УДК 517.937+517.983

ЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

А. Г. Баскаков

Воронежский государственный университет

В статье приведен обзор ряда полученных автором результатов по качественной теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами

§ 1. Введение

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \ \ t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \qquad (1.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \qquad (1.2)$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X, \ t \in \mathbb{R}_+$, — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве X. Одним из центральных вопросов качественной теории таких уравнений является исследование асимптотического поведения решений, а также нахождение условий существования ограниченных решений. Изучение этих вопросов в терминах экспоненциальной дихотомии решений (экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов, возникающих при разрешимости уравнения (1.1); см. определение 1.1) связывают с именем Перрона. В его статье [1] асимптотические свойства решений однородных уравнений (в конечномерном пространстве X) соотносились (если использовать более современную терминологию) с определенными свойствами дифференциального оператора

$$L = -d / dt + A(t),$$

рассматриваемого в банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций и принимающих свои значения в X. Для случая ограниченных операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, читатель может обратиться к хорошо известным монографиям Массера, Шеффера [2] и Далецкого, Крейна [3], которые характеризовали экспоненциальную дихотомию решений в терминах сюръективности оператора L и условия замкнутости и дополняемости подпространства векторов из X, являющихся начальными условиями для ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений дифференциального уравнения (1.1). В этих монографиях подчеркивалась крайняя важность развития соответствующей теории для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Существенный вклад в теорию таких уравнений был сделан В. В. Жиковым в статье [4], где была доказана эквивалентность обратимости оператора L в пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, принимающих значения в X (им рассматривался случай, когда $t \in \mathbb{R}$) условию экспоненциальной дихотомии решений уравнения (1.1)).

В последнее время резко возрос интерес к изучению качественных свойств решений дифференциальных уравнений вида (1.2) с неограниченными операторными коэффициентами (см. [5—20]). Следует отметить значительную роль работ Ю. Латушкина в развитии новых подходов. В монографии [15] подведены итоги исследований до 1999 года и в ней содержится очень подробный обзор полученных результатов. При этом стал систематически применяться операторный подход, основанный на использовании оператора L в подходящих функциональных пространствах. Существенным стимулом развития послужило появление полугруппы Хоулэнда (см. [6]), которая строилась по семейству эволюционных операторов, соответствующих уравнению (1.1). Для ее определения рассмотрим некоторые важные понятия.

Пусть $\mathbb{J}$ — один из промежутков: $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_- = (-\infty, 0], \mathbb{R}, [a, b]$ (иногда будет использоваться запись $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}, [a, b]\}$) и $\Delta_{\mathbb{J}} = \{s, t \in \mathbb{J} : s \le t\} \subset \mathbb{R}^2$. Через Δ_+ будет обоз-

© Баскаков А. Г., 2007

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131

начаться множество $\Delta_{\mathbb{R}_+}$. Отображение $\mathcal{U}:\Delta_{\mathbb{J}}\to EndX$, где $EndX$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X, называется (сильно непрерывным и экспоненциально ограниченным) **семейством эволюционных операторов («вперед»)** на $\mathbb{J}$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathcal{U}(t,t)=I$ — тождественный оператор для любого $t\in\mathbb{J}$;

2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau)=\mathcal{U}(t,\tau),\tau\le s\le t,;\ s,t,\tau\in\mathbb{J}$;

3) отображение $(t,s)\mapsto\mathcal{U}(t,s)x:\Delta_{\mathbb{J}}\to X$ непрерывно для любого $x\in X$;

4) существуют постоянные $M\ge 1$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t,s)\|\le Me^{\alpha(t-s)},s\le t;\ s,t\in\mathbb{J}. \qquad (1.3)$$

Если для семейства $\mathcal{U}$ выполнены условия 2), 3), но не выполнено условие 1), то оно называется **вырожденным** семейством. В этом случае $\mathcal{U}(t,t),\ t>0,$ — сильно непрерывное семейство проекторов из алгебры $EndX$.

Семейство операторов $\mathcal{V}:\Delta_{\mathbb{J}}\to EndX$ называется **семейством эволюционных операторов «назад»,** если для него выполнены условия 1), 3), 4) из приведенного определения, а условие 2) заменяется на условие: 2′) $\mathcal{V}(s,\tau)\mathcal{V}(\tau,t)=\mathcal{V}(s,t)$ для всех $s\le\tau\le t$ из $\mathbb{J}$.

Отметим, что если $\mathcal{U}$ семейство эволюционных операторов «вперед» на $\mathbb{R}_-$, то семейство $\mathcal{V}(s,t)=\mathcal{U}(-s,-t),s\le t,\ s,t\in\mathbb{R}_+$, является семейством эволюционных операторов «назад» на $\mathbb{R}_+$.

Эволюционные семейства операторов естественным образом появляются в связи с представлением решений абстрактной задачи Коши

$$x(s)=x_0\in D(A(s)),\ \ t\ge s,\ \ t,s\in\mathbb{J} \qquad (1.4)$$

для дифференциального уравнения (1.1) в предположении, что область определения $D(A(s))$ оператора $A(s)$ плотна в X для каждого $s\in\mathbb{J}$.

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}:\Delta_{\mathbb{J}}\to EndX$ **решает абстрактную задачу Коши** (1.1), (1.4), если для любого $s\in\mathbb{J}$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого $x_0\in X_s$ функция $x(t)=\mathcal{U}(t,s)x_0,\ t\in\mathbb{J}$, дифференцируема при всех $t\ge s$, $x(t)\in D(A(t))$ и выполнены равенства (1.1), (1.4). Функция $x:\mathbb{J}\to X$ называется **классическим решением** задачи Коши (1.1), (1.4). Функция $y:\mathbb{J}\to X$, удовлетворяющая равенствам $y(t)=\mathcal{U}(t,s)y(s)$, $s\le t,s,t\in\mathbb{J}$, называется **слабым решением** (mild solution [15]) задачи (1.1), (1.4).

Если функция $f:\mathbb{J}\to X$ принадлежит линейному пространству $L^1_{loc}(\mathbb{J},X)$ локально суммируемых измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на промежутке $\mathbb{J}$ со значениями в X, то (слабым) **решением** уравнения (2) (при условии, что семейство $\mathcal{U}$ на $\mathbb{J}$ решает задачу Коши (1.1), (1.4)) называется любая непрерывная функция $x:\mathbb{J}\to X$, удовлетворяющая при всех $s\le t$ из $\mathbb{J}$ равенствам

$$x(t)=\mathcal{U}(t,s)x(s)-\int_s^t\mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ t,s\in\mathbb{J}. \quad (1.5)$$

Пусть $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbb{J},X)$ — банахово пространство функций, которое содержится в $L^1_{loc}(\mathbb{J},X)$ и принадлежит классу однородных пространств функций, описываемом в следующем параграфе. Хотя они введены только для $\mathbb{J}=\mathbb{R}_+$, аналогичным образом определяются однородные пространства для $\mathbb{J}\in\{\mathbb{R}_-,\mathbb{R}\}$. Однородные пространства функций разбиты на два класса, которые называются однородными пространствами измеримых функций (см. определение 2.1) и непрерывных функций (определение 2.5). К этим пространствам, в частности, относятся классические пространства $L^p(\mathbb{J},X)$, $p\in[1,\infty]$, пространства Степанова $S^p(\mathbb{J},X)$, $p\in[1,\infty)$, $C_b(\mathbb{R}_+,X)$.

Каждому семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}:\Delta_{\mathbb{J}}\to EndX$ (которое не обязательно решает абстрактную задачу Коши) можно сопоставить полугруппу операторов $T:\mathbb{R}_+\to End\mathcal{F}$ и оператор $\mathcal{L}:D(\mathcal{L})\subset\mathcal{F}\to\to\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbb{J},X)$, который при определенных условиях является ее генератором (инфинитезимальным оператором; см. [21]).

Пусть вначале $\mathbb{J}\in\{\mathbb{R}_-,\mathbb{R}\}$. Тогда в банаховом пространстве $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbb{J},X)$ корректно определена полугруппа $T:\mathbb{R}_+\to End\mathcal{F}$ операторов взвешенного сдвига вида

$$\begin{gathered}(T(t)x)(s)=\mathcal{U}(s,s-t)x(s-t),\\ s\in\mathbb{J},x\in\mathcal{F},t\ge 0.\end{gathered} \qquad (1.6)$$

Когда $\mathbb{J}=\mathbb{R},X$ — гильбертово пространство, такая полугруппа введена в рассмотрение Хоулэндом [6] в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R},X)$ при условии унитарности операторов $\mathcal{U}(t,s),\ t,s\in\mathbb{R}$.

С полугруппой операторов T тесно связан оператор

$$\mathcal{L}:D(\mathcal{L})\subset\mathcal{F}\to\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbb{J},X),\ \mathbb{J}\in\{\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\},$$

который определяется следующим образом. Непрерывная функция $x : \mathbb{J} \to X$, принадлежащая $\mathcal{F}$, включается в $D(\mathcal{L})$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для всех $s \le t$ из $\mathbb{J}$ верны равенства (1.5). При этом полагается $\mathcal{L}x = f$. Функция f определяется однозначно, и поэтому определение оператора $\mathcal{L}$ корректно.

В дальнейшем изучение оператора $\mathcal{L}$ будет осуществляться при условии, что он построен по произвольному семейству $\mathcal{L} : \Delta_{\mathbb{J}} \to EndX$ эволюционных операторов ("вперед").

Теорема 1.1 [16, 17]. *Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \in \{L_p(\mathbb{R}, X), p \in [1,\infty); C_0(\mathbb{R}, X)\}$ то полугруппа операторов* (1.6) *сильно непрерывна, а ее генератором является оператор $\mathcal{L}$.*

До статей [16]—[18] генератор полугруппы T не был определен.

Теорема 1.2. *Спектры операторов $T(t) \in End\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (где $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ — пространство из теоремы 1.1) и $\mathcal{L}$ связаны соотношением*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \exp \sigma(\mathcal{L})t = \\ = \{\exp \lambda t; \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}. \tag{1.7}$$

Вторая теорема об отображении спектра (вообще говоря, не имеющая место для произвольной сильно непрерывной полугруппы операторов) была независимо доказана в ряде работ для пространств $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1,\infty)$ (см. [8], [12], [16]—[18]), а в статье [17], кроме того, для пространств Степанова $S^p(\mathbb{R}, X)$, $1 \le p < \infty$ и $L^\infty(\mathbb{R}, X)$. При этом отметим, что в этих пространствах полугруппа T не является сильной непрерывной.

Если $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$, то определение полугруппы операторов типа (1.6) в однородном пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ зависит от вида пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и здесь возникают разные способы ее построения.

Вначале рассмотрим полугруппу операторов $T_0 : \mathbb{R}_+ \to End\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ вида

$$(T_0(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \ge t, \\ 0, & 0 \le s \le t, \ x \in \mathcal{F}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Эта формула корректно определяет полугруппу операторов в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1,\infty]$, $S^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1,\infty)$, и многих других однородных пространствах измеримых функций. Формула (1.8) также корректно определяет полугруппу операторов и в подпространстве $C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}_+, X) : x(0) = 0\}$ из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$. Такая полугруппа изучалась в статьях [7], [14], [18], [20]. Ее генератор (в случае, если она сильно непрерывна) тесно связан с классом определяемых далее линейных операторов.

Пусть $CS(X)$ — совокупность замкнутых линейных подпространств из X и $E \in CS(X)$. Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

который определяется в любом рассматриваемом здесь пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ следующим образом. Непрерывная функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которой вектор $x(0)$ принадлежит E, относится к области определения $D(\mathcal{L}_E)$ оператора $\mathcal{L}_E$, если существует функция $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такая, что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t,0)x(0) - \int_0^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau, \ t \ge 0. \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует, что x и f удовлетворяют на $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ равенствам (1.5) и поэтому функция f единственна. Далее полагается $\mathcal{L}_E x = f$. Если $E = \{0\}$, то оператор $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_E$ определяется с помощью равенств

$$x(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau, \ t \ge 0 \tag{1.10}$$

и он является генератором полугруппы операторов (1.8) (например, в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+, X), p \in [1,\infty)$). Аналог теорем 1 и 2 был получен в статье [18] и затем в статье [14] для пространства $C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X)$.

Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ решает абстрактную задачу Коши (1.1), (1.4), то обычно оператор $\mathcal{L}_E$ есть замыкание оператора $L = -d/dt + A(t)$, область определения которого состоит из функций $x \in D(L) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, удовлетворяющих дополнительному условию $x(0) \in E$. Тем не менее для его расширения $\mathcal{L}_E$ в дальнейшем будет использоваться обозначение $-d/dt + A(t)$.

Из приведенных определений следуют включения

$$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_E \subset \mathcal{L}_X, \ E \in CS(X). \tag{1.11}$$

Изучение оператора $\mathcal{L}_E$ существенно стимулируется использованием его спектральных свойств при исследовании интегрального оператора Винера—Хопфа с рациональным ядром (см. [22, гл. 18], где $\mathcal{L}_E = -d/dt + A$, $A \in End\mathbb{C}^n$, исследовался в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$). Исследование оператора $\mathcal{L}_E$ важно также в связи с тем, что ранее раздельно изучающиеся операторы $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_X$ можно рассматривать как принадлежащие одному (более обще-

му) классу операторов, и, что не менее важно, изучение этих операторов осуществляется (по крайней мере в этой статье) с использованием операторов $\mathcal{L}_E$, $E \neq \{0\}$.

Естественным образом возникает вопрос о построении полугруппы операторов, для которой оператор $\mathcal{L}_E$ был бы ее генератором, и последующего исследования свойств оператора $\mathcal{L}_E$ с использованием теории полугрупп операторов. В статье [14] в банаховом пространстве $C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}_+, X) : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0\}$ была введена в рассмотрение полугруппа операторов вида

$$(T_X^0(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ \mathcal{U}(s,0)x(0), & 0 \leq s \leq t, \ s \in \mathbb{R}_+, \ t \geq 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Однако, ее генератор $\mathcal{L}_X^0$ оказался необратимым оператором, а оператор $\mathcal{L}_X$ (для изучения которого должна была вводиться полугруппа) является расширением оператора $\mathcal{L}_X^0$, при этом $\mathcal{L}_X x = \mathcal{L}_X^0 x \Leftrightarrow (\mathcal{L}_X^0 x)(0) = 0$. Кроме того, полугруппа T_X^0 не может быть корректно определена формулой (1.12) в однородных пространствах измеримых функций (например, в $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$). Анализ проведенных исследований оператора $\mathcal{L}_X$ в разнообразных функциональных пространствах показывает, что оператор $\mathcal{L}_E$ для $E \neq \{0\}$, не может являться генератором этой полугруппы операторов.

В данной работе предложен новый подход исследования оператора $\mathcal{L}_E$, основанный на использовании разностных линейных отношений (многозначных линейных операторов) и полугрупп линейных отношений.

Линейным отношением на банаховом пространстве $\mathcal{X}$ называется любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Оно называется **замкнутым**, если $\mathcal{X}$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Совокупность всех (линейных) отношений на $\mathcal{X}$ обозначим символом $LR(\mathcal{X})$, и совокупных замкнутых отношений - через $LRC(\mathcal{X})$. Для любого вектора $x \in \mathcal{X}$ через $\mathcal{A}x$ обозначим множество $\{ y \in \mathcal{X} : (x, y) \in \mathcal{A}$ для некоторого $x \in \mathcal{X}\}$. Сводка основных понятий и используемых результатов из теории линейных отношений содержится в § 4 (в частности, вводятся операции умножения и сложения отношений).

В дальнейшем часто линейные операторы отождествляются с их графиком, т.е. рассматриваются в качестве линейных отношений.

Определение 1.1. Отображение $\mathcal{T} : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{X})$, удовлетворяющее условиям:

1) $\mathcal{T}(0) = I$ — тождественный оператор из $End\mathcal{X} \subset LRC(\mathcal{X})$;

2) $\mathcal{T}(t_1 + t_2) = \mathcal{T}(t_1)T(t_2), t_2, t_2 \in \mathbb{R}_+$,

называется **полугруппой** (замкнутых) линейных отношений на банаховом пространстве $\mathcal{X}$

Все дальнейшие построения осуществляются с использованием семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to EndX$.

Определение 1.2. Пусть $E \in CS(X), \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство измеримых функций. Полугруппу отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F})$, определенную равенствами:

$$\mathcal{T}_E(t) = \{(x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : y(s) = \\ = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ \mathcal{U}(s,0)x_0(s), & 0 \leq s \leq t, \end{cases} \tag{1.13}$$

где $x_0 : [0, t] \to E$ — некоторая функция из подпространства $\mathcal{F}([0, t], E) = \{\chi_{[0,t]}x, x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, E)\}$,

назовем **эволюционной полугруппой отношений** (на $\mathcal{F}$).

Если $\mathcal{F} \in \{C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X), C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X)\}$, то полугруппу $\mathcal{T}_E$, определяемую равенствами (1.13), где $x_0 : [0, t] \to E$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $x_0(t) = x(0)$, назовем **эволюционной полугруппой отношений** на однородном пространстве $\mathcal{F}$ непрерывных функций.

Необычность ситуации состоит в том , что впервые (по крайней мере для автора этой статьи) возникла полугруппа линейных отношений, не являющихся линейными операторами (для $E \neq \{0\}$). Попытка получить (см. § 9) аналоги теорем 1.1 и 1.2 для $\mathcal{L}$ и T_E приводит к необходимости определения генератора полугруппы отношений.

Приводимые здесь исследования оператора $\mathcal{L}_E$ основаны на систематическом использовании разностного отношения $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ на однородном пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательностей векторов из X (ассоциированным с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, где действует оператор $\mathcal{L}_E$; см. § 2). Замкнутое отношение $\mathcal{K}_E$ определяется равенствами

$$\mathcal{K}_E = \{(x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : y(n) = \\ = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), & n \geq 1, \\ x_0, & n = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

для некоторого $x_0 \in E\}$.

Если $E = \{0\}$, то отношение $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}_0$ является оператором и этот оператор играл важную роль в проводимых в [20] исследованиях оператора $\mathcal{L}_0$. Ясно, что наряду с включениями (1.11) имеют место включения

$$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_E \subset \mathcal{D}_X, E \in CS(X). \qquad (1.15)$$

Определение 1.3. Полугруппу отношений $\mathcal{T}_{d,E} : \mathbb{Z}_+ \to LRC(\mathcal{F})$ вида

$$\mathcal{T}_{d,E}(n) = \mathcal{K}_E^n = \{(x,y) \in \mathcal{F} : y(k) = \\ = \begin{cases} \mathcal{U}(k,k-n)x(k-n), & k \geq n, \\ \mathcal{U}(k,0)x_k, & 0 \leq k \leq n-1, \end{cases} \qquad (1.16)$$

для некоторых $x_k \in E, 0 \leq k \leq n-1\}$ назовем **дискретной эволюционной полугруппой**, отвечающей семейству $\mathcal{U} : \Delta_+ \to EndX$ эволюционных операторов.

Полугруппу $\mathcal{T}_{d,E}$ можно рассматривать как дискретизацию полугруппы отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F})$. При этом их спектральные свойства во многом совпадают. Так имеет место следующая теорема (вытекающая из теорем 5.8, 6.6; см. также теорему VI.5.4 об отображении спектра из [30]).

Теорема 1.3. *Для спектров полугрупп отношений T_E и $T_{d,E}$ верны равенства*

$$\sigma(\mathcal{T}_{d,E}(n)) = \sigma(\mathcal{T}_E(n)), n \geq 0. \qquad (1.17)$$

Более глубокие связи между отношением $\mathcal{D}_E$ и оператором $\mathcal{L}_E$ установлены в ряде лемм из § 5. В частности, построены изоморфизмы их ядер, образов, а также доказана одновременная их дополняемость. Все результаты из § 5, относящиеся к отношению $\mathcal{K}_E$ верны также для отношения, которое определяется формулами (1.14) по произвольному **дискретному** семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_d : \Delta_{d,+} = \{m \leq n, m, n \in \mathbb{Z}_+\} \to EndX$, т.е. для U_d выполняются свойства: 1) $\mathcal{U}_d(k,k) = I, k \in \mathbb{Z}_+$; 2) $\mathcal{U}_d(n,m)\mathcal{U}_d(m,k) = \mathcal{U}_d(n,k)$, $0 \leq k \leq m \leq n$; 3) $sup_{k\geq 0} \|\mathcal{U}(k+1,k)\| = M < \infty$.

