УДК: 517.9

ОБ ОЦЕНКАХ НОРМ СТЕПЕНЕЙ МАТРИЦЫ

А. А. Воробьев, М. Ю. Романова

Воронежский государственный университет

Данная статья посвящена оценкам норм степеней матрицы с известным спектром. Полученные результаты могут быть использованы для получения оценок решений дифференциальных уравнений, в вопросах робастности систем управления, а так же при изучении устойчивости марковских процессов. Аналогичный подход в доказательстве был использован И. М. Гельфандом, Г. Е. Шиловым, при оценке нормы матричной экспоненты.

§ 1. ОБЩИЕ ОЦЕНКИ

Пусть $\mathrm{Matr_m}(\mathrm{C})$ — линейное нормированное пространство квадратных матриц с комплексными коэффициентами и норма выбрана так, что выполняется неравенство: $\|A\,B\| \le \|A\|\|B\|$ для всех $A, B \in \mathrm{Matr}_m(\mathrm{C})$. Ставится задача об оценки нормы степеней матрицы $\|A^n\|$, $n \ge 1$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть A – произвольная матрица ℓ-го порядка с комплексными элементами и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – ее собственные значения. Тогда верна следующая оценка:

$$\|A^n\| \le r^n(A)\, p(n),\; n \ge 1,$$

где $r(A)$ – спектральный радиус матрицы A, и

$$p(n) = 1 + 2n\|A\| + 2^2 n(n-1)\|A\|^2 + \ldots +$$
$$+ 2^{m-1} n(n-1)\ldots(n-m+2)\|A\|^{m-1}$$

— многочлен, зависящий от $n \in N$.

Следует отметить, что для любого ограниченного оператора $A : X \to X$, действующего в банаховом пространстве X, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M \ge 1$, что имеют место оценки вида

$$\|A^n\| \le M(r(A) + \varepsilon)^n,\; n \ge 1.$$

Данная теорема уточняет эти оценки. Для этого используется метод Гельфанда—Шилова [1, лемма 1].

Доказательство. Вначале предположим, что матрица A имеет простые собственные значения, следовательно, $\ell = m$. Рассмотрим многочлен $f(\lambda) = \lambda^n$. Тогда $f(A) = A^n$. Матрицу A^n представим в виде многочлена от матрицы $R(A)$ степени m–1. Для этого (см [2], [3]) возьмем многочлен $R(\lambda)$, который в точках спектра $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ принимает значения $f_1 = f(\lambda_1), \ldots, f_m = f(\lambda_m)$. Среди различных форм интерполяционного многочлена будет удобнее всего рассмотреть многочлен Ньютона:

$$R(\lambda) = b_1 + b_2(\lambda - \lambda_1) + b_3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + \ldots +$$
$$+ b_m(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{m-1}).$$

Представив нужную нам матрицу через многочлен от матрицы, мы свели нашу задачу к оценке неизвестных коэффициентов $b_1, .., b_m$. Далее последовательно полагая $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, получим систему уравнений:

$$f_1 = b_1,$$
$$f_2 = b_1 + b_2(\lambda_2 - \lambda_1),$$
$$f_3 = b_1 + b_2(\lambda_3 - \lambda_1) + b_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_m = b_1 + b_2(\lambda_m - \lambda_1) + b_3(\lambda_m - \lambda_1)(\lambda_m - \lambda_2) + \ldots +$$
$$+ b_m(\lambda_m - \lambda_1)\ldots(\lambda_m - \lambda_{m-1}).$$

Введем обозначения

$$\left[f_j\right] = f_j, \left[f_{j_1 j_2}\right] = \frac{\left[f_{j_2}\right] - \left[f_{j_1}\right]}{\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}},$$

$$\left[f_{j_1 j_2 j_3}\right] = \frac{\left[f_{j_1 j_3}\right] - \left[f_{j_1 j_2}\right]}{\lambda_{j_3} - \lambda_{j_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[f_{j_1 j_2 \ldots j_k}\right] = \frac{\left[f_{j_1 \ldots j_{k-2} j_k}\right] - \left[f_{j_1 \ldots j_{k-2} j_{k-2}}\right]}{\lambda_{j_k} - \lambda_{j_{k-1}}}.$$

