || M}{R} < \frac{kM}{R} < \frac{1}{h}.$$

Очевидно, что такое число всегда существует и в этом случае $|| a^{-1} || < k$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — отображение, удовлетворяющее условиям леммы 1.3. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^t q(f(s, x(s)))ds + \int_0^t u(s)ds + x_0, \tag{4}$$

где $t \in [0, h]$, $u = u(t) \in C_{([0,h], Ker a)}$. Нетрудно проверить, что если $(x_*, u_*)$ является решением интегрального уравнения (4), то функция $x_*$ является решением задачи (2),(3) на промежутке $[0, h]$.

Пусть $E^n$ — произвольное $n$-мерное подпространство пространства $C_{([0,h],\, Ker a)}$. Рассмотрим операторное уравнение $x = g(x, u)$, где

$$x \in X = \{y \in C_{([0,h],\, E_1)} \,|\, || x_0 - y(t) || \leq R$$
$$\text{для любого } t \in [0, h]\},$$

$u \in B_1[0] \subset E^n$, а

$$g(x, u)(t) = \int_0^t q(f(s, x(s)))ds + \int_0^t u(s)ds + x_0.$$

Таким образом, отображение

$$g : G = X \times B_1[0] \to C_{([0,h],\, E_1)}$$

и является вполне непрерывным. Очевидно, $G_0 = G \bigcap (E_1 \times 0) = X$ и

$$g_0(x)(t) = g(x, 0)(t) = \int_0^t q(f(s, x(s)))ds + x_0.$$

Тогда

$$|| x_0 - g_0(x)(t) || \leq \int_0^t || q(f(s, x(s))) || ds \leq hkM < R.$$

Таким образом, отображение $g_0$ переводит замкнутый шар $X \subset E_1$ в себя без неподвижных точек на границе. Следовательно, топологическая степень $\gamma(i - g_0, X) = 1$. Тогда, в силу леммы 2.2, $dim(N(g,G)) \geq n$.

Пусть $\tau : N(g,G) \to X$, $\tau(x,u) = x$, — проекция на первую координату. Нетрудно проверить, что $\tau$ является иньективным отображением. Действительно, пусть $(x_1,u_1),(x_2,u_2) \in \in N(g,G)$ и $x_1 = x_2$. Тогда

$$0 = g(x_1,u_1) - g(x_2,u_2) = \int_0^t (u_1(s) - u_2(s))ds,$$

т.е. $u_1(t) = u_2(t)$ для любого $t \in [0,h]$.

В силу полной непрерывности отображения $g$ и компактности шара $B_1[0] \subset E^n$, множество $N(g,G)$ является компактным. Следовательно, $\tau$ является гомеоморфизмом на множество $\tau(N(g,G)) \subset \Sigma(x_0,[0,h])$. Тогда, в силу монотонности размерности $dim$, размерность множества $\Sigma(x_0,[0,h])$ также больше $n$. Так как число $n$ выбиралось произвольно, то $dim(\Sigma(x_0,[0,h])) = \infty$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу Коши для вырожденного дифференциального уравнения заданного в несколько другом виде.

Пусть $E_1, E_2$ — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор, $x_0 \in D(a)$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса $R$ с центром в точке $x_0$, $f : [0,T] \times B_R[x_0] \to E_2$ — непрерывное компактное отображение.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(a(x(t)))' = f(t,x(t)), \tag{5}$$

$$a(x(0)) = a(x_0). \tag{6}$$

Решением задачи (5), (6) на промежутке $[0,h]$, $0 < h \leq T$, называется непрерывная функция $x_* : [0,h] \to D(a) \subset E_1$ такая, что $(ax_*(t))' = f(t,x_*(t))$ для любого $t \in [0,h]$ и $a(x_*(0)) = a(x_0)$. Обозначим $\Sigma(x_0,[0,h])$ — множество решений этой задачи на промежутке $[0,h]$.

Имеет место следующая теорема.