Используя спектральные свойства отношения $\mathcal{K}_E$, в теореме 9.1 описан спектр оператора $\mathcal{L}_E$.

Исследование условий обратимости, сюръективности и других свойств оператора $\mathcal{L}_E$ и соответствующего ему отношения $\mathcal{D}_E$, ведется, как правило, используя понятие экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов. Оно определяется следующим образом.

Определение 1.4. Пусть $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{J}} \to EndX$ допускает **экспоненциальную дихотомию** на множестве Ω из $\mathbb{J}$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторнозначная функция $P : \Omega \to EndX$ и постоянные $M, \gamma > 0$ такие, что выполнены свойства

1) $\mathcal{U}(t,s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t,s), t \geq s, t, s \in \Omega$;

2) $\|\mathcal{U}(t,s)P(s)\| \leq M\, exp(-\gamma(t-s))$ для $s \leq t$, s, $s, t \in \Omega$;

3) для $s \leq t, s, t \in \Omega$, сужение $\mathcal{U}_{t,s} : X'(s) \to X'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t,s)$ на область значений $X'(s) = ImQ(s)$ дополнительного проектора $Q(s) = I - P(s)$, есть изоморфизм подпространств $X'(s)$ и $X'(t)$ (мы определяем оператор $\mathcal{U}(s,t) \in EndX$, равный $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $X'(t)$ и равный нулевому на $X(t) = ImP(t) \subset X$);

4) $\|\mathcal{U}(s,t)\| \leq M\, exp\gamma(s-t)$ для всех $t \geq s$ из Ω.

Пару проекторнозначных функций P, Q, участвующих в определении 3, назовем **расщепляющей парой** для семейства $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathcal{U}$ имеет место **тривиальная дихотомия** на Ω.

Таким образом, имеют место равенства

$$X = X(t) \oplus X'(t),\ X(t) = ImP(t),$$
$$X'(t) = ImQ(t),\ t \in \Omega.$$

Аналогичным образом вводится понятие экспоненциальной дихотомии дискретного семейства $\mathcal{U} : \{m, n \in \mathbb{Z}_+, m \leq n\} \to EndX$ эволюционных операторов.

Отметим, что условие ограниченности и сильной непрерывности функции $P : \Omega \to EndX$ в определении 1.4 можно опустить; оба свойства легко выводятся из других свойств этого определения (см., например, [3], [4]).

Теорема 1.4. *Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство и E — замкнутое подпространство из банахова пространства X, т.е. $E \in CS(X)$. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U} : \Delta_+ \to EndX$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с такой расщепляющей парой проекторнозначных функций P, Q, что $ImQ(0) = E$. Если $\mathcal{L}_E$ обратим, то обратный определяется формулой*

$$(\mathcal{L}_E^{-1}f)(t) = \int_0^\infty G(t,s)f(s)ds,\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X). \quad (1.18)$$

Функция (Грина) $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to EndX$ определена равенствами

$$G(t,s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t,s)P(s), & 0 \leq s \leq t, \\ \mathcal{U}(t,s)Q(s), & s > t, s, t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1.19)$$

где (P,Q) *— расщепляющая пара проекторнозначных функций со свойством* $ImQ(0)=E$.

Эта теорема доказывается в § 6 с помощью соответствующего результата для отношения $\mathcal{D}_E$ (теорема 6.1).

Следствие 1.1. *Оператор* $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ *непрерывно обратим тогда и только тогда, когда семейство* $\mathcal{U}$ *допускает тривиальную экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой* (P,Q), *где* $Q=0$, *т.е. для некоторых* $M,\gamma>0$

$$\|\mathcal{U}(t,s)\| \le Me^{-\gamma(t-s)},\ 0 \le s \le t < \infty. \quad (1.20)$$

Этот результат для оператора $L=-d/dt+A(t)$ с ограниченными операторными коэффициентами $A(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, и действующим в $C_b(\mathbb{R}_+,X)$ содержится в монографии [3, теорема III.5.1]. Утверждения следствия 1.1 для $\mathcal{L}_0$ в пространстве $C_{00}(\mathbb{R}_+,X)=\{x\in C_{0,b}(\mathbb{R}_+,X) : x(0)=0\}$ установлено в статье [7], а для пространств $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+,X)$, $p\in[1,\infty]$, — в работе [18].

Следствие 1.2. *Оператор* $\mathcal{L}_X : D(\mathcal{L}_X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ *(здесь* $E=X$*) непрерывно обратим тогда и только тогда, когда семейство* $\mathcal{U}$ *состоит из непрерывно обратимых операторов алгебры* $EndX$ *и существуют постоянные* $\tilde{M},\tilde{\gamma}>0$, *такие, что*

$$\left\|\mathcal{U}(t,s)^{-1}\right\| \le \tilde{M}e^{-\tilde{\gamma}(t-s)},\ 0 \le s \le t < \infty. \quad (1.21)$$

В теореме 2.5 статьи [14] это утверждение было получено для пространства $C_{0,b}(\mathbb{R}_+,X)$, а первая часть утверждения теоремы 1.5 для того же пространства в теореме 4.5 из [14]. Доказательство следующей теоремы проведено в конце § 8.

Теорема 1.5. *Для оператора* $\mathcal{L}_E$ *верны следующие свойства:*

1) если $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)=\mathcal{F}$ *сюръективен и подпространство*

$$X_E(0)=\{x_0\in E : \text{функция } x(t)=\mathcal{U}(t,0)x_0,\ t\ge 0 \text{ принадлежит } F\} \quad (1.22)$$

замкнуто и дополняемо в E, *то семейство* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$;

2) если семейство $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$ *с расщепляющей парой* (P,Q) *и* $E\supset ImQ(0)$, *то оператора* $\mathcal{L}_E$ *сюръективен;*

3) если семейство $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$ *с расщепляющей парой* (P,Q) *и* $\mathcal{F}$ *— однородное пространство измеримых функций, то образ* $Im\mathcal{L}_E$ *оператора* $\mathcal{L}_E$ *совпадает с подпространством* $\{y\in F : \int_0^\infty \mathcal{U}(0,t)Q(t)y(t)dt \in E+ImP(0)\}$ *и обладает свойством* $\chi_{[\alpha,\infty)}Im\mathcal{L}_E=\mathcal{F}_\alpha=\chi_{[\alpha,\infty)}\mathcal{F}$, *где* $\chi_{[\alpha,\infty)}$ *— характеристическая функция промежутка* $[\alpha,\infty)$ *из* $\mathbb{R}_+$. *Если* $E+ImP(0)$ *— замкнутое подпространство, то* $Im\mathcal{L}_E$ *— замкнутое подпространство из* $\mathcal{F}$.

Следствие 1.3. *Если* $E=X$, *то следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{L}_E$ *сюръективен и подпространство* $X(0)=X_X(0)$ *дополняемо в* X;

2) $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$.

Последнее утверждение для дифференциального оператора $L=-d/dt+A(t)$ с ограниченными операторными коэффициентами для $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)=C_b(\mathbb{R}_+,X)$ приводится в [3, теорема IV.3.3], а для такого же оператора, действующего в функциональных пространствах измеримых функций (в том числе для $L^p(\mathbb{R}_+,X), p\in[1,\infty]$) — в монографии [2]. Для оператора $\mathcal{L}_X$ результат следствия 1.3 впервые получен в [14, теорема 4.3], для пространства $C_{b,0}(\mathbb{R}_+,X)$, а в статье [23] был распространен на пространства $L^p(\mathbb{R}_+,X), p\in[1,\infty)$). Важно отметить, что этот результат до сих не был получен для пространств $L^\infty(\mathbb{R}_+,X)$ и $C_b(\mathbb{R}_+,X)$. Если $\mathcal{U}$ — семейство эволюционных операторов «назад», то утверждение следствия 1.3 получено в статье автора [19, ч. II].

Трудная часть исследований относится к операторам, действующим в однородных пространствах функций,на которых операция сдвигов функций не является сильно непрерывной. К наиболее важным из них относятся пространства $C_b(\mathbb{R}_+,X)$, $L^\infty(\mathbb{R}_+,X)$, пространство Степанова $S^1(\mathbb{R}_+,X)$. Именно эти пространства наиболее важны, рассматривались в классических работах [2]—[4], и они остались вне рассмотрений большинства авторов, активно работающих в последнее время в этой области исследований. Сведение изучения оператора $\mathcal{L}_E$ к изучению отношения $\mathcal{D}_E$ (теорема 5.8) позволило использовать технику, связанную с использованием сопряженных операторов и отношений (сводка свойств сопряженных отношений содержится в 7). Соответствующие результаты изложены в 8, 9.

До сих мы формулировали некоторые из полученных в § 5, 6 результатов, часто сопри-

касающихся с классическими. Приведем некоторые утверждения из 8, где получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_E$.

Определение 1.5. Линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X}$ — банахово пространство) называется **фредгольмовым**, если его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ конечномерно, образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ замкнут и его коразмерность $\beta(\mathcal{A}) = \operatorname{Codim}\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim(\mathcal{X}/\operatorname{Im}\mathcal{A})$ конечна. Число $\operatorname{ind}\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{A}) - \beta(\mathcal{A})$, где $\alpha(\mathcal{A}) = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, называют *индексом* фредгольмова отношения $\mathcal{A}$.

Определение 1.6. Будем говорить, что два замкнутых пространства E_1, E_2 из банахова пространства X образуют **фредгольмову пару**, если $E_1 + E_2$ — замкнутое подпространство и конечномерны подпространство $E_1 \cap E_2$ и факторпространство $X/(E_1 + E_2)$. Число $\operatorname{ind}(E_1, E_2) = \alpha - \beta$, где $\alpha = \dim(E_1 \cap E_2)$, $\beta = \dim X/(E_1 + E_2)$, называется **индексом** фредгольмовой пары E_1, E_2.

Определение 1.7. Подпространство из $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*)$ вида

$$\ell^\infty_{def}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \ell^\infty_{def,\mathcal{U}} = \{\xi \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) : \xi(0) = 0,$$
$$\xi(n) = \mathcal{U}(n+1, n)^* \xi(n+1),\ n \ge 0\}$$

назовем **дефектным подпространством** для семейства $\mathcal{U}$.

Теорема 1.6. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — фредгольмов оператор и $\ell^\infty_{def}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

2) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ (или на $\mathbb{R}_+$) с такой расщепляющей парой (P, Q), что подпространства $E, \operatorname{Im} P(0)$ из X образуют фредгольмову пару.

Если выполнено условие 2), то $\operatorname{ind}\mathcal{L}_E = ind(E, \operatorname{Im} P(0))$.

Следствие 1.4. *Пусть* $\ell^\infty_{def}(\mathbb{R}_+, X^*) = \{0\}$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}_0$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда семейство* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$ *с такой расщепляющей парой* (P, Q), *что* $\dim\operatorname{Im} Q(0) < \infty$ (*и тогда* $\operatorname{ind}\mathcal{L}_0 = -\dim\operatorname{Im} Q(0)$).

Утверждение следствия получено в [24] при дополнительных условиях рефлексивности пространства X и обратимости операторов семейства $\mathcal{U}$ для оператора $\mathcal{L}_0$, действующего в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$.

В § 9 изучается структура полугруппы отношений

$$\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)).$$

В следующей теореме используется определение 9.1 гиперболической полугруппы отношений.

Теорема 1.7. *Для того чтобы полугруппа отношений* $\mathcal{T}_E$ *была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\mathcal{U}$ *допускало экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой* (P, Q), *удовлетворяющей условию* $\operatorname{Im} Q(0) = E$.

Эта теорема следует из более общей теоремы 9.2.

§ 2. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Рассмотрим несколько примеров наиболее используемых пространств функций. Все они являются банаховыми и содержатся в линейном пространстве $L^1_{loc}(\mathbb{J}, X)$ локально суммируемых на $\mathbb{J}$ функций со значениями в (комплексном) банаховом пространстве X, где $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, [a, b]\}$. Вот некоторые из них: $L^p = L^p(\mathbb{J}, X)$, $p \in [1, \infty]$ — (банахово) пространство функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{J}, X)$, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{J}} \|x(\tau)\|^p\, d\tau\right)^{1/p},\ p \ne \infty,$$
$$\|x\|_\infty = ess\sup_{\tau \in \mathbb{J}} \|x(\tau)\|,\ p = \infty;$$

$C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций (подпространство из $L^\infty(\mathbb{J}, X)$);

$C_{0,b} = C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$ — подпространство функций x из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$;

$C_{b,E} = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$ — подпространство функций x из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $x(0) \in E$, где $E \in CS(X)$;

$$C_{00} = C_{0,b} \cap C_{b,0},$$
$$C_{b,0} = C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X) = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X) \text{ для } E = \{0\};$$

$S^p = S^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, — пространство Степанова. Оно состоит из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{t \ge 0} \left\{\int_0^1 \|x(s+t)\|^p\, ds\right\}^{1/p}.$$

Если $\mathcal{F}(\mathbb{J}, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, — одно из рассматриваемых пространств скалярных функций, то символ $\mathbb{K}$ будет опускаться, т.е. для него будет использоваться обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{J})$.

Далее через $\mathbb{R}_+$ обозначается множество неотрицательных целых чисел.

Рассматриваются следующие банаховы пространства последовательностей векторов из банахова пространства Y:

$\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}_+, Y)$, $p \in [1,\infty]$, — пространство последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to Y$, для которых конечны величины

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \|x(n)\|^p \right\}^{1/p}, \ p \in [1,\infty),$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\ge 0} \|x(n)\|, \ p = \infty;$$

$c_0 = c_0(\mathbb{Z}_+, Y)$ — подпространство последовательностей x из $\ell_\infty(\mathbb{Z}_+, Y)$ со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \|x(n)\| = 0$;

Последовательность $x : \mathbb{N} \to Y$ будет иногда обозначаться символом (x_n).

Введем в рассмотрение еще одно семейство банаховых пространств

$$L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X), \ p = 0,$$
$$p \in [1,\infty], \ q \in [1,\infty].$$

Каждой функции $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ сопоставим последовательность (x_n), $n \in \mathbb{R}_+$, где $x_n \in L^1([0,1], X)$, $x_n(s) = x(s+n)$, $s \in [0,1]$. Банахово пространство $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$ состоит из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$, для которых $x_n \in L^q([0,1], X)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а сама последовательность (x_n) принадлежит $\ell_p(\mathbb{Z}_+, L^q([0,1], X))$. При $p = 0$ последовательность (x_n) считается принадлежащей пространству $c_0(\mathbb{Z}_+, L^q([0,1], X))$. За норму функции $x \in L^{p,q}$ полагается

$$\|x\|_{p,q} = \|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_q^p \right)^{1/p}, \ p \in [1,\infty), \ q \in [1,\infty],$$

$$\|x\|_{p,q} = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|(x_n)\|_q, \text{ если } p \in \{0,\infty\}, \ q \in [1,\infty].$$

Следует отметить, что банахово пространство $L^{\infty,q}$ совпадает с пространством Степанова $S^q(\mathbb{R}_+, X)$, $q \in [1,\infty)$. Ясно, что $L^{p,p}(\mathbb{R}_+, X) = L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1,\infty]$.

Далее будет аксиоматизирован класс функциональных пространств, в которых будут действовать линейные операторы, построенные по заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to EndX$.

Определение 2.1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ измеримых на $\mathbb{R}_+$ вещественных функций назовем **однородным пространством измеримых функций**, если выполнены следующие условия:

1) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ содержится в $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) = L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, причем

$$\int_0^1 |x(\tau)|\, d\tau \le c\|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}, \ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+), \qquad (2.1)$$

где $c > 0$;

2) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ — банахова решетка (используется также термин «идеальное пространство» или «структура»; см.[25], [26]). Это означает, что если $\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, для которой $|\varphi(t)| \le |\psi(t)|$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, то $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+))$ причем $\|\varphi\| \le \|\psi\|$;

3) для любого $t > 0$ определены и ограничены операторы сдвигов функций $S(t)$, и «усеченных» сдвигов $\tilde{S}(-t) \in End\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ вида

$$(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t), \ \tau \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+),$$

$$(\tilde{S}(-t)x)(\tau) = \begin{cases} x(\tau - t), & \tau \ge t, \\ 0, & 0 \le \tau < t. \end{cases}$$

При этом $\sup\limits_{t\ge 0} \|S(t)\| + \sup\limits_{t\ge 0} \|\tilde{S}(-t)\| < \infty$.

4) характеристическая функция $\chi_{[0,1]}$ отрезка $[0,1]$ принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ функция $\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{x}(t) = \|\chi_{[n,n+1]} x\|_{S^1(\mathbb{R}_+)}$, $t \in [n, n+1]$, $n \ge 0$, принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и $\|\tilde{x}\| \le \|x\|$.

Для удобства получения оценок всюду далее считается, что

$$\|\chi_{[0,1]}\| = 1, \ \|S(t)\| \le 1, \ \|\tilde{S}(-t)\| \le 1, \ t \ge 0.$$

Из свойств 2 и 3 однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ следует, что ему принадлежат характеристические функции $\chi_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, интервалов $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\|\chi_{[n,n+1]}\| = 1$, $n \ge 0$. Рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+)$ функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, принимающих постоянное значение на каждом из интервалов $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. По этому замкнутому подпространству определим банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ вещественных последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\tilde{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \tilde{x}(t) = x(n)$, если $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит подпространству $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+)$ и положим $\|x\| = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$. Получившееся таким образом банахово пространство последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ назовем пространством, **ассоциированным** с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$. Оно, в силу своего определения, обладает свойствами, аналогичными свойствам однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$.

Определение 2.2. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ измеримых (по Бохнеру) функций $x : \mathbb{R}_+ \to X$, для которых функция $\bar{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$\bar{x}(t) = \|x(t)\|$, $t \in \mathbb{R}_+$, принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и с нормой $\|x\| = \|\bar{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$, назовем **однородным пространством измеримых функций**, соответствующих однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$.

Замечание 2.1. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство функций, соответствующих однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, то оно обладает соответствующими свойствами 1)—4) из определения 2.1. Символом $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ обозначим банахово пространство последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ со свойствами: последовательность $\tilde{x}(n) = \|x(n)\|$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$; при этом положим $\|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)} = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)}$. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ можно определить (получим тоже пространство, что и только что определенное) как совокупность последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ таких, что функция $y : \mathbb{R}_+ \to X$, $y(t) = x(n)$, $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит подпространству $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X)$ функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ постоянных на каждом промежутке $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Полагается $\|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)} = \|y\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)}$. Получившееся пространство последовательностей будем называть **однородным пространством последовательностей**, ассоциированным с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)((\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ - ассоциированная пара).

Замечание 2.2. Банаховы пространства

$$S^p(\mathbb{R}_+, X),\ p \in [1, \infty),$$

$$L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X),\ p = 0,\ p \in [1, \infty],\ q \in [1, \infty]$$

являются однородными пространствами измеримых функций, а ассоциированным к $S^p(\mathbb{R}_+, X)$ и $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$ пространством последовательностей является пространство $\ell^p(\mathbb{Z}_+, X)$, если $p \neq 0$. Если $p = 0$, то пространству $L^{0,q}(\mathbb{R}_+, X)$ соответствует пространство $c_0(\mathbb{Z}_+, X)$.

Замечание 2.3. Непосредственно из определения однородного пространства следует, что верны включения

$$L^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \subset S^1(\mathbb{R}_+, X) \quad (2.2)$$

для любого однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и также верны включения

$$\ell^1(\mathbb{Z}_+, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X) \quad (2.3)$$

для однородного пространства последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (ассоциированного с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$).

В следующем определении дается определение однородного пространства последовательностей векторов из банахова пространства X, не обязательно полученного из некоторого однородного пространства функций (см. замечание 2.1).