Выразив коэффициенты b_k через известные нам величины $f_1, f_2 \ldots f_m$, придем к системе:

$$b_1 = f_1 = \left[f_1\right],$$

$$b_2 = \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \left[f_{12}\right],$$

$$b_3 = \frac{f_3 - f_1 - \left[f_{12}\right](\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{\left[f_{13}\right] - \left[f_{12}\right]}{\lambda_3 - \lambda_2} = \left[f_{123}\right],$$

Коэффициенты можно оценить с помощью интегрирования в комплексной плоскости. Для этого рассмотрим интегралы вида

$$u_k(\lambda) = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \ldots +$$
$$+(\lambda_k - \lambda_{k-1})t_{k-1} + (\lambda - \lambda_k)t_k]dt_1 \ldots dt_k.$$

Проинтегрировав по координате t_k, получим:

$$u_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \ldots +$$
$$+(\lambda_k - \lambda_{k-1})t_{k-1} + (\lambda - \lambda_k)t_k]\Big|_0^{t_{k-1}} dt_1 \ldots dt_{k-1} =$$
$$= \frac{1}{\lambda - \lambda_k} (\int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \ldots +$$
$$+(\lambda - \lambda_{k-1})t_{k-1}]dt_1 \ldots dt_{k-1} -$$
$$-\int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \ldots +$$
$$+(\lambda_k - \lambda_{k-1})]dt_1 \ldots dt_{k-1}) = \frac{u_{k-1}(\lambda) - u_{k-1}(\lambda_k)}{\lambda - \lambda_k}.$$

Положим далее $u_0(\lambda) = f(\lambda)$. Тогда верны следующие равенства:

$$u_0(\lambda) = [f_1],$$
$$u_1(\lambda_2) = \frac{[f_2] - [f_1]}{\lambda_2 - \lambda_1} = [f_{12}],$$

....

$$u_{m-1}(\lambda_m) = \frac{[f_{12\ldots m-2,m}] - [f_{12\ldots m-2,m-1}]}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} = [f_{12\ldots m}].$$

Таким образом, число $u_{k-1}(\lambda_k)$ (k=1,2,...,m) совпадает с коэффициентом b_k искомого интерполяционного многочлена $R(\lambda)$:

$$b_k = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \ldots +$$
$$+(\lambda_k - \lambda_{k-1})t_{k-1}]dt_1 \ldots dt_{k-1}.$$

Покажем, что при всех значениях $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le t_{k-1} \le$ $\le t_{k-2} \le \ldots \le t_1 \le 1$, аргумент функции $f^{(k-1)}$ находится в пределах наименьшего выпуклого многоугольника B, содержащего точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Поскольку

$$\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})t_{k-1} =$$
$$= \lambda_1(1 - t_1) + \lambda_2(t_1 - t_2) + \ldots + \lambda_k t_{k-1},$$

а коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ неотрицательны и в сумме дают единицу

$$1 - t_1 + t_1 - t_2 + \ldots + t_{k-2} - t_{k-1} + t_{k-1} = 1,$$

то аргумент функции $f^{(k-1)}$ совпадает с центром тяжести масс $1 - t_1, t_1 - t_2, \ldots, t_{k-1}$, расположенных в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и, следовательно, лежит в пределах рассмотренного многоугольника B.

Пусть $M_k = \max_{\lambda \in B} \left| f^{(k)}(\lambda) \right|$. Тогда приходим к оценке $|b_k| \le M_{k-1}$.