**3.2. Теорема.** *При сделанных предположениях существует $h > 0$ такое, что задача (5), (6) имеет решение на промежутке $[0,h]$.*

Если $Ker(a) \neq \{0\}$, то топологическая размерность

$$dim(\Sigma(x_0,[0,h])) = \infty.$$

**Доказательство.** В случае, если $Ker(a) = \{0\}$, то оператор $a$ имеет непрерывный обратный и задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = a^{-1}(\int_0^t f(s,x(s))ds) + x_0.$$

Нетрудно доказать, что такая задача всегда имеет решение на промежутке $[0,h]$, если

$$0 < h < \frac{R}{\| a^{-1} \| M},$$

где число $M \geq \| f(t,x) \|$ для любой точки $(t,x) \in [0,T] \times B_R[x_0]$.

Изучим теперь случай, когда $Ker(a) \neq \{0\}$. Рассмотрим положительное число $h < \dfrac{R}{\|a^{-1}\| M}$.

Пусть $k$ — произвольное число удовлетворяющее неравенству

$$h < \frac{R}{kM} < \frac{R}{\| a^{-1} \| M}.$$

Очевидно, что такое число всегда существует и в этом случае $\| a^{-1} \| < k$.

Рассмотрим функцию $\overline{x}_0 \in C_{([0,h],E_1)}$, определенную условием: $\overline{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in [0,h]$. Пусть $T_R[\overline{x}_0] \subset C_{([0,h],E_1)}$ — замкнутый шар радиуса $R$ с центром в $\overline{x}_0$. Рассмотрим замкнутый линейный оператор

$$\hat{a} : D(\hat{a}) \subset C_{([0,h],E_1)} \to C_{([0,h],E_2)},$$

построенный по оператору $a$ ( см. предложение 1.4 ), тогда $\| \hat{a}^{-1} \| = \| a^{-1} \|$.

Рассмотрим отображение $g : T_R[\overline{x}_0] \to C_{([0,h],E_2)}$ определенное условием,

$$g(x)(t) = \int_0^t f(s,x(s))ds + a(x_0).$$

Нетрудно проверить, что это отображение является вполне непрерывным. Рассмотрим на шаре $T_R[\overline{x}_0]$ операторное уравнение

$$\hat{a}(x) = g(x),$$

т.е.

$$a(x(t)) = \int_0^t f(s,x(s))ds + a(x_0)$$

для любого $t \in [0,h]$. Нетрудно видеть, что любое решение этого операторного уравнения является решением задачи (5), (6).

Оценим теперь

$$\| \hat{a}(\overline{x}_0) - g(x) \| = \max_{t\in[0,h]} \| \int_0^t f(s,x(s))ds \| \leq hM < \frac{R}{k}.$$

Поскольку выполнены все условия теоремы 2.3, то это доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С.3-50.

2. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces/ N.Y.: Marcel Dekker, 1999.

3. *Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.* Линейные уравнения соболевского типа. Учеб. пособие/ Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 2003.

4. *Зубова С.П., Чернышов К.И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной// Дифференц. уравнения и их применение. 1976. Т. 14, С. 21—39.

5. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов// Математ. сборник. Т. 193, № 11. 2002. С. 3—42.

6. *Obukhovskii V., Zecca P.* On boundary value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces// Abstr. Appl. Anal. 2003, № 13, P. 769—784.

7. *Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P.* Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces// Math. Differ. Incl. Control Optim. 2003, N 23, p.53-74.

8. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений/ М: КомКнига (УРСС), 2005. — 214 с.

9. *Гельман Б.Д.* Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки// Матем. заметки, 2005, т. 78, в. 2, С. 212—222.

10. *Александров П.С.,Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М: Наука, 1973.

11. *Гельман Б.Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений// Математ. сборник, т. 188, № 12, 1997, С. 33—56.

12. *Ricceri B.* On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations// C. R. Acad. Sci., Paris, 1997. v. 325, P. 65—70.

13. *Гельман Б.Д.* Об одном классе операторных уравнений// Матем. заметки, 2001, т. 70, в. 4, С.5 44—552.

14. *Гельман Б.Д.* Бесконечномерная версия теоремы Борсука—Улама// Функциональный анализ и его приложения, 2004, т. 38, № 4, С. 1—5.

*Поступила в редакцию 20.04.2007*