Определение 2.3. Банахово пространство $\Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ (Y — банахово пространство) последовательностей векторов из Y назовем **однородным пространством последовательностей**, если выполнены следующие условия:

1) если $y \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $x : \mathbb{Z}_+ \to Y$ - такая последовательность, что $\|x(n)\| \le \|y(n)\|$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то $x \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $\|x\| \le \|y\|$;

2) операторы сдвигов последовательностей $S(n)$, $\tilde{S}(-n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, вида $(S(n)x)(k) = x(k+n)$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$,

$$(\tilde{S}(-n)x))(k) = \\ = \begin{cases} x(k-n),\ k \ge n, \\ 0,\ 0 \le k < n,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y) \end{cases}$$

корректно определены, ограничены и их нормы равномерно ограничены (по $n \in \mathbb{Z}_+$) числом 1;

3) для любого вектора $x_0 \in Y$ последовательность $\bar{x}_0 : \mathbb{Z}_+ \to Y$, $\bar{x}_0(0) = x_0$, $\bar{x}_0(k) = 0$ для $k \ge 1$, принадлежит $\Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $\|\bar{x}_0\| \le \|x_0\|$.

Ясно, что банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательностей, ассоциированное с однородным пространством измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, является однородным пространством последовательностей согласно определению 2.3. Отметим еще, что для однородного пространства последовательностей $\Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ имеют место включения вида (2.3).

Определение 2.4. Банахово пространство $\mathcal{F}(0,1)$ вещественных функций, определенных на $[0,1]$ назовем **однородным** пространством, если выполнены условия:

1) $\mathcal{F}(0,1) \subset L^1(0,1) = L^1([0,1], \mathbb{R})$ и это вложение непрерывно;

2) корректно определены и равномерно ограничены единицей операторы $S(t) \in End\mathcal{F}(0,1)$ вида

$$(S(t)x)(\tau) = \\ = \begin{cases} x(\tau + t),\ t + \tau < 1; \\ x(\tau + t - 1),\ t + \tau > 1,\ t, \tau \in [0,1],\ x \in \mathcal{F}(0,1). \end{cases} \quad (2.4)$$

Примерами однородных пространств на отрезке [0, 1] являются симметрические банаховы пространства функций на [0, 1] (см. [26]), и, в частности, пространства Марцинкевича, Орлича, пространства $L_p(0,1)$, $p \in [1, \infty]$.

Замечание 2.4. Наиболее используемые однородные пространства измеримых функций

можно получить из двух пространств: однородного пространства $\mathcal{F}(0,1)$ функций на отрезке [0, 1] и однородного пространства вещественных последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ (см. определение 2.3). Вначале определим однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ вещественных функций. К нему отнесем любую функцию $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, для которой последовательность $\overline{x} = (x_n)$ функций вида

$$x_n(t) = x(t+n), \ t \in [0,1] \qquad (2.5)$$

принадлежит $\mathcal{F}(0,1)$, а последовательность $\alpha = (\|x_n\|)$ их норм принадлежит пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$. При этом полагается $\|\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)} = \|\alpha\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)}$. Теперь однородное пространство векторных функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ определяется по построенному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ согласно определению 2.2.

К пространствам, построенным по правилу, описанном в замечании 2.4, относятся пространства $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$, $p = 0$, $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$, которые при $p \neq 0$ строятся из пространств $\mathcal{F}(0,1) = L^q(0,1)$, $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) = \ell_p(\mathbb{Z}_+)$. При $p = 0$ следует положить $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) = c_0(\mathbb{Z}_+)$.

Кроме однородных пространств измеримых функций рассматриваются однородные пространства непрерывных функций.

Определение 2.5. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ называется **однородным пространством непрерывных функций**, если:

1) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — замкнутое подпространство из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ с нормой из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, и содержащее ненулевую функцию;

2) определены и равномерно ограничены семейства операторов вида

$$(\tilde{S}(-t)x)(s) = \begin{cases} x(s-t), & s \geq t, \\ x(0), & 0 \leq s \leq t, \ s,t \geq 0, \end{cases}$$

где $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$;

3) $\Phi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\|\Phi x\| \leq \|\Phi\|_\infty \|x\|$ для любой сильно непрерывной ограниченной функции $\Phi : \mathbb{R}_+ \to EndX$ с $\Phi(0) = 0$ и любой $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

Замечание 2.5. В дальнейшем будут рассматриваться только однородные пространства непрерывных функций вида: $C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$, $C_{0,b} = \{x \in C_b : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0\}$. Символ $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ используется для обозначения однородного пространства измеримых функций, так и для обозначения однородного пространства непрерывных функций. Ассоциированными с пространствами $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, $C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$ будут являться пространства последовательностей $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ и $c_0(\mathbb{Z}_+, X)$ соответственно.

§ 3. МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим однородное пространство измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (соответствующее однородному пространству вещественных измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$), подпространство $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X)$ и однородное пространство последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. определение 2.2, замечание 2.1). Через $\mathcal{F}([0,1], X)$ обозначим банахово пространство измеримых на $[0,1]$ функций со значениями в X, которые при их продолжении на $\mathbb{R}_+$ нулевой функцией на промежуток $(1,\infty)$, принадлежат $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и норма продолженной функции считается нормой функции из $\mathcal{F}([0,1], X)$.

Каждой функции x из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ поставим в соответствие последовательность функций $\overline{x} = (x_n)$ из $\mathcal{F}([0,1], X)$ вида

$$x_n(t) = (S(n)x)(t) = x(t+n), \ t \in [0,1]$$

и получившееся таким образом линейное пространство последовательностей $\overline{\mathcal{F}}$ нормируем, положив $\|\overline{x}\| = \|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)}$. Полученное пространство последовательностей $\overline{\mathcal{F}}$ является банаховым и оно изометрически изоморфно пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. При этом $\overline{\mathcal{F}}$ — однородное пространство последовательностей функций из $\mathcal{F}([0,1], X)$.

Пусть $\Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ — однородное пространство последовательностей векторов из банахова пространства Y. Рассмотрим изометрическое представление $V : \mathbb{T} \to \mathrm{End}\,\Phi$, где $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность, определенное равенствами

$$(V(\gamma)y)(n) = \gamma^n y(n), \ \gamma \in \mathbb{T}, \ n \in \mathbb{Z}_+, \ y \in \Phi. \quad (3.1)$$

Корректность определения представления V и его изометричность следует из определения 2.3 однородного пространства последовательностей.

Определение 3.1. Через $\Phi_c(Z_+, Y)$ обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей $y \in \Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ (см. определение 2.3), для которых функция $\gamma \mapsto V(\gamma)y : \mathbb{T} \to \Phi$ непрерывна. Символом $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим подпространство из однородного пространства измеримых функций x из

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которых последовательность $\bar{x} \in \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_+, \mathcal{F}([0,1], X))$ принадлежит подпространству $(\bar{\mathcal{F}})_c$. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$, то положим $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) = C_{0,E}\mathbb{R}_+, X) = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X) \cap C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$.

Однородные пространства измеримых функций $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$, $p = 0$, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$; $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, являются пространствами, для которых $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$. Пространство $(S^p(\mathbb{R}_+, X))_c$, $p \in [1, \infty)$ совпадает с $L^{0,p}(\mathbb{R}_+, X)$, а $(L^\infty(\mathbb{R}_+, X))_c = L^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$.

Лемма 3.1. *Пространство $\mathcal{F}_c$ совпадает с подпространством таких функций $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \mathcal{F}$, для которых непрерывна функция*

$$\lambda \mapsto V_{\mathbb{R}}(\lambda)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F},$$

где $V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$ — изометрическое представление группы $\mathbb{R}$ вида

$$(V_{\mathbb{R}}(\lambda)y)(s) = \exp(i\lambda s)y(s),$$
$$s \in \mathbb{R}_+,\ \lambda \in \mathbb{R},\ y \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X).$$

Кроме того, $\mathcal{F}_c$ совпадает с замыканием подпространства $\mathcal{F}_{\text{comp}}$ функций из $\mathcal{F}$, имеющих компактный носитель, а $(\bar{\mathcal{F}})_c$ есть замыкание подпространства финитных последовательностей из $\bar{\mathcal{F}}$.

Пусть $\Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ — некоторое однородное пространство последовательностей векторов из банахова пространства Y. Для любой последовательности $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \operatorname{End} Y)$ определим оператор $\bar{V}(f) \in \operatorname{End} \Phi$ следующими равенствами

$$(\bar{V}(f)x)(n) = f(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \Phi. \quad (3.3)$$

Ясно, что $\|\bar{V}(f)\| = \|f\|_\infty$.

Определение 3.2. Последовательность (f_n) из $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ назовем ограниченной апроксимативной единицей (сокращенно о.а.е.), если

1) $\sup\limits_{n \geq 1} \|f_n\| < \infty$,

2) множество $\operatorname{supp} f_n = \{k \in \mathbb{Z}_+ : f_n(k) \neq 0\}$ конечно для любого $n \in \mathbb{N}$,

3) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(k) = 1$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$,

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{k \geq 0} |f_n(k+1) - f_n(k)| = 0$.

Примером о.а.е. является последовательность вида

$$f_n(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{n}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k \geq n+1,\ n \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Лемма 3.2. *Подпространство Φ_c совпадает с подпространством последовательностей из $\Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ вида*

$$\{x \in \Phi : \lim_{n \to \infty} \bar{V}(f_n)x = x\}.$$

Утверждение этой леммы следует из леммы 4.3 статьи [27].

Лемма 3.3 *Пусть $A \in \operatorname{End} \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ - оператор, перестановочный с операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, определенных равенствами (3.1), и выполнено одно из следующих условий:*

1) $\Phi = \Phi_c$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \|A\bar{V}(f_n) - \bar{V}(f_n)A\|$ для которой о.а.е. (f_n).

Тогда существует ограниченная функция $\mathcal{A} : \mathbb{Z}_+ \to \operatorname{End} Y$ такая, что оператор A может быть представлен в виде

$$(Ay)(n) = \mathcal{A}(n)y(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ y \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y). \quad (3.5)$$

Определение 3.3. Двойственным пространством к однородному пространству последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R})$ называется совокупность $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ таких последовательностей $y : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, для которых

$$\|y\| = \sup_{\|x\|=1,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)} \sum_{n \geq 0} |x(n)y(n)| < \infty. \quad (3.7)$$

Двойственное к $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ пространство $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ также является однородным пространством. Оно канонически вкладывается в сопряженное $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)^*$ к $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ пространство, являясь в нем замкнутым подпространством. Банахово пространство $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{\xi : \mathbb{Z}_+ \to X^* :$ последовательность $\bar{\xi}(n) = \|\xi(n)\|$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ и $\|\xi\| = \|\bar{\xi}\|_{\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)}\}$ естественным образом отождествляется с замкнутым подпространством из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$, где $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ определяется с помощью $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$.

Теорема 3.1. *Если $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ (и, значит, $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$), то банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$ изометрически изоморфно банахову пространству $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$.*

Замечание 3.1. Для характеристической функции $\chi_{[a,b]}$ любого промежутка [a, b] из $\mathbb{R}_+$ и любого однородного пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ оператор $x \mapsto \chi_{[a,b]}x : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ является ограниченным проектором. Его образ обозначим через $\mathcal{F}([a,b], X)$ или $\chi_{[a,b]}\mathcal{F}$.

В однородном пространстве измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ равенствами

$$P_n x = \chi_{[n,n+1]}x,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$$

определим семейство проекторов

$$\mathcal{P} = \{(P_n); n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Имеет место

Лемма 3.4. *Для любой функции x из пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}_+, X)$ ряд $\sum_{k \geq 0} P_k x$ безусловно сходится к x. Кроме того*

$$C(\mathcal{P}) = \sup\left\|\sum_{k\geq 0}\alpha_k P_k\right\| < \infty,$$

где supremum берется по всем конечным наборам чисел $\alpha_k \in \mathbb{T},\ k \geq 0$.

Систему проекторов $\mathcal{P} = (P_n)$ назовем **разложением единицы** в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

Символом $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим совокупность таких функций $x \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$, что $\chi_{[n,n+1]}x \in L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ и, значит, $\chi_{[n,n+1]}x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, причем $\left\|\chi_{[n,n+1]}x\right\|_{\mathcal{F}} \leq \|x\|_{L^\infty([n,n+1],X)}$. Линейное пространство $C(\mathbb{R}_+, X)$ всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функции со значениями в X содержится в $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$.

Линейному оператору $A : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ поставим в соответствие бесконечную матрицу $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})$, составленную из операторных блоков $\mathcal{A}_{ij} = P_i A P_j,\ i, j \in \mathbb{Z}_+$, которые будем рассматривать как операторы из $S^1 = S^1(\mathbb{R}_+, X)$ в $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$.

Далее рассматривается такой оператор A, что все операторы $\mathcal{A}_{ij} : S^1 \to L^\infty,\ i, j \in \mathbb{Z}_+$, ограничены. Определим двустороннюю последовательность $(d_A(k)),\ k \in \mathbb{Z}$, полагая

$$d_A(k) = \sup_{i-j=k,\ i,j\geq 0}\left\|\mathcal{A}_{ij}\right\|,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Это важная характеристика убывания внедиагональных элементов матрицы $\mathcal{A}$.

Лемма 3.5. *Пусть линейный оператор $A : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ имеет матрицу $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})$ с суммируемыми диагоналями, т.е. конечна величина*

$$x(A) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k) < \infty \tag{3.11}$$

и для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} P_m A(I - P_{(n)})x = 0, \tag{3.12}$$

где $P_{(n)} = P_0 + P_1 + \cdots P_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, оператор A принадлежит алгебре $\operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\|A\| \leq æ(A)$.

Лемма 3.6. *Если для линейного оператора $A : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X)$ выполнены оценки*

$$\begin{gathered}\|(Ax)(t)\|_X \leq |(B\tilde{x})(t)|,\\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),\end{gathered} \tag{3.14}$$

где $\tilde{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+),\ \tilde{x}(t) = \|x(t)\|_X,\ t \in \mathbb{R}_+$, и оператор $B : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \to \mathcal{F}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет условиям леммы 3.5, то оператор A принадлежит алгебре $\operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\|A\| \leq \|B\|$.

Утверждение леммы непосредственно следует из определения однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (при этом следует учесть равенство $\|x\| = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ для $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$).

Если для операторов $A : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X),\ B : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \to \mathcal{F}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, выполнены оценки (3.14), то будем говорить, что оператор A **мажорируется оператором** B.

Теорема 3.2. *Пусть $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$ — сильно измеримая функция, удовлетворяющая оценкам*

$$\begin{gathered}\|G(t,s)\| \leq C\exp(-\delta\,|\,t-s\,|),\\ 0 \leq s,\ t < \infty\end{gathered} \tag{3.15}$$

для некоторых $C, \delta > 0$. Тогда оператор

$$\begin{gathered}(Ay)(t) = \int_0^\infty G(t,s)y(s)ds,\\ t \geq 0,\ y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),\end{gathered} \tag{3.16}$$

принадлежит банаховой алгебре $\operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и его норма допускает оценку вида

$$\|A\| \leq 4Ce^{\delta}(1 - e^{-\delta})^{-1}. \tag{3.17}$$

Следствие 3.1. *Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство измеримых функций. Операторы*

$$(A_1x)(t) = \int_t^{t+1} x(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

$$A_1 : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

$$(A_2x)(n) = \int_n^{n+1} x(\tau)d\tau,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

$$A_2 : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),$$

$$(A_3x)(t) = \int_n^t x(\tau)d\tau,\ t \in [n, n+1),\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

$$A_3 : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$$

корректно определены и ограничены, причем $\|A_2\| \leq 1$.

Теорема 3.3. *Пусть функция $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Тогда корректно определен и ограничен оператор*

$$\begin{gathered}A_d : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),\\ (A_dx)(n) = \int_0^\infty G(n,s)x(s)ds,\ n \in \mathbb{Z}_+\end{gathered} \tag{3.18}$$

и

$$\|A_d\| \leq 4Ce^{\delta+1}(1 - e^{-\delta})^{-1}. \tag{3.19}$$

Аналогично (еще проще) доказывается

Теорема 3.4. *Если функция $G_d : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \operatorname{End} X$ допускает оценки вида*

$$\|G_d(n,m)\| \le M_0 \exp(-\alpha_0 \mid n-m \mid), \ m,n \in \mathbb{Z}_+$$

для некоторых $M_0, \alpha_0 > 0$, *то оператор*

$$A_d : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),$$

$$(A_d x)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G_d(n,m) x(m),$$

корректно определен, ограничен и $\|A_d\| \le 2M_0 e^{\alpha_0}(1-e^{-\alpha_0})^{-1}$.

Замечание 3.2. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \in \{C_b, C_{0,b}\}$, то все классы операторов, рассматриваемые выше, корректно определены, а их ограниченность следует из ограниченности этих операторов в $L^{\infty}(\mathbb{R}_+, X)$ и $L^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Здесь приводятся наиболее используемые далее понятия и некоторые результаты из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов). Большинство их содержатся в статье [29] (см. также монографии [30] и [31]). Изложение понятий и результатов, связанных с сопряженными отношениями отнесено к 7.

Линейным отношением на комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ назовем любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Совокупность всех замкнутых линейных отношений на $\mathcal{X}$, обозначим через $LRC(\mathcal{X})$, а множество всех линейных отношений на $\mathcal{X}$ — через $LR(\mathcal{X})$.

Подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{X} : \exists y \in \mathcal{X} \text{ такой что } (x,y) \in \mathcal{A}\}$$

называется **областью определения** отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y \in \mathcal{X} : (x,y) \in \mathcal{A}\}$.

Подпространства

$$Ker\mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : (x,0) \in \mathcal{A}\}, \operatorname{Im}\mathcal{A} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$$

называются соответственно **ядром и образом** линейного (этот термин будет часто опускаться) отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. Отметим, что $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для любого $y \in \mathcal{A}x$.

Если $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, то обратное отношение $\mathcal{A}^{-1} \in LR(\mathcal{X})$ определяется равенством $\mathcal{A}^{-1} = \{(y,x) \in \mathcal{A} \times \mathcal{X} : (x,y) \in \mathcal{A}\}$. Ясно, что $D(\mathcal{A}^{-1}) = \operatorname{Im}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{-1} = D(\mathcal{A})$.

Суммой двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : x \in$$
$$\in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), \ y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}.$$

Значит, $D(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$; под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$. Произведением отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \exists y \in D(\mathcal{B})$$
$$\text{такой, что } (x,y) \in \mathcal{A}, (y,z) \in \mathcal{B}\}.$$

Каждое отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ является графиком многозначного отображения $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset X \to 2^{\mathcal{X}}$, где $D(\tilde{A}) = D(A)$ и $\tilde{A}x = \mathcal{A}x$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $LO(\mathcal{X})$ линейных замкнутых операторов можно считать включенными в $LRC(\mathcal{X})$. Итак, $\operatorname{End}\mathcal{X} \subset LO(\mathcal{X}) \subset LRC(\mathcal{X}) \subset LR(\mathcal{X})$. В отличие от монографий [30], [31] здесь не используется термин «многозначный линейный оператор».

Определение 4.1. Отношение $\mathcal{A}$ из $LRC(\mathcal{X})$ назовем **непрерывно обратимым**, если $\mathcal{A}^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, т.е. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$ (отношение $\mathcal{A}$ инъективно) и $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{X}$ (отношение $\mathcal{A}$ сюръективно). **Резольвентным множеством** отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$. **Спектром** отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Отметим, что множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\rho(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ замкнут. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением отношения $\mathcal{A}$, если $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0 I) \ne \{0\}$.

Определение 4.2. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to \operatorname{End}\mathcal{X},$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \ \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется **резольвентой** отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$.

Резольвента отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см. например, [21, 4.8]), причем

$$\mathcal{A}0 = \operatorname{Ker} R(\lambda_0, \mathcal{A}), D(\mathcal{A}) =$$
$$= \operatorname{Im} R(\lambda_0, \mathcal{A}), \ \lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}).$$

Во избежании проблем, связанных с возможной пустотой спектра, далее используется

Определение 4.3. **Расширенным спектром** отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$. Если $\mathcal{A} \overline{\in} \operatorname{End}\mathcal{X}$ (т.е. когда $D(\mathcal{A}) \ne \mathcal{X}$ либо $\mathcal{A}0 \ne \{0\}$), то полагаем $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$

называется **расширенным резольвентным множеством** отношения $\mathcal{A}$.