В частности, для функции $f(\lambda) = \lambda^n$ имеем:

$$M_k = \max_{\lambda \in B} \left| (\lambda^n)^{(k)} \right| =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-k+1) \max_{\lambda \in B} \left| \lambda^{n-k} \right|.$$

Подводя итог нашим рассуждениям, приходим к окончательной оценке:

$$\|A^n\| = \|R(A)\| = \|b_1 + b_2(A - \lambda_1 E) +$$
$$+b_3(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) + \ldots +$$
$$+b_m(A - \lambda_1 E)\ldots(A - \lambda_{m-1}E)\| \le$$
$$\le |b_1| + |b_2| \|A - \lambda_1 E\| + |b_3| \|A - \lambda_1 E\| \|A - \lambda_2 E\| + \ldots +$$
$$+|b_m| \|A - \lambda_1 E\| \|A - \lambda_2 E\| \ldots \|A - \lambda_m E\| \le$$
$$\le (M_0 + M_1 \|A - \lambda_1 E\| + M_2 \|A - \lambda_1 E\| \|A - \lambda_2 E\| + \ldots +$$
$$+M_{m-1} \|A - \lambda_1 E\| \|A - \lambda_2 E\| \ldots \|A - \lambda_{m-1} E\|) \le$$
$$\le \max_{\lambda \in B} |\lambda^n| + n \max_{\lambda \in B} |\lambda^{n-1}| (\|A\| + |\lambda_1|) + \ldots +$$
$$+n(n-1)\ldots(n-m+2) \max_{\lambda \in B} |\lambda^{n-m+1}| (\|A\| +$$
$$+|\lambda_1|)\ldots(\|A\| + |\lambda_{m-1}|) \le \max_{\lambda \in B} |\lambda^n| + 2n \max_{\lambda \in B} |\lambda^{n-1}| \|A\| +$$
$$+2^2 n(n-1) \max_{\lambda \in B} |\lambda^{n-2}| \|A\|^2 + \ldots +$$
$$+n(n-1)\ldots(n-m+2) \max_{\lambda \in B} |\lambda^{n-m+1}| \, | \, \|A\|^{m-1},$$

где E – единичная матрица.

Рассмотрим два случая:

1) $r^n(A) \ge 1$.

Тогда $\max_{\lambda} \left\| \lambda^{n-k} \right\| \le r^n(A)$. В результате приходим к следующей оценке:

$$\|A^n\| \le r^n(A) + 2nr^{n-1}(A)\|A\| +$$
$$+2^2 n(n-1) r^{n-2}(A) \left\| A^2 \right\| + \ldots +$$
$$+n(n-1)\ldots(n-m+2) r^{m-1} \times$$
$$\times (A)(\|A\| + |\lambda_1|)\ldots(\|A\| + |\lambda_{m-1}|) \le$$
$$r^n(A) \cdot (1 + 2n\|A\| + 2^2 n(n-1)\|A\|^2 + \ldots +$$
$$+n(n-1)\ldots(n-m+2)\|A\|^{m-1}) = r^n(A) \cdot p(n),$$

где $p(n)$ многочлен степени $m-1$.

2) $r^n(A) < 1$.

Тогда представим матрицу A в следующем виде:

$$A = r(A)\frac{A}{r(A)} = r(A)\cdot B,$$

где $B = \dfrac{A}{r(A)}$.

Спектральный радиус матрицы B равен единице. Оценим норму n-ой степени исходной матрицы: $\|A^n\| = \|r(A)\cdot B\|^n = r^n(A)\cdot\|B^n\|$.

Так как $r(B)=1$, то $\|B^n\|$ оценивается как в первом случае:

$$\|B^n\| \le r^n(B)\cdot p(n) = 1\cdot p(n) = p(n).$$

Таким образом, $\|A^n\| = r^n(A)\,\|B^n\| \le r^n(A)p(n)$.