Справедлива (см. [29])

Теорема 4.1. *Если $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$, то расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$ обратного к $\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A}^{-1} \in LR(\mathcal{X})$ представим в виде $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \tilde{\sigma}(\mathcal{A})\}$.*

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ называется **инвариантным** относительно отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, если

$$\mathcal{A}x_0 \cap \mathcal{X}_0 \neq \{0\} \forall x_0 \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{X}_0.$$

Сужением отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ на инвариантное подпространство $\mathcal{X}_0$ называется линейное отношение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap (\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0) \subset \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$ на подпространстве $\mathcal{X}_0$. Для него будет использоваться обозначение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid \mathcal{X}_0$.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ — прямая сумма двух замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ подпространств и $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid \mathcal{X}_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid \mathcal{X}_1$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является прямой суммой отношений $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ и использовать запись $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

Определение 4.4. Будем говорить, что линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ перестановочно с оператором $B \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, если

$$(Bx, By) \in \mathcal{A} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}. \tag{4.1}$$

Отметим, что если $P_0 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ пространства $\mathcal{X}$ (т.е. $\operatorname{Im} P_0 = \mathcal{X}_0$, $\operatorname{Ker} P_0 = \operatorname{Im}(I - P_0) = \mathcal{X}_1$), то подпространства $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$ инвариантны относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ перестановочно с P_0.

В § 6 существенно используется

Теорема 4.2 [29]. *Пусть $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ и расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \tag{4.2}$$

где σ_0 — компактное подмножество из $\mathcal{A}, \sigma_1$ — замкнутое подмножество из $\tilde{\mathbb{C}}$ и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Тогда банахово пространство $\mathcal{X}$ допускает представление в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \tag{4.3}$$

прямой суммы замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ и

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1, \tag{4.4}$$

где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid \mathcal{X}_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid \mathcal{X}_1 \in LRC(\mathcal{X}_1)$ обладают следующими свойствами:

1) $\mathcal{A}_0 \in \operatorname{End}\mathcal{X}_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;

2) $\mathcal{A}_1 0 = \mathcal{A}0$, $D(\mathcal{A}) = \mathcal{X}_0 \oplus D(\mathcal{A}_1)$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$.

Разложение (4.3) осуществляет перестановочный с отношением $\mathcal{A}$ проектор Рисса

$$P_0 = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, \mathcal{A})d\lambda \in \operatorname{End}\mathcal{X}, \tag{4.5}$$

где γ — замкнутая жорданова кривая (или несколько таких кривых) лежащая в $\rho(\mathcal{A})$ такая, что σ_0 лежит внутри γ, а σ_1 — вне. При этом $\mathcal{X}_0 = \operatorname{Im} P_0$, $\mathcal{X}_1 = \operatorname{Im}(I - P_0)$.

Определение 4.5. Для отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ величина

$$\gamma(\mathcal{A}) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+}\{\|\mathcal{A}x\| \geq \lambda d(x, \operatorname{Ker}\mathcal{A}) \forall x \in D(\mathcal{A})\} =$$

$$= \inf_{x \in D(\mathcal{A}) \setminus \operatorname{Ker}\mathcal{A}} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{d(x, \operatorname{Ker}\mathcal{A})},$$

где $\|\mathcal{A}x\| = \inf\limits_{y \in \mathcal{A}x} \|y\|$, $x \in D(\mathcal{A})$, $d(x, \operatorname{Ker}\mathcal{A}) = \inf\limits_{x_0 \in Ker\mathcal{A}} \|x - x_0\|$, называется **инфинимумом модуля** отношения $\mathcal{A}$. Отношение $\mathcal{A}$ называется **корректным (равномерно инъективным)**, если $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$ и $\gamma(\mathcal{A}) > 0$.

Если $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$, то $D(\mathcal{A})$ — банахово пространство с нормой графика $\|x\|_{\mathcal{A}} = \|x\| + \mathcal{A}\|x\|$, $x \in D(\mathcal{A})$.

Теорема 4.3 [30]. *Отношение $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ обладает свойством $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\gamma(\mathcal{A}) > 0$.*

Теорема 4.4 [30]. *Если ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ дополняемо в $D(\mathcal{A})$ (с нормой графика в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$), то $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$.*

Определение 4.6. Пусть $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ и для отношения $\mathcal{A}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$; 2) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$, т.е. отношение инъективно; 3) отношение $\mathcal{A}$ корректно; 4) $\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} < \infty$; 5) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ — замкнутое дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$; 6) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$, 7) $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство; 8) $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности; 9) $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{A}$ — сюръективное отношение; 10) отношение $\mathcal{A}$ непрерывно обратимо.

Если для $\mathcal{A}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 10$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ находится в состоянии S.

В частности, если отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ находится в состоянии $F = \{4, 8\}$, то отношение $\mathcal{A}$ будет фредгольмовым (см. определение 1.5).

Следует отметить, что определение 4.6 состояний отношения отличается от общепринятого (см. [30], [36]).

Определение 4.7. Отношения $\mathcal{A},\mathcal{B} \in LRC(\mathcal{X})$ называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ такой, что $\mathcal{A} = \{(Ux,Uy) : (x,y) \in \mathcal{B}\}$, что эквивалентно равенству $\mathcal{A} = U^{-1}\mathcal{B}U$.

Подобные отношения обладают многими совпадающими свойствами. Например, они имеют одинаковое множество состояний. В частности, имеет место

Теорема 4.5. *Если $\mathcal{A},\mathcal{B}$ — подобные отношения из $LRC(\mathcal{X})$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \tilde{\sigma}(\mathcal{B}), \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$.*

В заключение параграфа отметим используемые далее равенства для отношений $\mathcal{A},\mathcal{B},C \in LR(\mathcal{X})$ (см. [30]):

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(\mathcal{B}C) = (\mathcal{A}\mathcal{B})C,\ (\mathcal{A}+\mathcal{B})C = \mathcal{A}C + \mathcal{B}C,\\ C(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = C\mathcal{A} + C\mathcal{B},\end{gathered} \tag{4.7}$$

где для выполнения второго равенства считается выполненным условие $\operatorname{Im} C \subset D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$, и для третьего — условие $C \in \operatorname{End}\mathcal{X}$.

§ 5. ОПЕРАТОР $\mathcal{L}_E$ И РАЗНОСТНОЕ ОТНОШЕНИЕ $\mathcal{D}_E$

Пусть $E \in CS(X)$, где $CS(X)$ - совокупность замкнутых пространств из банахова пространства X, и $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ - линейный оператор, построенный по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End} X$ (см. 1). Здесь $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ — однородное пространство измеримых функций, либо $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X) \in \{C_b(\mathbb{R}_+,X), C_{0,b}(\mathbb{R}_+,X)\}$. Для определенности всюду в этом параграфе считается, что $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ — однородное пространство измеримых функций. С несущественными изменениями в доказательствах почти все утверждения (теоремы 5.6) остаются верными и для однородных пространств непрерывных функций, при этом делаются соответствующие замечания.

Далее рассматривается ассоциированное с ним однородное пространство последовательностей (см. замечание 2.1) и линейное отношение $\mathcal{D}_E$, определенное в § 1. Важно отметить, что областью определения его служит все пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$.

Основные результаты этого параграфа связаны с доказательством утверждений о том, что большинство свойств из определения 4.6 выполняются для $\mathcal{L}_E$ и $\mathcal{D}_E$ одновременно. Отношение $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ будем называть **разностным**, а отношение $\mathcal{K}_E$ — **отношением взвешенного сдвига**.

Введем в рассмотрение два линейных оператора

$$\mathcal{B} : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X),$$
$$\mathcal{C} : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$$

с помощью следующих равенств

$$\begin{gathered}(\mathcal{B}x)(s) = -\varphi(s)\mathcal{U}(s,n)x(n),\\ s \in [n,n+1),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X),\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$(\mathcal{C}y)(n) = \begin{cases} -\int\limits_{n-1}^{n} \mathcal{U}(n,s)y(s)ds,\ n \ge 1,\\ 0,\ n = 0,\ y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X),\end{cases} \tag{5.2}$$

где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая функция периода 1, для которой $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \varphi(s)ds = 1$. В качестве такой функции можно взять $\varphi(s) = 6s(1-s)$, $s \in [0,1]$, что и делается в дальнейшем.

Лемма 5.1. *Операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ корректно определены, ограничены, причем $\|\mathcal{B}\| \le 3/2Me^{\alpha}$, $\|\mathcal{C}\| \le Me^{\alpha}$, где постоянные M,α взяты из оценки (1.3) семейства $\mathcal{U}$.*

Как отмечалось во введении, для операторов $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_E$ и $\mathcal{L}_X$, верны включения (1.11). Поскольку оператор $\mathcal{L}_0$ определяется равенствами (1.10), то он является инъективным. Имеет место

Лемма 5.2. *Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ экспоненциально убывает (т.е. удовлетворяет оценкам вида (1.20)), то оператор $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ (непрерывно) обратим, и обратный $\mathcal{L}_0^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ представим в виде*

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}_0^{-1}f)(t) = -\int\limits_0^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau,\\ t \ge 0,\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X).\end{gathered} \tag{5.3}$$

Лемма 5.3. *Каждая функция $x \in D(\mathcal{L}_E)$ удовлетворяет равенствам*

$$\begin{gathered}x(t) = ((\mathcal{L}_0 - \lambda_0 I)^{-1}(\mathcal{L}_E - \lambda_0 I)x)(t) +\\ +e^{-\lambda_0 t}\mathcal{U}(t,0)x(0),\ x(0) \in E,\ t \ge 0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $-\operatorname{Re}\lambda_0 + \alpha < 0$ (α взято из оценки (1.3) семейства $\mathcal{U}$).

Следствие 5.1. *Любая функция $x \in D(\mathcal{L}_E)$ представима в виде*

$$x = x_0 + f_0, \tag{5.7}$$

где $x_0 \in D(\mathcal{L}_0)$ (в частности, $x_0(0) = 0$) — непрерывная ограниченная функция и $f_0(t) = e^{-\lambda_0 t}\mathcal{U}(t,0)x(0)$, $t \ge 0$, — экспоненциально убывающая непрерывная функция из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$.

Лемма 5.4. *Если оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим, то оператор $\mathcal{L}_E^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ является левым обратным для оператора $\mathcal{L}_0$ и правым обратным для оператора $\mathcal{L}_X$. При этом $\mathcal{L}_0$ оператор является корректным, а оператор $\mathcal{L}_X$ — сюрьективным.*

Доказательство следует из включений (1.11) (см.также статьи [19], [20]).

Оператор $\mathcal{L}_E$ не всегда замкнут.

Пример 5.1. Пусть $A = A^* < 0$ — отрицательно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X, имеющий компактную резольвенту. Рассмотрим ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots,$ в X, составленный из собственных векторов оператора A, т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \ge 1$, предполагая, что $\lambda_k \le -k^3$, $k \ge 1$. Тогда A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$, для которой $U(t)e_k = \exp(\lambda_k t)e_k$, $k \ge 1$, $t \ge 0$. Пусть $x_0 = \sum_{k\ge1} k^{-1} e_k$ и $E = \{x \in \in X : (x, x_0) = 0\}$ — подпространство векторов из X, перпендикулярных вектору x_0. В качестве семейства эволюционных операторов возьмём семейство

$$\mathcal{U}(t,s) = U(t-s),\ 0 \le s \le t < \infty.$$

Последовательность векторов из X вида $x_n = \sum_{k=1,\ k\ne n}^{\infty} \frac{1}{k} e_k - \left(n \sum_{k=1,\ k\ne n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) e_n$ принадлежит подпространству E. Все функции вида $\varphi_n(t) = U(t)x_n, n \ge 1, t \ge 0$, содержатся (см. лемму 5.5) в $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_E$ при любом выборе однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, в котором действует оператор $\mathcal{L}_E = -d/dt + A$. Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = L^2(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда для функции $\varphi_0(t) = U(t)x_0$, $t \ge 0$, получаем

$$\|\varphi_n - \varphi_0\|_2^2 = \int_0^\infty \|U(t)x_n - U(t)x_0\|^2\, dt =$$

$$= \left(\frac{1}{n} + n \sum_{k\ge1,\ k\ne n} \frac{1}{k^2} \right)^2 \int_0^\infty e^{2\lambda_n t} dt \to 0,\ n \to \infty.$$

Поскольку $\varphi_0(0) = x_0 \,\overline{\in}\, E$, то $\varphi_0 \,\overline{\in}\, \operatorname{Ker}\mathcal{L}_E$. Итак, $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_E$ — незамкнутое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и поэтому $\mathcal{L}_E$ — незамкнутый оператор.

Пример 5.2. Пусть теперь $E = X$. Докажем незамкнутость оператора $\mathcal{L}_X = -d/dt + A$ при том же выборе (что и в примере 5.1) оператора A и собственных значений, удовлетворяющих оценкам $\lambda_k \le -k^3$, $k \ge 1$. Рассмотрим последовательность (x_n) векторов из X вида $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k$, $n \ge 1$. Последовательность функций $\varphi_n(t) = U(t)x_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k$, $t \in \mathbb{R}_+$, $n \ge 1$, принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+, X)$, содержится в $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_X$ и сходится в $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ к функции $\varphi_0(t) = \sum_{k\ge1} e^{\lambda_k t} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k$, $t > 0$ с $\|\varphi_0\|_2^2 = \sum_{k\ge1} \frac{1}{2k|\lambda_k|}$. Однако, функция φ_0 не представима в виде $\varphi_0(t) = U(t)x_0$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $x_0 \in X$, и, значит, не содержится в $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_X$ (см. лемму 5.5).

Замечание 5.1. При введении в $D(\mathcal{L}_E)$ нормы

$$\|x\| = \|x(0)\|_X + \|x\|_{\mathcal{F}} + \|\mathcal{L}_E x\|_{\mathcal{F}} \qquad (5.8)$$

(более сильной чем норма графика оператора $\mathcal{L}_E$) подпространство $\mathcal{D}(\mathcal{L}_E)$ будет замкнутым (по этой норме). Значит, $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_E$ — замкнутое пространство в $D(\mathcal{L}_E)$. Из представлений (5.4) и (5.7) следует, что замкнутость $\mathcal{L}_E$ эквивалентна замкнутости его ядра. Здесь же отметим, что отношение $\mathcal{K}_E$ и, следовательно $\mathcal{D}_E$, всегда замкнуто. Значит, замкнуто $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E$.

Непосредственно из определений оператора $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (из определяющих его равенств (1.9)) и разностного отношения $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ следует

Лемма 5.5. *Имеют место представления вида*

$$\operatorname{Ker}\mathcal{L}_E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) : f(t) = \\ = \mathcal{U}(t,0)x_0,\ t \ge 0,\ x_0 \in E\},$$

$$\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : x(n) = \\ = \mathcal{U}(n,0)x_0,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x_0 \in E\}.$$

Рассмотрим линейный оператор

$$J = J_E : D(\mathcal{L}_E) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), (Jx)(n) = \\ = x(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in D(\mathcal{L}_E).$$

Лемма 5.6. *Оператор J корректно определен и ограничен (при норме (5.8) в $D(\mathcal{L}_E)$).*

Введем в рассмотрение оператор $B : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ вида

$$(Bx)(s) = \mathcal{U}(s,n)x(n), \\ s \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \qquad (5.9)$$

Из доказательства леммы 5.1 следует его ограниченность, причем $\|B\| \le Me^{\alpha}$. Отметим, что $\mathcal{B}x = -\varphi Bx$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство непрерывных функций, то оператор B не определен корректно, но утверждение следующей леммы остается верным. В этом случае оператор

B рассматривается как оператор из $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E$ в $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_E$.

Лемма 5.7. *Ядра оператора $\mathcal{L}_E$ и разностного отношения $\mathcal{D}_E$ изоморфны, а их изоморфизм осуществляет оператор B. При этом имеют место равенства*

$$BJx = x,\ x \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}_E. \tag{5.10}$$

Лемма 5.8. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{C}\mathcal{B} = I - \mathcal{D}_0 \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \tag{5.11}$$

Теперь приступим к построению линейного оператора $\mathbf{\Phi}_E : \mathcal{D}_E \to D(\mathcal{L}_E)$.

Каждой паре (x_0, f) из $\mathcal{D}_E$ поставим в соответствие функцию $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, определяя ее равенствами

$$\begin{gathered} y(t) = \mathcal{U}(t,n)(x_0(n) - f(n)) - \\ -\int_n^t \mathcal{U}(t,\tau)(\mathcal{B}f)(\tau)d\tau, \\ t \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Поскольку $y(0) = x_0(0) - f(0)$, то $y(0) \in E$ (см. определение $\mathcal{D}_E$). Подставляя выражение (5.1) для $\mathcal{B}f$ в (5.12), получим

$$\begin{gathered} y(t) = \mathcal{U}(t,n)(x_0(n) - f(n)) + \\ +\left(\int_n^t \mathcal{U}(t,n)\varphi(\tau)d\tau\right) f(n) = \\ = \mathcal{U}(t,n)(x_0(n) - f(n)) + \\ +\left(\int_n^t \varphi(\tau)d\tau\right)\mathcal{U}(t,n)f(n) = \\ = (B(x_0 - f))(t) + f_n(t)(Bf)(t), \\ t \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{5.13}$$

где $f_n(t) = \int_n^t \varphi(\tau)d\tau$, $t \in [n, n+1)$. Из этих равенств следует, что функция y принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (см. следствие 3.1 для оператора A_3) и непрерывна на промежутках $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из (5.13) получаем, что $y(n) = x_0(n) - f(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из равенств

$$\begin{gathered} y(t) = \mathcal{U}(t,n)y(n) - \int_n^t \mathcal{U}(t,\tau)(\mathcal{B}f)(\tau)d\tau, \\ t \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}_+ \end{gathered}$$

следует, что $y(t) = \mathcal{U}(t,0)y(0) - \int_0^t \mathcal{U}(t,\tau)(\mathcal{B}f)(\tau)d\tau$, $t \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, $y \in D(\mathcal{L}_E)$ и $\mathcal{L}_E y = \mathcal{B}f$.

Из изложенного выше следует, что построенный линейный оператор $(x_0, f) \mapsto y : \mathcal{D}_E \to D(\mathcal{L}_E)$ ограничен (с нормой в $D(\mathcal{L}_E)$, индуцируемой из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$). Этот оператор далее обозначается символом $\mathbf{\Phi}_E$. Итак, установлена

Лемма 5.9. *Оператор $\mathbf{\Phi}_E : \mathcal{D}_E \to D(\mathcal{L}_E)$ ограничен (в $D(\mathcal{L}_E)$ выбрана норма из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$) и имеют место равенства*

$$(\mathcal{L}_E\mathbf{\Phi}_E)(x_0, f) = \mathcal{B}f, (x_0, f) \in \mathcal{D}_E. \tag{5.14}$$

Лемма 5.10. *Имеет место включение*

$$\mathcal{B}^{-1}(\operatorname{Im}\mathcal{L}_E) \subset \operatorname{Im}\mathcal{D}_E, \tag{5.15}$$

т.е. $f \in \operatorname{Im}\mathcal{D}_E$, если $\mathcal{B}f \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_E$. В частности, отношение $\mathcal{D}_E$ сюръективно, если сюръективен оператор $\mathcal{L}_E$.

Лемма 5.11. *Для оператора $\mathcal{L}_E$ и отношения $\mathcal{D}_E$ имеет место включение*

$$\mathcal{C}\mathcal{L}_E \subset \mathcal{D}_E J. \tag{5.16}$$

В частности, $\mathcal{C}(\operatorname{Im}\mathcal{D}_E) \subset \operatorname{Im}\mathcal{L}_E$.

Лемма 5.12. *Верно включение*

$$\mathcal{C}^{-1}(\operatorname{Im}\mathcal{D}_E) \subset \operatorname{Im}\mathcal{L}_E, \tag{5.17}$$

т.е., если функция $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такова, что $\mathcal{C}f \in \operatorname{Im}\mathcal{D}_E$, то $f \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_E$. В частности, сюръективность отношения $\mathcal{D}_E$ влечет сюръективность оператора $\mathcal{L}_E$.

Непосредственно из лемм 5.7, 5.10 и 5.12 следует

Теорема 5.1. *Оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим тогда и только тогда, непрерывно обратимо разностное отношение $\mathcal{D}_E$.*

Теорема 5.2. *Образ $\operatorname{Im}\mathcal{L}_E$ оператора $\mathcal{L}_E$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ $\operatorname{Im}\mathcal{D}_E$ разностного отношения $\mathcal{D}_E$.*

Теорема 5.3. *Если одно из подпространств $\operatorname{Im}\mathcal{L}_E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, $\operatorname{Im}\mathcal{D}_E \subset \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ замкнуто, то факторпространства (являющиеся банаховыми пространствами) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\operatorname{Im}\mathcal{L}_E$, $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\operatorname{Im}\mathcal{D}_E$ изоморфны. Изоморфизм осуществляют фактороператоры (построенные по $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ соответственно)*

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{C}} : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\operatorname{Im}\mathcal{L}_E \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\operatorname{Im}\mathcal{D}_E, \\ \hat{\mathcal{C}}\hat{f} = \widehat{\mathcal{C}f},\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \\ \hat{\mathcal{B}} : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\operatorname{Im}\mathcal{D}_E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\operatorname{Im}\mathcal{L}_E, \\ \hat{\mathcal{B}}\hat{g} = \widehat{\mathcal{B}g},\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \end{gathered}$$

где $\hat{f}$ — класс эквивалентности, содержащий f. При этом $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{B}}^{-1}$.

Следствие 5.2. *Если $\operatorname{Im}\mathcal{L}_E$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $z \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, то $\mathcal{B}\mathcal{C}z - z \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_E$.*

Теорема 5.4. *Если $\operatorname{Im}\mathcal{L}_E$ — замкнутое дополняемое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\mathcal{F}_1$ - некоторое замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которого*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \operatorname{Im}\mathcal{L}_E \oplus \mathcal{F}_1, \tag{5.19}$$

то $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ представимо в виде

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \operatorname{Im}\mathcal{D}_E \oplus \mathcal{C}\mathcal{F}_1, \tag{5.20}$$

причем $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1)$ *— замкнутое подпространство в* $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

Теорема 5.5. *Если пространство* $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ *представимо в виде прямой суммы*

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \operatorname{Im} \mathcal{D}_E \oplus \mathcal{F}_0, \qquad (5.21)$$

в предположении замкнутости $\operatorname{Im} \mathcal{D}_E$ *(*$\mathcal{F}_0$ *— замкнутое подпространство), то*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \operatorname{Im} \mathcal{L}_E \oplus \mathcal{B}\mathcal{F}_0, \qquad (5.22)$$

где $\mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$ *является замкнутым подпространством из* $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

Теорема 5.6. *Если* $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_E$ *— замкнутое дополняемое подпространство в однородном пространстве измеримых функций* $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ *и*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \operatorname{Ker} \mathcal{L}_E \oplus \mathcal{F}_1, \qquad (5.23)$$

где $\mathcal{F}_1$ *— замкнутое подпространство, то* $\operatorname{Ker} \mathcal{D}_E$ *— (замкнутое) дополняемое пространство из* $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ *и*

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \operatorname{Ker} \mathcal{D}_E \oplus B^{-1}(\mathcal{F}_1). \qquad (5.24)$$

Из теорем 5.4, 5.5 и леммы 5.7 следует

Теорема 5.7. *Оператор* $\mathcal{L}_E$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение* $\mathcal{D}_E$. *Если один из них фредгольмов, то их индексы совпадают.*

Поскольку теорема 5.6 доказана только для пространств измеримых функций, то для оператора $\mathcal{L}_E$, действующего в однородном пространстве непрерывных функций из десяти свойств определения 4.6 следует исключить свойство 5). Таким образом, в следующей теореме имеются в виду оставшиеся девять свойств.

Из полученных в этом параграфе лемм и теорем следует

Теорема 5.8. *Если для оператора* $\mathcal{L}_E$, *действующего в однородном пространстве измеримых функций выполнено одно из приведенных в определении 4.6 десяти свойств (девяти свойств, если* $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ *— пространство непрерывных функций), то соответствующим свойством обладает разностное отношение* $\mathcal{D}_E$. *Любое из десяти свойств определения 4.6, выполненное для* $\mathcal{D}_E$, *исключая, быть может, первое и пятое свойства, выполнено и для оператора* $\mathcal{L}_E$.

Таким образом, если оператор $\mathcal{L}_E$ находится в некотором состоянии $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, то в этом же состоянии находится и разностное отношение $\mathcal{D}_E$. Обратное заключение верно для любого состояния S, не содержащего свойств 1) и 5). В частности, теоремы 5.1 и 5.7 являются следствиями такого заключения. Если учесть замечание 5.1 и оператор $\mathcal{L}_E$ рассматривать как непрерывный оператор из $D(\mathcal{L}_E)$ с нормой (5.8), то и свойства 1) и 5) будут выполнены для $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{L}_E$ одновременно.

§ 6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ ОТНОШЕНИЙ

В этом параграфе изучаются спектральные свойства линейного разностного отношения $\mathcal{K}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ и разностных отношений $\mathcal{T}_E(t) \in LR(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$, $t \in \mathbb{R}_+$, которые были определены в 1.

Лемма 6.1. *Спектры* $\sigma(\mathcal{K}_E)$, $\sigma(\mathcal{T}_E(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, *отношений* $\mathcal{K}_E$, $\mathcal{T}_E(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *инвариантны относительно вращений вокруг нуля в* $\mathbb{C}$, *т.е. имеют место равенства*

$$\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\gamma\lambda : \gamma \in \mathbb{T},\ \lambda \in \sigma(\mathcal{K}_E)\}, \qquad (6.1)$$

$$\sigma(\mathcal{T}_E(t)) = \{\gamma\lambda : \gamma \in \mathbb{T},\ \lambda \in \sigma(\mathcal{T}_E(t))\},\ t \in \mathbb{R}_+.) \qquad (6.2)$$

Следствие 6.1. *Если отношение* $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ *непрерывно обратимо, то*

$$\sigma(\mathcal{K}_E) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \qquad (6.4)$$

Следствие 6.2. *Если* $1 \overline{\in} \sigma(\mathcal{T}_E(t))$, $t > 0$, *то*

$$\sigma(\mathcal{T}_E(t)) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \qquad (6.5)$$

Утверждение следующей леммы было получено в статьях автора [19, II], [20], а затем в статьях [33], [34]. Она позволяет применить полученные результаты об отношениях $\mathcal{K}_E$ и $\mathcal{D}_E$ к исследованию оператора $\mathcal{L}_E$ и полугруппы отношений T_E.

Лемма 6.2. *Если семейство эволюционных операторов* $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End} X$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}_+$, *то оно допускает экспоненциальную дихотомию и на* $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что в условиях леммы 6.2 расщепляющая пара $(P, Q) : \mathbb{Z}_+ \to \operatorname{End} X$ допускает продолжение до расщепляющей пары $(\tilde{P}, \tilde{Q}) : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$, для которой сохраним старое обозначение (P, Q).

Одним из основных результатов данной статьи является

Теорема 6.1. *Отношение* $\mathcal{D}_E$ *непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда семейство* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}_+$ *с такой расщепляющей парой* $(P, Q) : \mathbb{Z}_+ \to \operatorname{End} X$, *что* $\operatorname{Im} Q(0) = E$. *Если семейство* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}_+$ *с расщепляющей парой* (P, Q), *то оператор* $\mathcal{D}_E^{-1} \in \operatorname{End} \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, *где* $E = \operatorname{Im} Q(0)$, *допускает представление вида*

$$(\mathcal{D}_E^{-1}f)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n,m)f(m),\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad (6.6)$$

где функция $G : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \operatorname{End} X$ *имеет вид*

$$G(n,m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n,m)P(m), & 0 \le m \le n, \\ -\mathcal{U}(n,m)Q(m), & 0 \le n < m. \end{cases} \quad (6.7)$$

Теорема 6.2. *Если разностное отношение* $\mathcal{D}_E$ *непрерывно обратимо и* (P,Q) *- расщепляющая пара для* $\mathcal{U}$ *с* $\operatorname{Im} Q(0) = E$ *, то пространство* $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ *представимо в виде (6.10), где* $\mathcal{F}_0 = \operatorname{Im}\mathcal{P}$, $\mathcal{F}_1 = \operatorname{Ker}\mathcal{P}$ *(*$\mathcal{P}$ *— оператор умножения на функцию* P *). Подпространства* $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ *являются инвариантными для* $\mathcal{D}_E$ *и отношение* $\mathcal{K}_E$ *представимо (относительно (6.11)) в виде*

$$\mathcal{K}_E = \mathcal{K}_E^0 \oplus \mathcal{K}_E^1, \quad (6.29)$$

где оператор $\mathcal{K}_E^0 \in \operatorname{End}\mathcal{F}_0$ *и отношение* $\mathcal{K}_E^1 \in LRC(\mathcal{F}_1)$ *определяются равенствами*

$$(\mathcal{K}_E^0 x)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n,n-1)x(n-1), & n \ge 1, \\ 0, & n = 0,\ x \in \mathcal{F}_0, \end{cases} \quad (6.30)$$

$$\mathcal{K}_E^1 = \{(x,y) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 : y(n) = \\ = \mathcal{U}(n,n-1)x(n-1),\ n \ge 1,\ y(0) = x_0,\ x_0 \in E\}.$$

При этом $r(\mathcal{K}_E^0) < 1$, $\mathcal{K}_E^1 0 = \mathcal{K}_E 0$, $(\mathcal{K}_E^1)^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{F}_1$, $r((\mathcal{K}_E^1)^{-1}) < 1$.

Отметим, что теорема 6.2 следует из доказательства теоремы 6.1 и предопределяет один из основных результатов § 9 — теорему 9.2.

Следствие 6.3. *Если отношение* $\mathcal{D}_E$ *(непрерывно) обратимо в одном из однородных пространств последовательностей, то оно обратимо во всех остальных.*

Следствие 6.4. *Если* $E \in CS(X)$ *недополняемо в* X *, то* $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C}$.

Замечание 6.1. Из равенств (1.9), определяющих оператор $\mathcal{L}_E$, следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{L}_E - \lambda I$ задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_\lambda : \Delta_+ \to \operatorname{End} X$ вида

$$\mathcal{U}_\lambda(t,s) = \exp(-\lambda(t-s))\mathcal{U}(t,s), \\ 0 \le s \le t < \infty. \quad (6.31)$$

Соответствующее разностное отношение $\mathcal{D}_{E,\lambda} \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ имеетвид $\mathcal{D}_{E,\lambda} = I - \mathcal{K}_{E,\lambda}$, где отношение $\mathcal{K}_{E,\lambda}$ определяется равенствами

$$\mathcal{K}_{E,\lambda} = \{(x,y) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : y(n) = \\ = \exp(-\lambda)\mathcal{U}(n,n-1)x(n-1), n \ge 1, y(0) = \\ = x_0,\ x_0 \in E\}. \quad (6.32)$$

Определение 6.1. Число $\chi_g(\mathcal{U})$ из $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное формулой

$$\chi_g(\mathcal{U}) = \overline{\lim}_{\tau,s\to\infty} \frac{\ln\|\mathcal{U}(\tau+s,\tau)\|}{s},$$

называется **верхним генеральным показателем** (возможно вырожденного) семейства $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End} X$ эволюционных операторов (ср. [3]; гл. III).

Отметим следующий результат, полученный в теоремах 4 и 5 из [18]. Доказательство, проведеное в [18] для пространств $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1,\infty]$) и $\ell^p(\mathbb{Z}_+, X)$ остается в силе и для любых однородных пространств.

Теорема 6.3. *Спектр* $\sigma(\mathcal{L}_0)$ *оператора* $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ *имеет вид*

$$\sigma(\mathcal{L}_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \le \chi_g(\mathcal{U})\}, \quad (6.33)$$

а для спектральных радиусов операторов $\mathcal{K}_0$ *и* $T_0(1)$ *(здесь* $E = \{0\}$ *) имеют место равенства*

$$r(\mathcal{K}_0) = r(T_0(1)) = \exp\chi_g(U) = \\ = \lim_{m\to\infty}\sup_{n\ge m}\|\mathcal{U}(n,n-m)\|^{1/m} = \\ = \lim_{m\to\infty}\sup_{\tau\ge m}\|\mathcal{U}(\tau,\tau-m)\|^{1/m}. \quad (6.34)$$

Теорема 6.4. *Спектр* $\sigma(\mathcal{K}_E)$ *отношения* $\mathcal{K}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ *допускает одно из следующих представлений:*

1) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C}$;

2) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \chi_g(\mathcal{U})\}$ *. Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $E = \{0\}$;

3) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \ge r\}$ *для некоторого* $r > 0$. *Это равенство верно тогда и только тогда, когда семейство* $\mathcal{U}$ *состоит из непрерывно обратимых операторов, удовлетворяющих оценкам*

$$\|\mathcal{U}(t,s)^{-1}\| \le Ce^{\gamma(t-s)},\ 0 \le s \le t < \infty \quad (6.35)$$

для некоторых $C > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$;

4) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}(r_1, r_2)$, *где* $\mathbb{T}(r_1, r_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \le r_1 < |\lambda| < r_2\}$ *и* $0 \le r_1 < r_2$ *— некоторые числа.*

Теорема 6.5. *Если* $|\lambda| > \varkappa_g(\mathcal{K})$, *то отношение* $\mathcal{K}_E - \lambda I$ *сюрьективно, его ядро дополняемо и оператор* $\mathcal{K}_0 - \lambda I$ *непрерывно обратим. Правым обратным к отношению* $\mathcal{K}_E - \lambda I$ *является оператор*

$$((\mathcal{K}_0 - \lambda I)^{-1}x)(n) = \\ = -\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k-1}\mathcal{U}(n,n-k)x(n-k),\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \quad (6.39)$$

Проектор $\mathcal{P}_\lambda$ *на* $\operatorname{Ker}(\mathcal{K}_E - \lambda I)$ *может быть записан в виде*

$$(\mathcal{P}_\lambda x)(n) = \lambda^{-n}\mathcal{U}(n,0)x(0), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \tag{6.40}$$

Замечание 6.2. Участвующие в условиях теоремы 6.4 числа r, r_1, r_2 можно выразить с помощью подходящего понятия нижнего генерального показателя семейства $\mathcal{U}$ эволюционных операторов, а также с помощью нижнего и верхних генеральных показателей подпространств векторов из X, которые вводятся по аналогии с соответствующими понятиями из [3].

Далее рассматривается полугруппа отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LR(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$, определенная равенствами (1.13).

Теорема 6.6. *Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ с расщепляющей парой (P,Q), для которой $\operatorname{Im} Q(0) = E$, то разностные отношения $I - \mathcal{T}_E(t)$, $t > 0$, непрерывно обратимы в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и обратные к ним операторы из $\operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ имеют вид*

$$((I - \mathcal{T}_E(t))^{-1} f)(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} G(s, s+kt-nt)x(s+kt-nt) \tag{6.41}$$

для $s \in [nt, (n+1)t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где функция $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$ имеет вид (1.19).

Теорема 6.7. *Оператор $\mathcal{L}_E$ обратим тогда и только тогда, когда обратимо одно из отношений $I - \mathcal{T}_E(t)$, $t > 0$ (и, значит, они все обратимы).*

Из доказательства теоремы 6.7 получаем

Следствие 6.5. *Имеет место включение* $\operatorname{Im}(I - \mathcal{T}_E(t)) \subset \operatorname{Im}\mathcal{L}_E$, $t > 0$.

§ 7. О СОПРЯЖЕННЫХ ОТНОШЕНИЯХ

При исследовании таких важных свойств линейных отношений (операторов) как фредгольмовость, корректность, сюръективность и т.д. существенную пользу приносит использование сопряженного линейного отношения. Рассмотрим некоторые свойства сопряженных отношений. Хотя они не все используются в последующих параграфах, но можно надеяться, что каждое из них найдет применение при исследовании рассматриваемых операторов и отношений. Многие из утверждений можно найти в монографиях [35—41] (а для линейных отношений — в [30]), либо доказательство свойств сопряженных линейных отношений несущественно отличается от соответствующих свойств для сопряженных линейных операторов.

Если E — линейное подпространство из банахова пространства $\mathcal{X}$, то через $E^\perp$ обозначим аннулятор этого подпространства, т.е.

$$E^\perp = \{\xi \in \mathcal{X}^* :< x, \xi >= 0\ \forall x \in E\}. \tag{7.1}$$

Для подпространства $F \subset \mathcal{X}^*$ символом ${}^\perp F$ обозначим подпространство из $\mathcal{X}$ вида

$${}^\perp F = \{x \in \mathcal{X} :< x, \eta >= 0\ \forall \eta \in F\}. \tag{7.2}$$

Ясно, что $E^\perp = \bar{E}^\perp$ и ${}^\perp F = {}^\perp \bar{F}$ для замыканий $\bar{E}$ и $\bar{F}$ подпространств E и F соответственно.

Следуя [35], дадим следующее

Определение 7.1. Подпространство $F \subset \mathcal{X}^*$ называется **насыщенным**, если верно равенство

$$({}^\perp F)^\perp = F. \tag{7.3}$$

При наделении пространства $\mathcal{X}^*$ топологией слабой*-сходимости ($\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$-топологией; см. [35]—[39]) получаем, что подпространство $F \subset \mathcal{X}^*$ является насыщенным тогда и только тогда, когда F — слабо*-замкнутое подпространство из $\mathcal{X}^*$. Кроме того, для любого подпространства $F_0 \subset \mathcal{X}^*$ имеет место равенство

$$({}^\perp F_0)^\perp = w^* - c\ell F_0, \tag{7.4}$$

где $w^* - c\ell\ F_0$ — слабое*-замыкание F_0. Отметим, что $E^\perp$ — насыщенное подпространство в $\mathcal{X}^*$ для любого подпространства $E \subset \mathcal{X}$.

Определение 7.2. Пусть $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. **Сопряженным** к $\mathcal{A}$ называется отношение $\mathcal{A}^* \in LR(\mathcal{X}^*)$, определяемое формулой

$$\mathcal{A}^* = \{(\eta, \xi) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^* : \langle y, \eta\rangle = \langle x, \xi\rangle\ \ \forall (x,y) \in \mathcal{A}\}. \tag{7.5}$$

Ясно, что $\mathcal{A}^*$ — замкнутое отношение на $\mathcal{X}^*$. При каноническом отождествлении сопряженного пространства $(\mathcal{X} \times \mathcal{X})^*$ с банаховым пространством $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$ сопряженное к $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ отношение $\mathcal{A}^* \in LRC(\mathcal{X}^*)$ можно определить также равенством

$$\mathcal{A}^* = (-\mathcal{A}^{-1})^\perp \subset \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*, \tag{7.6}$$

Следовательно, $\mathcal{A}^*$ — насыщенное подпространство из $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$.

Определение 7.3. Пусть $\mathcal{B} \in LRC(\mathcal{X}^*)$. Линейное отношение

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \langle y, \eta\rangle = \langle x, \xi\rangle\ \ \forall (\eta, \xi) \in \mathcal{B}\} = {}^\perp(-\mathcal{B}^{-1})$$

называется **предсопряженным** к $\mathcal{B}$ и обозначается через ${}^*\mathcal{B}$.

Ясно, что ${}^*\mathcal{B} \in LRC(\mathcal{X})$ и $({}^*\mathcal{B})^* = \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — насыщенное отношение на $\mathcal{X}^*$.

Лемма 7.1. *Для* $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ *верны* равенства:

1) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = (\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp$, 2) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = {}^\perp(\operatorname{Im}\mathcal{A}^*)$, 3) ${}^\perp(\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*) = \overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}}$, 4) $(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^\perp = w^* - c\ell\operatorname{Im}\mathcal{A}^* \supset \overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}^*}$, 5) $\mathcal{A}0 = {}^\perp\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$, 6) $\mathcal{A}^*0 = D(\mathcal{A})^\perp$.

Лемма 7.2. *Если* $\mathcal{B} \in LRC(\mathcal{X}^*)$, *то имеют место равенства:*

1) $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = (\operatorname{Im}({}^*\mathcal{B}))^\perp$, *2)* $\operatorname{Ker}({}^*\mathcal{B}) = {}^\perp(\operatorname{Im}\mathcal{B})$, *3)* ${}^\perp\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \overline{\operatorname{Im}({}^*\mathcal{B})}$, *4)* $\operatorname{Ker}({}^*\mathcal{B}))^\perp = w^* - c\ell\operatorname{Im}\mathcal{B}$, *5)* $({}^*\mathcal{B})0 = {}^\perp D(\mathcal{B})$, *6)* $\mathcal{B}0 = D(({}^*\mathcal{B})^\perp)$.

Следующая теорема для линейных операторов известна как теорема Банаха—Хаусдорфа (см. [40, теорема 1.2.6]), а также как теорема о замкнутых образах [30].