Эта оценка получена в предположении, что собственные значения матрица различны. Рассмотрим случай, когда среди собственных значений есть повторяющиеся. По теореме Шура об унитарной триангуляции матриц [2], [3], существует унитарная матрица U такая, что $A = U B U^{-1}$, где $B = (b_{ij})$ — верхнетреугольная матрица с диагональными элементами $b_{ii} = \lambda_i$, $i = 1,..,m$. Далее рассмотрим произвольную последовательность $\{\xi_n\}$, $n = 1,...,m$, сколь угодно малых чисел, такую, что $\lambda_i + \xi_i$, $i = 1,..,m$ — различны. Обозначим $B_\xi = (b_{ij}^\xi)$, где $b_{ij}^\xi = b_{ij}$, для всех $i, j = 1,...,m, i \ne j$ и $b_{ii}^\xi = b_{ii} + \xi_i$, $i = 1...,m$, Таким образом, мы получили матрицу $A_\xi = U B_\xi U^{-1}$, собственные значения $\lambda_i + \xi_i$, $i = 1,..,m$ которой различны. Для данной матрицы мы можем применить доказанную теорему. Тогда $\|A_\xi^n\| \le r_\xi^n(A)p_\xi(n)$. Переходя к пределу по $\xi_k \to 0$ мы получим оценку: $\|A^n\| \le r^n(A)p(n)$, где A – произвольная матрица. Теорема доказана.

§ 2. ОЦЕНКИ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Имеет место

Теорема 2. Пусть A — матрица простой структуры m-го порядка с комплексными элементами и $\lambda_1,...,\lambda_m$ — собственные значения матрицы A. Тогда верна следующая оценка:

$$\|A^n\| \le r^n(A)\cdot m\cdot 2^{m-1}\frac{\|A\|^{m-1}}{\delta^{m-1}},$$

где $\delta = \min\limits_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A),\lambda_i\ne\lambda_j}|\lambda_i - \lambda_j|$, $\sigma(A)$ — спектр матрицы A.

Доказательство. Так как A — матрица простой структуры, то для нее верно следующее представление $A^k = \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^k\cdot P_i$, где P_i — проектор Рисса на собственное подпространство, отвечающее i-му собственному значению. Используя интерполяционную формулу Сильвестра, получим

$$P_j = \frac{1}{\prod\limits_{k=1,k\ne j}^m(\lambda_j-\lambda_k)}(A-\lambda_1E)...(A-\lambda_{j-1}E)\times$$
$$\times(A-\lambda_{j+1})...(A-\lambda_mE) =$$
$$= \frac{(A-\lambda_1E)...(A-\lambda_{j-1}E)(A-\lambda_{j+1}E)...(A-\lambda_mE)}{(\lambda_j-\lambda_1)...(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})...(\lambda_j-\lambda_m)},$$
$$i = 1...,m.$$

Поскольку $\|A-\lambda_iE\| \le \|A\| + |\lambda_i|\|E\| \le 2\|A\|$, то приходим к оценкам

$$\|P_j\| \le \frac{2^{m-1}\|A\|^{m-1}}{\delta^{m-1}},$$

где $\delta = \min\limits_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A),\lambda_i\ne\lambda_j}|\lambda_i - \lambda_j|$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к окончательной оценке:

$$\|A^n\| = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i^n\cdot P_i\right\| \le \sum_{i=1}^m|\lambda_i^n|\cdot\|P_i\| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^m r^n(A)\cdot\frac{2^{m-1}\|A\|^{m-1}}{\delta^{m-1}} \le r^n(A)\cdot m\cdot 2^{m-1}\frac{\|A\|^{m-1}}{\delta^{m-1}},$$

где $\delta = \min\limits_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A),\lambda_i\ne\lambda_j}|\lambda_i - \lambda_j|$.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что оценки норм степей матриц различных классов были получены в монографиях [4], [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М: Наука, 1958. — 356 с.

2. *Баскаков А.Г.* Лекции по алгебре. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. — 306 с.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1954 . — 491 с.

4. *Гиль М.И.* Метод операторных функций в теории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 154 с.

5. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Науч. кн., 1997. — 388с.

Поступила в редакцию 17.10.2007