Теорема 7.1. *Для отношения* $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$; *2)* $\operatorname{Im}\mathcal{A} = {}^\perp(\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*)$, *3)* $\operatorname{Im}\mathcal{A}^* = (\operatorname{Ker}\mathcal{A})^\perp$, *4)* $w^* - c\ell(\operatorname{Im}\mathcal{A}^*) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^*$, *5)* $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}^*} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^*$, *6)* $\gamma(\mathcal{A}) > 0$, $\gamma(\mathcal{A}^*) > 0$.

Применяя теорему 7.1 к обратному отношению $\mathcal{A}^{-1}$ получаем

Следствие 7.1. *Следующие условия эквивалентны: 1)* $\overline{D(\mathcal{A})} = D(\mathcal{A})$; *2)* $D(\mathcal{A}) = {}^\perp(\mathcal{A}^*0)$; *3)* $\overline{D(\mathcal{A}^*)} = (\mathcal{A}0)^\perp$; *4)* $w^* - c\ell D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A}^*)$; *5)* $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A}^*)$.

Все утверждения следующей теоремы вытекают из леммы 7.1.

Теорема 7.2. *Каждое отношение* $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ *обладает свойствами:*

1) $\mathcal{A}^* \in LO(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{A}$; 2) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$ — насыщенное подпространство из $\mathcal{X}^*$; 4) $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{A}^*0 = \{0\}$; 5) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow w^* - c\ell(\operatorname{Im}\mathcal{A}^*) = \mathcal{X}^*$.

Непосредственно из определения сопряженного отношения следует, что $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$ для любого $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$. Поэтому, если $\mathcal{A}$ - непрерывно обратимое отношение, то $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in End\mathcal{X}^*$. Если же непрерывно обратимо отношение $\mathcal{A}^*$, то $\operatorname{Im}\mathcal{A}^* = X^*$ и из свойства 1) теоремы 7.2 следует, что $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}}$. Поскольку $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = \{0\}$, то из свойства 1) леммы 7.1 получаем, что $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{X}$, а из свойства 2) вытекает, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1} \in End\mathcal{X}$. Поскольку $(\mathcal{A} - \lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \lambda I$, то из проведенных рассуждений получаем, что имеет место

Теорема 7.3. *Для любого отношения* $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ *верны равенства*

$$\sigma(\mathcal{A}^*) = \sigma(\mathcal{A}), \tilde{\sigma}(\mathcal{A}^*) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}).$$

§ 8. О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОТНОШЕНИЙ $\mathcal{D}_E$, $\mathcal{K}_E$ И ОПЕРАТОРА $\mathcal{L}_E$

Приступим к более подробному изучению разностного отношения $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E \in LRC\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и оператора $\mathcal{L}_E$ на однородном пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Как и ранее, считается, что $E \in CS(X)$. Однако, при использовании сопряженного отношения $\mathcal{D}_E^*$ возникают проблемы, связанные с тем, что $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$ не является однородным пространством, если $\mathcal{F}_c \neq \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Чтобы преодолеть эту трудность, будем, используя теорему 3.1, изучать сужение $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}_c$ и при этом доказывать, что некоторыми свойствами сужения обладает и отношение $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}$. Отметим, что поскольку отношение $\mathcal{D}_E$ имеет область определения, совпадающую со всем пространством $\mathcal{F}$, то $\mathcal{D}_E^*$ — линейный оператор (см. свойство 3) теоремы 7.2).

Вначале предположим, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ и, следовательно, в силу теоремы 3.1 пространство $\mathcal{F}^*$ можно отождествить с однородным пространством последовательностей $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$ ($\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ — двойственное к $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ пространство; см. 3).

Из определения 7.2 следует, что сопряженное к $\mathcal{D}_E$ отношение $\mathcal{D}_E^* \subset \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$ состоит из пар $(\eta, \xi) \in \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$ таких, что $\langle y, \eta\rangle = \langle x, \xi\rangle$ для всех $(x, y) \in \mathcal{D}_E$. При этом, ввиду свойства $D(\mathcal{D}_E) = \mathcal{F}$, из свойства 1) теоремы 7.2 следует, что $\mathcal{D}_E^*$ является линейным оператором. Таким образом, верны равенства

$$\langle x_0, \eta(0)\rangle + \sum_{k\geq 1}\langle y(k), \eta(k)\rangle = \sum_{k\geq 0}\langle x(k), \xi(k)\rangle,$$

где $y(k) = \mathcal{U}(k, k-1)x(k-1)$, $k \geq 1$, и $y(0) = x_0 \in E$. Переписав их в виде

$$\langle x_0, \eta(0)\rangle = \sum_{k\geq 0}\langle x(k), \xi(k) - \mathcal{U}(k+1, k)^*\eta(k+1)\rangle,$$

и, учитывая произвольность выбора последовательности $x \in \mathcal{F}$ и x_0 из E, получим, что оператор $\mathcal{D}_E^* : D(\mathcal{D}_E^*) \subset \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'$ определяется формулой

$$(\mathcal{D}_E^*\eta)(n) = \eta(n) - \mathcal{U}(n+1, n)^*\eta(n+1), \ n \geq 0, \quad (8.1)$$

где $\eta \in D(\mathcal{D}_E^*) = \{u \in \mathcal{F}' : u(0) \in E^\perp\}$. Корректность его определения следует из определения пространства $\mathcal{F}'$ и ограниченности последовательности $n \mapsto \mathcal{U}(n+1, n)^* : \mathbb{Z}_+ \to EndX^*$. Итак, имеет место

Лемма 8.1. *Сопряженное к* $\mathcal{D}_E$ *отношение* $\mathcal{D}_E^*$ *является линейным оператором вида* (8.1).

Замечание 8.1. Все утверждения этого параграфа, относящиеся к отношению $\mathcal{D}_E$, верны и в случае, если оно строится по любому дискретному семейству $\mathcal{U}:\Delta_{d,+}\to EndX$ эволюционных операторов (см. 1).

Замечание 8.2. Ядро оператора $\mathcal{D}_E^*$ состоит из последовательностей $\xi\in\mathcal{F}'=\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+,X^*)$, для которых выполнены соотношения

$$\xi(n)=\mathcal{U}(n+1,n)^*\xi(n+1),\quad n\in\mathbb{Z}_+,\ \xi(0)\in E^\perp. \tag{8.2}$$

Теперь остановимся на рассмотрении одного очень важного вспомогательного результата, используемого при исследовании ядер отношения $\mathcal{D}_E$ и оператора $\mathcal{F}_E^*$. Оператор $\mathcal{D}_E^*$ иногда будет также обозначаться символом $\mathcal{D}_{*,F}$, где $F=E^\perp$.

Пусть $\mathcal{A}\in LRC(\mathcal{X})$ и $x_0\in D(\mathcal{A}^\infty)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D(\mathcal{A}^n)$.

Орбитой вектора x_0 (относительно $\mathcal{A}$) называется любая последовательность $x:\mathbb{Z}_+\to\mathcal{X}$, для которой $x(n)\in\mathcal{A}^n x_0$, $x(0)=x_0$, для всех $n\in\mathbb{Z}_+$. Следовательно, для x выполнены включения $x(n+1)\in\mathcal{A}x(n)$, $n\ge 0$.

Будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ **равномерно корректно** на окружности $\mathbb{T}$, если все отношения $\mathcal{A}-\gamma I$, $\gamma\in\mathbb{T}$ корректны (см. определение 4.5 и равенство (4.6)) и выполнено условие

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{T}}\gamma(\mathcal{A}-\lambda I)=æ(\mathcal{A})>0. \tag{8.3}$$

Лемма 8.2. *Пусть $\mathcal{A}\in LRC(\mathcal{X})$ — равномерно корректное на $\mathbb{T}$ отношение и $x:\mathbb{Z}_+\to\mathcal{X}$ — ограниченная орбита вектора $0\ne x_0\in D(\mathcal{A}^\infty)$. Тогда для $æ=\min\{1,æ(\mathcal{A})\}$ имеют место оценки*

$$\|x(n)\|\le\frac{2(1-æ/4)^{n+1}\|x_0\|}{æ}. \tag{8.4}$$

Теперь применим лемму 7.3 к исследованию ядер отношения $\mathcal{D}_E$ и операторов $\mathcal{D}_E^*$, $\mathcal{L}_E$. Временно, в условиях следующей леммы и последующих двух следствиях не предполагается, что $\mathcal{F}=\mathcal{F}_c$.

Лемма 8.3. *Пусть оператор $\mathcal{D}_0\in End\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X)$ корректен и $x:\mathbb{Z}_+\to X$ — ограниченная последовательность вида*

$$x(n)=\mathcal{U}(n,0)x_0,\ n\in\mathbb{Z}_+,\ x_0\in X$$

(в частности, $x\in\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E$). Тогда имеют место оценки

$$\begin{gathered}\|x(n)\|\le\frac{2(1-æ(\mathcal{D}_0)/4)^{n+1-m}}{æ(\mathcal{D}_0)}\|x(m)\|,\ 0\le m\le n,\\ \|x(n)\|\le\frac{2(1-æ(\mathcal{D}_0)/4)^{n+1}}{æ(\mathcal{D}_0)}\|x_0\|,\ n\in\mathbb{Z}_+,\end{gathered} \tag{8.9}$$

где $æ(\mathcal{D}_0)=\min\{\gamma(\mathcal{D}_0),1\}$ и $\gamma(\mathcal{D}_0)$ определена формулой (4.6).

Из лемм 8.3, 5.5 и теоремы 5.8 получаем

Следствие 8.1. *Если оператор $\mathcal{L}_0:D(\mathcal{L}_0)\subset\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X)\to\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ корректен, то любая функция x из $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_X$ допускает оценки вида*

$$\|x(t)\|\le ce^{-\alpha_0(t-s)}\|x(s)\|,\ 0\le s\le t<\infty \tag{8.10}$$

для некоторых постоянных $c,\alpha_0>0$.

Следствие 8.2. *Если оператор $\mathcal{L}_0$ корректен в одном из однородных пространств, то ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E$ отношения $\mathcal{D}_E$ (ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_E$ оператора $\mathcal{L}_E$) принадлежит любому однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X)$ (соответственно $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$).*

Замечание 8.3. Аналог результата из следствия 8.1 при условии ограниченности семейства $\mathcal{U}$, определенного на $\Delta_{\mathbb{R}}$, был впервые получен В. В. Жиковым [4] для дифференциального оператора $\mathcal{L}$, действующего в $C_b(\mathbb{R},X)$. В статье [14] условие ограниченности семейства $\mathcal{U}$ было снято, а оператор $\mathcal{L}_X$ рассматривался в $C_{0b}(\mathbb{R}_+,X)$ (для пространств $L_p(\mathbb{R}_+,X)$, $p\in[1,\infty)$ он был получен в [23]).

Лемма 8.4. *Для любого отношения $\mathcal{A}\in LRC(\mathcal{X})$ имеют место равенства*

$$\begin{gathered}\operatorname{Ker}(I-\mathcal{A})=\operatorname{Ker}(I-\mathcal{A}^{-1}),\\ \operatorname{Im}(I-\mathcal{A})=\operatorname{Im}(I-\mathcal{A}^{-1}),\\ \gamma(I-\mathcal{A})=\gamma(I-\mathcal{A}^{-1}).\end{gathered}$$

Далее снова считается выполненным предположение $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)=\mathcal{F}_c$.

Лемма 8.5. *Пусть оператор*

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_X^*:D(\mathcal{D}_X^*)=\{\eta\in\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+,X^*):\eta(0)=0\}\subset\\ \subset\mathcal{F}'\to\mathcal{F}'=\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+,X^*),\\ (\mathcal{D}_X^*\eta)(n)=\eta(n)-\mathcal{U}(n+1,n)^*\eta(n+1),\\ n\ge 0,\ \eta\in D(\mathcal{D}_X^*)\end{gathered}$$

является корректным. Тогда каждая ограниченная последовательность $\eta_0:\mathbb{Z}_+\to X^*$ для которой выполнены соотношения

$$\eta_0(n)=\mathcal{U}(n+1,n)^*\eta_0(n+1),\ n\ge 0,$$

допускает оценку

$$\|\eta_0(n)\|\le 2(1-æ(\mathcal{D}_X^*)/4)^{n-m+1}\|\eta_0(m)\|,\ n\ge m, \tag{8.11}$$

где $æ(\mathcal{D}_X^*)=\min\{1,\gamma(\mathcal{D}_X^*)\}$ и величина $\gamma(\mathcal{D}_X^*)$ определена формулой (4.6).

Следствие 8.3. *Любая последовательность η_0 из $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E^*$ удовлетворяет оценкам (8.11), если $\mathcal{D}_X^*$ — корректный оператор.*

Следствие 8.4. *В условиях леммы 8.5 замыкание образа* $\operatorname{Im}\mathcal{D}_E$ *отношения* $\mathcal{D}_E$ *допускает представление вида*

$$\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_E} =^{\perp} \operatorname{Ker}\mathcal{D}_E^* =$$
$$= \{y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : \sum_{n=0}^{\infty}\langle y(n), \eta_0(n)\rangle = 0\}$$

для любого $\eta_0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}_E^*$.

Утверждение следствия 8.4 вытекает из свойства 3) леммы 7.1 и доказанной леммы 8.5 (см. замечание 8.2).

В дальнейшем не предполагается выполненным условие $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$. Пространство $\mathcal{F}_c' = \mathcal{F}_c'(\mathbb{Z}_+, X)$ канонически отождествляется (в силу теоремы 3.1) с пространством $\mathcal{F}_c^* = \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X)^*$, а оператор $\mathcal{D}_{E,c}^*$ рассматривается на $\mathcal{F}_c'$.

Далее рассматривается оператор вложения

$$J_c : \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$$

и сопряженный оператор

$$\Phi_c = J_c^* : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^* = \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}_c^*,$$

который, учитывая канонический изоморфизм $\mathcal{F}_c'$ и $\mathcal{F}_c^*$, рассматривается как отображение $\Phi_c : \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}_c'$, причем $\Phi_c(\xi) = \xi_c \in \mathcal{F}_c'$, где ξ_c — последовательность из $\mathcal{F}_c'$, с помощью которой определяется сужение $\xi \mid \mathcal{F}_c$ функционала ξ на подпространство $\mathcal{F}_c$. Ясно, что J_c — инъективный, а Φ_c — сюръективный операторы.

Лемма 8.6. *Подпространство* $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X)$ *является инвариантным для отношения* $\mathcal{D}_E$ *и имеют место равенства*

$$J_c\mathcal{D}_{E,c} = \mathcal{D}_E J_c, \ \mathcal{D}_E^*\xi = \mathcal{D}_0^*\xi,$$
$$\xi \in D(\mathcal{D}_E^*) = \{\xi \in \mathcal{F}^* : (\Phi_c\xi)(0) \in E^{\perp}\}.$$

Сужение отношения $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}_c$ далее обозначается через $\mathcal{D}_{E,c}$.

Замечание 8.4. Как было выяснено в теореме 5.8 (а также в теоремах 5.1—5.7), большинство свойств оператора $\mathcal{L}_E$ (состояний оператора $\mathcal{L}_E$) наследует отношение $\mathcal{D}_E$. В свою очередь, леммы 8.3, 8.5 и 8.6 позволяют доказывать, что многие свойства отношения $\mathcal{D}_E$ наследует также и его сужение $\mathcal{D}_{E,c}$ на $\mathcal{F}_c$. Например, если $\mathcal{D}_0$ — корректный оператор, то $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_{E,c} = \operatorname{Ker}\mathcal{D}_E$ в силу леммы 8.3. Если же $\mathcal{D}_E$ обладает дополнительным свойством $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_E} = \operatorname{Im}\mathcal{D}_E$, то $\gamma(\mathcal{D}_E) > 0$ и поскольку $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E = \operatorname{Ker}\mathcal{D}_{E,c}$, то $\gamma(\mathcal{D}_{E,c}) > 0$, т.е. $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{E,c}} = \operatorname{Im}\mathcal{D}_{E,c}$. Другие наследуемые свойства будут рассматриваться в последующих утверждениях.

Теорема 8.1. *Отношение* $\mathcal{K}_E$ *и его сужение* $\mathcal{K}_{E,c}$ *на* $\mathcal{F}_c$ *имеют совпадающие спектры*: $\sigma(\mathcal{K}_E) = \sigma(\mathcal{K}_{E,c})$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E) = \tilde{\sigma}(\mathcal{K}_{E,c})$.

Теорема 8.2. *Если отношение* $\mathcal{D}_E$ *корректно (инъективно) и оператор* $\mathcal{D}_{E,c}^*$ *инъективен (соответственно корректен), то отношения* $\mathcal{D}_E$, $\mathcal{D}_{E,c}$ *и операторы* $\mathcal{D}_E^*$, $\mathcal{D}_{E,c}^*$ *непрерывно обратимы.*

Теперь рассмотрим дефектное подпространство $\ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) \subset \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*)$, введенное в определении 1.7.

Определение 8.1. Подпространство

$$\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{R}_+, X^*) \cap \mathcal{F}_c'(\mathbb{Z}_+, X^*)$$

назовем **дефектным подпространством** из $\mathcal{F}_c'(\mathbb{Z}_+, X^*)$.

Замечание 8.5. Из определения дефектного подпространства следует, что

$$\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \operatorname{Ker}\mathcal{D}_{X,c}^*, \ E \in CS(X). \quad (8.12)$$

Поэтому, в силу свойства 2) теоремы 7.2. получаем, что $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*)$ — насыщенное подпространство из $\mathcal{F}_c' = (\mathcal{F}_c)^*$, причем из свойства 3) леммы 7.1 вытекает, что

$$\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{X,c}} =^{\perp} \mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*). \quad (8.13)$$

Лемма 8.7. *Если семейство* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию, то* $\ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$.

Следствие 8.5. *Если* $\ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) \neq \{0\}$, *то оператор* $\mathcal{L}_E$ *и отношение* $\mathcal{D}_E$ *не являются непрерывно обратимыми для любого* $E \in CS(X)$ *в любом однородном пространстве.*

Пример 8.1. Пусть $U \in \operatorname{End} X$ — оператор, для которого существует ненулевая ограниченная последовательность $\xi : \mathbb{Z}_+ \to X^*$ такая, что $\xi(0) = 0$, $U^*\xi(n+1) = \xi(n)$, $n \geq 0$. Такая последовательность существует, если U — необратимая изометрия в гильбертовом пространстве X. Пусть $\mathcal{U}(n,m) = U^{n-m}$, $0 \leq m \leq n$ — дискретное семейство эволюционных операторов (см. замечание 8.1). Рассмотрим голоморфную функцию $f : \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \to X^*$ вида $f(\lambda) = \sum_{n\geq 0}\xi(n+1)\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{D}$. Тогда $U^*f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{D}$ и, значит, $\mathbb{D} \subset \sigma(U)$. При этом все $\lambda \in \mathbb{D}$, за исключением не более счетного множества, являются собственными значениями оператора U. Ясно, что $\xi \in \ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) \subset \operatorname{Ker}\mathcal{D}_X^*$, где отношение $\mathcal{D}_X$ строится по семейству $\mathcal{U}$ и рассматривается на пространстве $l^1(\mathbb{Z}_+, X)$. Таким образом, $\ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) \neq \{0\}$. Поскольку $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_X^* \subset l^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*)$ — ненулевое подпространство, то из свойства 3) леммы 7.1 и свойства 2) теоремы 7.2 следует, что $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_X} \neq l^1(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. следующую лемму 8.8).

Лемма 8.8. *Следующие условия эквивалентны:*

$$1)\ \overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{X,c}} = \mathcal{F}_c;$$

$$2)\mathcal{F}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}.$$

Если $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{U}(k,k-1)} = X,\ k \geq 1$, *то* $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{X,c}} = \mathcal{F}_c$ *(и, следовательно,* $\mathcal{F}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$*).*

Следствие 8.6. *Для того чтобы* $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{L}_X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ *для однородного пространства* $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, *удовлетворяющего условию* $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}_+, X)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{F}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$.

Следствие 8.7. *Если оператор* $\mathcal{D}^*_{X,c}$ *корректен в одном из однородных пространств* $\mathcal{F}'_c$, *то* $\operatorname{Im}\mathcal{D}_{X,c}$ *— замкнутое подпространство для любого однородного пространства* $\tilde{\mathcal{F}}$.

Для каждого функционала $\eta \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_E$ последовательность $\eta_c = \Phi_c(\eta) \in \mathcal{F}'_c = \mathcal{F}'_c(\mathbb{Z}_+, X^*)$ принадлежит $\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_{E,c}$ (этот факт следует, в частности, из равенств леммы 8.6). Следовательно, определено сужение $\tilde{\Phi}_c : \operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_E \to \operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_{E,c}$ оператора $\Phi_c : \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}'_c$, определенного перед леммой 8.6.

Следует отметить (и это будет использовано в дальнейшем; например, при доказательстве следующей леммы), что $\ell^1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{F}^*$. А именно, каждой последовательности $\xi \in \ell^1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ сопоставляется функционал $\bar{\xi} \in \mathcal{F}^*$, определяемый последовательностью ξ, т.е. $\left\langle x, \bar{\xi}\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left\langle x(n), \xi(n)\right\rangle$.

Лемма 8.9. *Если* $\operatorname{Codim}\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_X} = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_X = m < \infty$, *то* $\dim\operatorname{Ker}\tilde{\Phi}_c \leq m$. *Если* $\operatorname{Im}\mathcal{D}_{X,c} = \mathcal{F}_c$, *то* $\tilde{\Phi}_c$ *— сюръективный оператор, причем* $\tilde{\Phi}_c$ *— изоморфизм при дополнительном условии* $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_X} = \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

Следствие 8.8. *Если* $\mathcal{D}_X$ *— сюръективное отношение в одном из однородных пространств, то* $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_X} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ *в любом однородном пространстве* $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

Для любого замкнутого подпространства $E \subset X$ далее рассматривается содержащееся в E (см. лемму 5.5) подпространство $X_E(0)$, определенное равенствами (1.22).

Лемма 8.10. *Подпространство* $X_E(0)$ *замкнуто, если* $\mathcal{D}_0$ *— корректный оператор.*

Далее для отношения $\mathcal{D}_E$ (оператора $\mathcal{L}_E$) используется

Предположение 8.1. Подпространство $E_0 = X_E(0)$ — замкнутое дополняемое в E подпространство и

$$E = E_0 \oplus E_a = X_E(0) \oplus E_a, \qquad (8.14)$$

где E_a — замкнутое подпространство из E.

Лемма 8.11. *Если для отношения* $\mathcal{D}_E$ *выполнено предположение 8.1, то отношение* $\mathcal{D}_{E_a}$ *инъективно и* $\operatorname{Im}\mathcal{D}_{E_a} = \operatorname{Im}\mathcal{D}_E$.

Утверждение леммы непосредственно следует из определения подпространства E_0 и разложения (8.14).

Пусть $\tilde{F}$ — насыщенное подпространство из X^* и $\tilde{E} =^{\perp} \tilde{F}$. В дальнейших исследованиях важную роль будет играть подпространство из $\tilde{F}$ вида

$$X^*_{\tilde{F}}(0) = \{\xi(0) : \xi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_{\tilde{E},c}\}. \qquad (8.15)$$

Определение 8.2. Пусть для $\mathcal{D}_E$ выполнено предположение 8.1. Подпространство E_a из (8.14) называется **допустимым**, если подпространство $X^*_{\tilde{F}}(0)$, где $\tilde{F} = E_a^{\perp} \subset X^*$, является замкнутым дополняемым в $\tilde{F}$ подпространством, причем подпространство $\tilde{F}$ представимо в виде

$$\tilde{F} = E_a^{\perp} = X^*_{\tilde{F}}(0) \oplus F_s, \qquad (8.16)$$

где F_s — насыщенное подпространство из X^*. Подпространство $E_s =^{\perp} F_s$ из X называется **разрешающим** для отношения $\mathcal{D}_E$ (оператора $\mathcal{L}_E$).

Лемма 8.12. *Если* $\mathcal{D}^*_X$ *— корректный оператор, то подпространство* $X^*_{\tilde{F}}(0)$ *замкнуто в* X^* *для любого насыщенного подпространства* $\tilde{F}$ *из* X^*.

Утверждение леммы вытекает из следствия 8.3 леммы 8.5 (из оценок (8.11)) и непрерывности вложения $l^1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ в $\mathcal{F}^*_c(\mathbb{Z}_+, X^*)$ (см. включения (2.3)).

Теорема 8.3. *Пусть выполнено одно из следующих двух (эквивалентных) условий:*

1) для оператора $\mathcal{L}_E$ *выполнено предположение 8.1 и* $\gamma(\mathcal{L}_E) > 0$;

2) для отношения $\mathcal{D}_E$ *выполнено предположение 8.1 и* $\gamma(\mathcal{D}_E) > 0$,

и, кроме того, условия: 3) $\mathcal{F}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$, *4) подпространство* E_a *из разложения (8.14) является допустимым.*

Тогда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$, *оператор* $\mathcal{L}_{E_s}$ *и отношение* $\mathcal{D}_{E_s}$ *непрерывно обратимы для разрешающего подпространства* $E_s =^{\perp} F_s \subset X$, *где* F_s *взято из разложения (8.16).*

Следствие 8.9. *Пусть* X *— гильбертово пространство,* $\mathcal{D}_0$ *— корректный оператор, а* $\mathcal{D}_X$ *— сюрьективное отношение. Тогда семейство* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}_+$.

Лемма 8.13. *Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P,Q) и E — замкнутое подпространство из X. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\mathcal{D}_E &= \{x \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : x(n) = \\ &= \mathcal{U}(n,0)x_0, n \ge 0, x_0 \in \operatorname{Im} P(0) \cap E\},\end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mathcal{D}_E &= \{\tilde{y} \in \mathcal{F} : \tilde{y}(n) = y(n),\ n \ge 1, \\ \tilde{y}(0) &= P(0)y(0) - \sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{U}(0,m)Q(m)y(m) + x_0, \\ &\text{где} \in \mathcal{F},\ x_0 \in E\},\end{aligned} \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*_{E,c} &= \{\xi \in \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X^*) : \xi(n) = \\ &= \mathcal{U}(0,n)^*\xi_0, n \ge 0, \xi_0 \in \operatorname{Im} Q(0)^* \cap E^\perp\}.\end{aligned} \tag{8.19}$$

Следствие 8.10. *Если $E \supset \operatorname{Im} Q(0)$, то $\operatorname{Im}\mathcal{D}_E = \mathcal{F}$.*

Лемма 8.14. *Пусть выполнены условия леммы 8.13 и $\gamma(\mathcal{D}_E) > 0$. Тогда $\operatorname{Im} P(0) + E$ — замкнутое подпространство из X.*

Лемма 8.15. *Пусть $\mathcal{L}_E$ — фредгольмов оператор (или, что эквивалентно, $\mathcal{D}_E$ — фредгольмово отношение), и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Тогда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ и пара подпространств $(E, \operatorname{Im} P(0))$, где (P,Q) — расщепляющая пара для $\mathcal{U}$ является фредгольмовой. При этом имеют место равенства*

$$\alpha(\mathcal{L}_E) = \alpha(\mathcal{D}_E) = \dim(\operatorname{Im} P(0) \cap E), \tag{8.22}$$

$$\beta(\mathcal{L}_E) = \beta(\mathcal{D}_E) = \operatorname{Codim}(\operatorname{Im} P(0) + E), \tag{8.23}$$

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}_E = \operatorname{Ind}\mathcal{L}_E = \operatorname{ind}(\operatorname{Im} P(0), E). \tag{8.24}$$

Следствие 8.11. *Если $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ и $\mathcal{D}_E$ — фредгольмово отношение, то фредгольмовым является отношение $\mathcal{D}_{E,c}$ и верны равенства: $\alpha(\mathcal{D}_{E,c}) = \alpha(\mathcal{D}_E)$, $\beta(\mathcal{D}_{E,c}) = \beta(\mathcal{D}_E)$, $\operatorname{ind}\mathcal{D}_E = \operatorname{ind}\mathcal{D}_{E,c}$.*

Следствие 8.12. *Если $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ и $\mathcal{D}_E$ — фредгольмово отношение, то $\operatorname{Im}\mathcal{D}_X = \mathcal{F}$.*

Теорема 8.4. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{L}_E$ — фредгольмов оператор и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

2) $\mathcal{D}_E$ — фредгольмово отношение и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

3) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ (или на $\mathbb{R}_+$) с такой расщепляющей парой (P,Q), что пара подпространств $(E, \operatorname{Im} P(0))$ из X является фредгольмовой.

Следствие 8.13. *Если оператор $\mathcal{L}_E$ (отношение $\mathcal{D}_E$) фредгольмов на одном из однородных пространств и $\ell^\infty_{\text{def},\mathcal{U}} = \{0\}$, то $\mathcal{L}_E$ и $\mathcal{D}_E$ фредгольмовы на любом однородном пространстве и их индекс не зависит от выбора однородного пространства.*

Теперь остановимся на доказательстве теоремы 1.5.

Теорема 8.5. *Если оператор $\mathcal{L}_E$ фредгольмов и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ в однородном пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, то он фредгольмов во всех остальных однородных пространствах и индекс оператора $\mathcal{L}_E$ не зависит от вида однородного пространства.*

Замечание 8.6. Если семейство U обладает свойством $\overline{\operatorname{Im} U(k,k-1) = X}$, $k \ge 1$, то из леммы 8.8 следует свойство $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Поэтому для такого семейства $\mathcal{U}$ во всех утверждениях этого параграфа (теоремы 8.3—8.5, лемма 8.15, следствие 8.11) требование $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ следует опустить.

Пример 8.2. Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = -d/dt + a(t)$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{C}_b(\mathbb{R}_+) = \mathbb{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, где $a \in S^1(\mathbb{R}_+)$ обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+1} |a(\tau)|\, d\tau = 0$ (см. пример 10.1). Тогда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \mathbb{C}$ имеет вид $\mathcal{U}(t,s) = \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right)$, $0 \le s \le t$, и соответствующее дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ разностное отношение $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ определяет следующими равенствами

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathbb{C}} &= \{(x,y) \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+) \times \ell^\infty(\mathbb{Z}_+) : y(n) = \\ &= x(n) - b(n)x(n-1),\ n \ge 1\},\end{aligned}$$

где $b(n) = \exp\int_{n-1}^n a(\tau)d\tau$, $n \ge 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b(n) = 1$. Поскольку $b(n) \ne 0$, $n \ge 1$, то из леммы 8.8 следует, что $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{\mathbb{C},c}} = c_0(\mathbb{Z}_+) = F_c(\mathbb{Z}_+)$. Докажем, что $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} \ne \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ и, более того, $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+)/\overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}$ — бесконечномерное пространство. Для этого рассмотрим последовательность функционалов

$$\xi_N : \ell^\infty \to \mathbb{C},\ \xi_N y = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^N y(i),\ y \in \ell^\infty,\ N \ge 1.$$

Отметим, что $\|\xi_N\| = 1$, $N \ge 1$, и единичная сфера из $(\ell^\infty)^*$ слабо* компактна. Пусть ξ_∞ — одна из слабо*-предельных точек последовательности (ξ_N), т.е. существует последовательность (N_k) из $\mathbb{N}$ такая, что

$$\xi_\infty(x) = \lim_{N_k\to\infty}\xi_{N_k}(x),\ x \in \ell^\infty,\ \|\xi_\infty\| = 1.$$

Ясно, что $\xi_\infty \in c_0(\mathbb{Z})^\perp$ и, кроме того, $\xi_\infty \in \overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}^\perp_{\mathbb{C}}}$. Поскольку множество полученных предельных

точек бесконечно и их линейные комбинации образуют бесконечномерное подпространство, то $\dim \ell^\infty / \overline{\operatorname{Im} \mathcal{D}_{\mathbb{C}}} = \infty$.

Таким же образом, рассматривая последовательность функционалов $\overline{\xi}_N(x) = \frac{1}{N}\int_0^N x(\tau)d\tau$, $x \in C_b(\mathbb{R}_+)$, $N \geq 1$, устанавливается, что $\overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_{\mathbb{C}}} \neq C_b(\mathbb{R}_+)$.

§ 9. ПОЛУГРУППА ОТНОШЕНИЙ $\mathcal{T}_E$ И ОПЕРАТОР $\mathcal{L}_E$

Пусть $E \in CS(X)$ и $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F})$ — отображение, определенное формулой (1.13), $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство функций. При доказательстве формулируемых здесь утверждений приходится учитывать несколько различающиеся подходы к определению полугруппы $\mathcal{T}_E$ на пространствах измеримых и непрерывных функций $C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$. При исследовании оператора $\mathcal{L}_E$ методами теории полугрупп отношений существуют проблемы, связанные с тем, что полугруппы отношений до сих пор не рассматривались. Здесь учитывается специфика полугруппы $\mathcal{T}_E$, что позволяет при определенных условиях свести ее изучение к изучению двух полугрупп операторов.

Далее используется определение 1.1 полугруппы отношений.

Лемма 9.1. *Отображение $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F})$ является полугруппой отношений на однородном пространстве $\mathcal{F}$.*

Хотя в общем случае отсутствует определение генератора полугруппы отношений, тем не менее оператор $\mathcal{L}_E$ обычно играет роль генератора полугруппы отношений $\mathcal{T}_E$. Подтверждением этого факта служит следующая теорема об отображении спектра для полугруппы $\mathcal{T}_E$ (см. также теорему 9.3).

Теорема 9.1. *Для любого $t > 0$ спектр $\sigma(\mathcal{T}_E(t))$ отношения $\mathcal{T}_E(t)$ и оператора $\mathcal{L}_E$ связаны равенством*

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{T}_E(t)) \setminus \{0\} &= \exp t\sigma(\mathcal{L}_E) = \\ &= \{\exp \lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_E)\}.\end{aligned} \tag{9.1}$$

Спектр $\sigma(\mathcal{L}_E)$ оператора $\mathcal{L}_E$ допускает одно из следующих представлений:

1) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \mathbb{C}$;

2) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq \ln \chi_g(\mathcal{U})\}$, *если и только если* $E = \{0\}$. *При этом, если* $\chi_g(\mathcal{U}) = -\infty$, *то* $\sigma(\mathcal{L}_0) = \varnothing$;

3) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha_0\}$ *для некоторого* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, *причем это равенство имеет место тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ состоит из непрерывно обратимых операторов $\mathcal{U}(t,s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$, удовлетворяющих оценкам* (6.35);

4) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_2\}$ *для некоторых* $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Определение 9.1. Будем говорить, что полугруппа отношений $\mathcal{T} : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{X})$ ($\mathcal{T}$ — банахово пространство) **гиперболична**, если существует разложение пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_- \oplus \mathcal{X}_+$ замкнутых инвариантных относительно отношений $\mathcal{T}(t)$, $t \geq 0$, подпространств $\mathcal{X}_-$ и $\mathcal{X}_+$ таких, что сужения

$$\mathcal{T}_-(t) = \mathcal{T}(t) \mid \mathcal{X}_-,\ \mathcal{T}_+(t) = \mathcal{T}(t) \mid \mathcal{X}_+,\ t \geq 0$$

порождают полугруппы $\mathcal{T}_-$, $\mathcal{T}_+$ со следующими свойствами: $\mathcal{T}_- : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}_-$ - полугруппа операторов, отношения $\mathcal{T}_+(t)$, $t \geq 0$, непрерывно обратимы и полугруппы операторов $\mathcal{T}_-$, $\tilde{\mathcal{T}}_+ : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}_+$, $\tilde{\mathcal{T}}_+(t) = \mathcal{T}_+(t)^{-1}$, $t \geq 0$, допускают оценки вида

$$\max\left\{\|_-(t)\|, \|\tilde{\mathcal{T}}_+(t)\|\right\} \leq M_0 e^{wt},\ t \geq 0 \tag{9.2}$$

для некоторых постоянных $M_0 > 0$, $w < 0$. Полученные разложения назовем **ассоциированными** с гиперболической полугруппой $\mathcal{T}$.

Отметим, что определение гиперболического оператора давалось в статьях [42]—[44].

Теорема 9.2. *Полугруппа отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ гиперболична тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих (эквивалентных) условий:*

1) семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q), для которой $\operatorname{Im} Q(0) = E$;

2) $0 \in \rho(\mathcal{L}_E)$;

3) $1 \in \rho(\mathcal{T}_E(t))$ при некотором $t > 0$.

Следствие 9.1. *Если выполнено условие 1) теоремы 9.2, то полугруппа отношений $\mathcal{T}_E$ допускает представление (9.4) относительно (9.3), где полугруппы операторов $\mathcal{T}_-$ и $\tilde{\mathcal{T}}_+$ имеют вид (9.5) и (9.6) соответственно.*

Замечание 9.1. Если $\rho(\mathcal{L}_E) \neq \varnothing$, то из теоремы 9.1 следует, что $\rho(\mathcal{L}_E) \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ и пусть $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_E) \cap \mathbb{R}$. Тогда из теоремы 9.2 следует гиперболичность полугруппы $\mathcal{T}_{E,\lambda}(t) = e^{-\lambda t}\mathcal{T}_E(t)$ (из-за обратимости оператора $\mathcal{L}_E - \lambda I$).

Определение 9.2. Полугруппу отношений $\mathcal{T} : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{X})$ назовем **гиперболичной в точке** α из $\mathbb{R}$, если полугруппа $\mathcal{T}_\alpha(t) = e^{-i\alpha t}\mathcal{T}(t)$, $t \geq 0$, гиперболична. Дополнение в $\mathbb{R}$ множества гиперболических точек называется **спектром Боля** полугруппы $\mathcal{T}$ (или семейства $\mathcal{U}$).

Определение 9.3. Пусть $\mathcal{T} : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{X})$ — гиперболическая в некоторой точке $\alpha \in \mathbb{R}$ полугруппа отношений, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\alpha,-} \oplus \mathcal{X}_{\alpha,+}$, $\mathcal{T}_\alpha(t) = \mathcal{T}_{\alpha,-}(t) \oplus \mathcal{T}_{\alpha,+}(t)$, $t \geq 0$ — ассоциированные с гиперболической полугруппой $\mathcal{T}_\alpha$ разложения. Допустим, что полугруппы операторов $\mathcal{T}_{\alpha,-} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}_{\alpha,-}$, $\mathcal{T}_{\alpha,+} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}_{\alpha,+}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha,+}(t) = \mathcal{F}_{\alpha,+}(t)^{-1}$, $t \geq 0$, — полугруппы класса C_0 и $A_{\alpha,-} : D(A_{\alpha,-}) \subset \mathcal{X}_{\alpha,-} \to \mathcal{X}_{\alpha,-}$, $A_{\alpha,+} : D(A_{\alpha,+}) \subset \mathcal{X}_{\alpha,+} \to \subset \mathcal{X}_{\alpha,+} \to \mathcal{X}_{\alpha,+}$ — их генераторы. Тогда оператор

$$A_\alpha = A_{\alpha,-} \oplus (-A_{\alpha,+}) + \alpha I : D(A_\alpha) = \\ = D(A_{\alpha,-}) \oplus D(A_{\alpha,+}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

назовем **генератором полугруппы отношений** $\mathcal{F}$.

Замечание 9.2. Из замечания 9.1. и теоремы 9.2. следует, что гиперболичность в точке $\alpha \in \mathbb{R}$ полугруппы отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \to \to LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ эквивалентно тому, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_\alpha(t,s) = e^{-\alpha(t-s)}\mathcal{U}(t,s)$, $s,t \in \Delta_+$, допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P_α, Q_α) с $\operatorname{Im} Q_\alpha(0) = E$. Далее без ограничения общности можно считать $\alpha = 0$. Возникающие при этом ассоциированные разложения связаны с подпространствами $\mathcal{F}_- = \operatorname{Im} \mathcal{P}$, $\mathcal{F}_+ = \operatorname{Ker} \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ — проектор умножения на функцию P), а соответствующие полугруппы $\mathcal{T}_- = \mathcal{F}_{E,-}$, $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_{E,+}$ определены равенствами (9.5) и (9.6). Пусть однородное пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обладает свойствами: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ и операторы $S(t)$, $t \geq 0$ и $\tilde{S}(-t)$, $t \geq 0$, сильно непрерывны в $\mathcal{F}$. Такими пространствами являются, например, $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_{00}((\mathbb{R}_+, X))$. Тогда полугруппы $\mathcal{F}_-, \mathcal{F}_+$ принадлежат классу C_o и, из статьи [20] (для полугруппы $\mathcal{T}_-$) и статьи [19, I] (для полугруппы $\mathcal{T}_+$) следует, что генератором полугруппы $\mathcal{T}_- : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{F}_-$ является сужение $\mathcal{L}_E \mid \mathcal{F}_-$ оператора $\mathcal{L}_E$ на $\mathcal{F}_-$, а генератором полугруппы $\mathcal{T}_+ : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{F}_+$ оператор $-\mathcal{L}_E \mid \mathcal{F}_+$.

Из замечания 9.2 следует

Теорема 9.3. *Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство функций обладает свойствами из замечания 9.2 и $\mathcal{F}_E : \mathbb{R}_+ \to LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ — группа отношений, гиперболичная в точке α. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ — генератор этой полугруппы.*

§ 10. ОПЕРАТОРЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим периодическое периода 1 семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End} X$, т.е. $\mathcal{U}(t+1, s+1) = \mathcal{U}(t,s)$ для всех $s,t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию $0 \leq s \leq t < \infty$. В частности, периодическое семейство $\mathcal{U}$ отвечает дифференциальному уравнению (1.1) с периодической периода 1 функцией A. Если семейство $\mathcal{U}$ зависит только от разности аргументов, то оно представимо в виде

$$\mathcal{U}(t,s) = U(t-s), \ 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (10.1)$$

где $U : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$ — сильно непрерывная полугруппа операторов класса C_0 (см. [21]). Её генератор обозначим через A_0.

Для периодического семейства $\mathcal{U}$ отношение $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ имеет вид

$$\mathcal{D}_E = \{(x,y) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : y(n) = \\ = \begin{Bmatrix} x(n) - \mathcal{U}(1,0)x(n-1), \ n \geq 1, \\ x(0) + x_0, \ n = 0, \ x_0 \in E \end{Bmatrix},$$

где $\mathcal{U}(1,0) = U(1)$, если семейство $\mathcal{U}$ имеет вид (10.1), т.е. отвечает дифференциальному оператору $\mathcal{L} = -d/dt + A_0$.

Следующая теорема позволяет заменить условие экспоненциальной дихотомии периодического семейства $\mathcal{U}$ условием

$$\sigma(\mathcal{U}(1,0)) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \quad (10.2)$$

Теорема 10.1. *Для того чтобы периодическое периода 1 семейство $\mathcal{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10.2).*

При выполнении условия (10.2) для оператора $\mathcal{U}(1,0)$ подпространство $X_s = \operatorname{Im} P_{\text{int}}$ называется **устойчивым**, а подпространство $X = \operatorname{Ker} P_{\text{int}}$ — **неустойчивым**.

Замечание 10.1. Доказанная лемма позволяет переформулировать все утверждения данной статьи, в которых использовалось условие экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$, заменив его условием (10.2) для оператора $\mathcal{U}(1,0)$ (для оператора $U(1)$, если семейство $\mathcal{U}$ имеет вид (10.1)). Кроме того, отметим, что утверждение теоремы (10.1) остается верным, если условие периодичности семейства $\mathcal{U}$ заменить условием: $\mathcal{U}(n, n-1) = \mathcal{U}(1,0)$, $n \geq 2$.

Замечание 10.2. Непосредственно из определения 1.7 дефектного подпространства для $\mathcal{U}$ следует, что оно представимо в виде

$$\ell^{\infty}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{\xi \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) : \xi(0) = \\ = 0, \xi(n) = \mathcal{U}(1,0)^* \xi(n+1),\ n \geq 0\}.$$

Тогда функция

$$f : \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \to X^*,$$
$$f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \xi(n+1)\lambda^n,\ \lambda \in \mathbb{D}$$

является голоморфной и имеют место равенства

$$(\mathcal{U}(1,0)^* - \lambda I) f(\lambda) = 0,\ \lambda \in \mathbb{D}. \qquad (10.5)$$

Следовательно, если $\ell^{\infty}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) \neq \{0\}$, то $\sigma(\mathcal{U}(1,0)) = \sigma(\mathcal{U}(1,0)^*) \supset \overline{\mathbb{D}}$, причем дискретный спектр оператора $\mathcal{U}(1,0)^*$ заполняет $\mathbb{D}_r = \{\lambda \in \mathbb{D} : |\lambda| < r\}$ для $r < 1$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Равенство (10.5) при $f \neq 0$ означает, что оператор $\mathcal{U}(1,0)^*$ не обладает свойством единственности разложения (см. [46]) и поэтому он не может быть разложимым по Фойашу [46]. В частности $\ell^{\infty}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$, если выполнено одно из следующих условий: 1) $\rho(\mathcal{U}(1,0)) \cap \mathbb{D} \neq \varnothing$, 2) $\mathcal{U}(1,0)$ - компактный оператор, 3) замыкание дискретного спектра оператора $\mathcal{U}(1,0)^*$ не содержит $\mathbb{D}$.

В связи с замечанием 10.1 отметим, например, следующий результат, вытекающий из теорем 8.4 и 10.1.

Теорема 10.2. *Пусть $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \mathrm{End}\, X$ — периодическое семейство эволюционных операторов. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{L}_E$ — фредгольмов оператор и $\mathcal{F}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

2) $\sigma(\mathcal{U}(1,0)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ и подпространства E, $\mathrm{Im}\, P_{\mathrm{int}}$, где P_{int} — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\mathrm{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{U}(1,0)) : |\lambda| < 1\}$ для оператора $\mathcal{U}(1,0)$, образуют фредгольмову пару.

При выполнении одного из этих условий $\mathrm{Ind}\, \mathcal{L}_E = \mathrm{ind}(E, \mathrm{Im}\, P_{\mathrm{int}})$. Если $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$, то условие 2) эквивалентно условию фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_E$.

Следствие 10.1. *Если оператор $\mathcal{L}_{E,c}$ фредгольмов, то фредгольмов оператор $\mathcal{L}_E$ и их индексы совпадают.*

Непосредственно из теоремы 8.3 и леммы 8.13 следует

Теорема 10.3. *Семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{L}_0$ в одном из однородных пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обладает следующими свойствами:*

1) оператор $\mathcal{L}_0$ корректен;

2) $\mathcal{F}_{\mathrm{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

3) подпространство $X^*(0) = \{\xi(0) : \xi \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{D}^*_{0,c}\}$ замкнуто, и существует насыщенное подпространство F_s из X^* такое, что $X^* = X^*(0) \oplus F_s$.

Теорема 10.4. *Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\overline{\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_E} = \mathrm{Im}\, \mathcal{L}_E$;

2) $\overline{\mathrm{Im}\, P(0) + E} = \mathrm{Im}\, P(0) + E$.

Эквивалентность условий непосредственно следует из леммы 8.14 и теоремы 1.5 (см. свойство 3)).

Центральное место в проводимых исследованиях занимает свойство экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$. Для периодического семейства $\mathcal{U}$ из теоремы 10.1 следует, что оно эквивалентно условию (10.2) на спектр оператора $\mathcal{U}(1,0)$. Если $\mathcal{U}(t,s) = T(t-s)$, $t \geq s$, где $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, X$ — полугруппа класса C_0, то условие (10.1) влечет свойство

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing, \qquad (10.6)$$

где A — генератор полугруппы T. Если X — гильбертово пространство и выполнено дополнительное к (10.6) условие

$$\sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|R(\lambda, A)\| < \infty, \qquad (10.7)$$

то $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ в силу теоремы Герхарда [15, теорема 2.10]. Таким образом, в этом случае семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию. Совместное выполнение условий (10.6) и (10.7) не всегда влечет выполнения свойства (10.2) для $\mathcal{U}(1,0) = T(1)$ (см. [15], [21]).

Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющимися парами $(P, Q), (\tilde{P}, \tilde{Q})$. Из определения экспоненциальной дихотомии следует, что $\mathrm{Im}\, P(t) = \mathrm{Im}\, \tilde{P}(t)$, $t \geq 0$; поэтому имеют место равенства

$$\begin{gathered} P(t)\tilde{P}(t) = \tilde{P}(t), \tilde{P}(t)P(t) = P(t), \\ Q(t)\tilde{P}(t) = \tilde{Q}(t)P(t) = 0,\ t \geq 0. \end{gathered} \qquad (10.8)$$

Рассмотрим сильно непрерывные ограниченные функции $\Psi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, X$, $k = 1, 2$, вида

$$\Psi_1(t) = \hat{P}(t) + Q(t),$$
$$\Psi_2(t) = P(t) + \hat{Q}(t),\ t \geq 0$$

и операторы $\bar{\Psi}_k \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, $k = 1,2$, умножения на эти функции. Из равенств (10.8) следует, что $\bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_2 = \bar{\Psi}_2\bar{\Psi}_1 = I$, а из формул (1.18) и (6.6) получаем равенства

$$\mathcal{L}^{-1}_{\operatorname{Im}Q(0)}\bar{\Psi}_1 = \bar{\Psi}_1\mathcal{L}^{-1}_{\operatorname{Im}\tilde{Q}(0)}, \qquad (10.9)$$

$$\mathcal{D}^{-1}_{\operatorname{Im}Q(0)}\tilde{\Psi}_1 = \tilde{\Psi}_1\mathcal{D}^{-1}_{\operatorname{Im}\tilde{Q}(0)}, \qquad (10.10)$$

$$P(t)\Psi_1(t) = \Psi_1(t)\tilde{P}(t),\ t \ge 0, \qquad (10.7)$$

где $\tilde{\Psi}_1 : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ — оператор умножения сужения на $\mathbb{Z}_+$ функции Ψ_1. Равенства (10.9)—(10.11) означают подобие соответствующих операторов и отношений (см. определение 4.7).

Таким образом, имеет место

Теорема 10.5. *Оператор $\mathcal{L}_{\operatorname{Im}Q(0)}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\operatorname{Im}\tilde{Q}(0)}$, а отношение $\mathcal{D}_{\operatorname{Im}Q(0)}$ подобно отношению $\mathcal{D}_{\operatorname{Im}\tilde{Q}(0)}$ и имеют место равенства (10.10)—(10.11).*

Использованию сопряженного оператора $\mathcal{L}_E^*$ мешает несколько обстоятельств. Во-первых, это описание сопряженных пространств к однородным пространствам функций (см. [48; гл. 8] для пространств $L^p(\mathbb{R}_+, X), p \in [1,\infty)$). Кроме того, при определении $\mathcal{L}_E^*$ используется сопряженное семейство $\mathcal{U}^* : \Delta_+ \to \operatorname{End}X^*$, $\mathcal{U}^*(t,s) = \mathcal{U}(t,s)^*, (t,s) \in \Delta_+$, эволюционных операторов, которое может не быть сильно непрерывным для нерефлексивного пространства X. Однако, если оно сильно непрерывно, то $\mathcal{U}^*$ является семейством эволюционных операторов «назад» и с его помощью, естественным образом определяется оператор $\mathcal{L}'_{E,c} : \mathcal{F}(\mathcal{L}'_E) \subset \mathcal{F}'_c \to \mathcal{F}'_c = \mathcal{F}'_c(\mathbb{R}_+, X^*)$, (см. [19]), который является сопряженным к оператору $\mathcal{L}_{E,c}$ для рефлексивного X. Для операторов $\mathcal{L}'_{E,c}$ и $\mathcal{D}^*_{E,c}$ могут быть получены аналоги соответствующих результатов из 5 и на их основе доказан следующий аналог теоремы 8.2.

Теорема 10.6. *Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ и семейство $\mathcal{U}^* : \Delta_+ \to \operatorname{End}X^*$ сильно непрерывно. Если оператор $\mathcal{L}_E$ корректен (инъективен) и оператор $\mathcal{L}'_E$ инъективен (соответственно корректен), то операторы $\mathcal{L}_E, \mathcal{L}'_E$ непрерывно обратимы в любом однородном пространстве функций.*

Рассмотрим несколько примеров операторов, к которым применимы полученные результаты

Пример 10.1. Пусть $E \in CS(X)$ и функция $A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}X$ принадлежит пространству Степанова $S^1(\mathbb{R}_+, \operatorname{End}X)$. Тогда (см. [3]) существует семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End}X$, которое решает задачу Коши (1.1), (1.4). Следовательно, для любого однородного пространства функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ определен оператор $\mathcal{L}_E$. Если $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \operatorname{End}X)$ и $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ — однородное пространство измеримых функций, то $D(\mathcal{L}_E) = \mathcal{F}^1(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) : x$ абсолютно непрерывна и $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)\}$. Это же равенство задает область определения оператора $\mathcal{L}_E$, если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_b(\mathbb{R}_+, X)$ и $A \in C_b(\mathbb{R}_+, \operatorname{End}X)$.

Пример 10.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1), где $X = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ и Ω — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Семейство линейных дифференциальных операторов

$$A(t) : H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega),\ t \ge 0$$

(где $H_0^m(\Omega)$, $H^{2m}(\Omega)$ — пространства Соболева $m \ge 1$ [5]) определено с помощью семейства дифференциальных выражений

$$(\ell_t y)(n) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(t,u)(D^\alpha y)(u),\ t \ge 0$$

и задачей Дирихле на границе $\partial\Omega$ области Ω. Функции $a_\alpha : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{C}$, $|\alpha| \le 2m$, принадлежат пространству $C_b(\mathbb{R}_+, C^k(\Omega))$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$, и удовлетворяют условию Липшица как функции первой переменной. Более того, предположим, что семейство дифференциальных выражений ℓ_t, $t \ge 0$, равномерно эллиптично.

Из сделанных предположений следует, что эллиптические операторы $A(t)$, $t \ge 0$, являются генераторами аналитических полугрупп операторов и, более того, выполнены, условия теоремы Соболевского—Танабе [47], из которой следует, что рассматриваемая задача Коши на $\mathbb{R}_+$ корректно определена и существует семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End}L_2(\Omega)$, которое решает рассматриваемую задачу Коши. Поэтому определен оператор $\mathcal{L}_E = -d/dt + A(t)$ в любом из однородных пространств функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и, следовательно, к нему применимы полученные здесь результаты.

Пример 10.3. (системы дифференциальных уравнений, корректные по Петровскому). Пусть $p(\xi) = (p_{\ell j})_{k,j=1}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, — матрица, элементами которой служат полиномы $p_{kj} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $p_{kj}(\xi) = \sum_{|\alpha| \le N_{kj}} a_\alpha \xi^\alpha$. Здесь $\alpha \in \mathbb{N}_+^n$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, зависящее от k и j. В гильбертовом пространстве оператор $A = p(i\partial)$, $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, $i^2 = -1$, опре-

деляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}$ формулой $A = \mathcal{F}^{-1}p(\cdot)\mathcal{F}$ и он является оператором с матричными коэффициентами с символом p. Говорят, что A корректен по Петровскому, если для некоторого $\omega \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(p(\xi))$ матрицы $p(\xi)$ удовлетворяет включению $\sigma(p(\xi)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \le \omega\}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае A порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} L_2(\mathbb{R}^n)$ и имеет область определения $D(A)$, совпадающую с пространством Соболева $W_2^N(\mathbb{R}^n)$ порядка N. Эта полугруппа гиперболична (оператор $T(1)$ обладает свойством $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$), если множества $\sigma(p(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, равномерно отделены от $i\mathbb{R}$. Тогда семейство $\mathcal{U}(t,s) = T(t-s)$, $s \le t$, $s,t \in \mathbb{R}_+$, допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$. В этом случае устойчивые и неустойчивые подпространства бесконечномерны, если они ненулевые.

Пример 10.4. Как уже отмечалось в § 1, изучение спектральных свойств дифференциального оператора $\mathcal{L}_E$ связано с изучением оператора Винера—Хопфа. Пусть $S : L^p(\mathbb{R}_+, X) \to L^p(\mathbb{R}_+, X) = L^p$ — оператор Винера—Хопфа

$$(Sx)(t) = x(t) - \int_0^\infty \mathcal{K}(t-s)x(s)ds, \ t \in \mathbb{R}_+, \ x \in L^p,$$

ядро которого $\mathcal{K} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ суммируемо и имеет символ

$$W(\lambda) = I - \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\mathcal{K}(t)dt, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

вида

$$W(\lambda) = I - NR(\lambda, A)M, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad (10.12)$$

где $iA : D(A) \subset Y \to Y$ (Y — вспомогательное банахово пространство) — генератор полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} Y$ класса C_0, для которой выполнено условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ (и, следовательно, $\sigma(A) \cap \mathbb{R} = \varnothing$.) Линейные операторы $M : X \to Y$, $N : Y \to X$ являются ограниченными. В частности, при $X = \mathbb{C}^m$ в работе [22; раздел XIII.4] доказано, что если символ W является рациональной функций, то такое представление возможно для некоторых операторов $A \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$, $M : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$. Выбор подходящего банахова пространства X позволяет любую функцию $W = I - \hat{\mathcal{K}}$, голоморфную в области $\mathbb{C}_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha\}$ представить в виде (10.12) при $Y = \mathbb{C}$. Нетрудно установить (см. [22; лемма 18.5.1] для $X = \mathbb{C}^n$), что оператор S представим в виде

$$S = I + i\tilde{N}\mathcal{L}_E^{-1}\tilde{M},$$

где $\tilde{M} : L^p(\mathbb{R}_+, X) \to L^p(\mathbb{R}_+, Y)$, $\tilde{N} : L^p(\mathbb{R}_+, Y) \to L^p(\mathbb{R}_+, X)$ — операторы умножения на операторы M и N соответственно,

$$\mathcal{L}_E = -d/dt + iA : D(\mathcal{L}_E) \subset L^p(\mathbb{R}_+, Y) \to L^p(\mathbb{R}_+, Y), \ E = \operatorname{Im} P_{\text{out}},$$

где P_{out} — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| > 1\}$ для оператора $T(1)$.

Это представление позволяет установить, что имеет место (см. [22, теорема 18.5.3] для $X = \mathbb{C}^n$)

Теорема 10.7. *Пусть* $\tilde{\mathcal{L}}_E = \mathcal{L}_E - MN = -d/dt + A - MN : D(\mathcal{L}_E) \subset L^p(\mathbb{R}_+, X) \to L^p(\mathbb{R}^+, X)$, $p \in [1, \infty]$. *Тогда*

$$\operatorname{Ker} S = N(\operatorname{Ker}\tilde{\mathcal{L}}_E), \ \operatorname{Im} S = M^{-1}(\operatorname{Im}\tilde{\mathcal{L}}_E)$$

и оператор S фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\tilde{\mathcal{L}}_E$, при этом их индексы совпадают. В частности, S обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\tilde{\mathcal{L}}_E$ и в этом случае $S^{-1} = I - i\tilde{N}\tilde{\mathcal{L}}_E^{-1}\tilde{M}$.

Аналогичный подход можно осуществить при исследовании тёплицевых операторов, действующих в пространствах $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Только теперь при их изучении будет использоваться отношение $\mathcal{D}_E \in LR\ell^p$ для подходящего $E \in CS(X)$.

Возникает естественный вопрос: влечет ли фредгольмовость оператора $\mathcal{L}_E$ (отношения $\mathcal{D}_E$) для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ экспоненциальную дихотомию семейства $\mathcal{U}$. Отрицательный ответ дает

Пример 10.5. Пусть $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset X \to X$ - генератор полугруппы операторов $T_0 : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$ класса C_0, для которой $T_0(1)$ - фредгольмов оператор, причем $\operatorname{Ker} T_0(1)^* \ne \{0\}$. Рассмотрим функцию $A(t) = A_0$, $t \in [0,1)$, $A(t) = (\ln 2)I$, $t \in [1, \infty)$ и дифференциальный оператор $\mathcal{L}_X = -d/dt + A(t)$ в одном из однородных пространств функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$. Тогда $\mathcal{U}(1,0) = T_0(1)$, $\mathcal{U}(n, n-1) = 2I$, $n \ge 2$, и соответствующее разностное отношение $\mathcal{D}_X \in LRC\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ определяется равенствами

$$\mathcal{D}_X = \{(x,y) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : y(n) = x(n) - 2x(n-1), \ n \ge 2, \ y(1) = x(1) - T_0(1)x(0)\}$$

Семейство $\mathcal{U}$ допускает тривиальную экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{N}$ с $P = 0$ и $Q = I$, и поэтому имеют место представления

$$\operatorname{Ker}\mathcal{D}_X = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : x(0) \in \in \operatorname{Ker} T_0(1), x(k) = 0, k \geq 1\};$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{D}_X = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : f(1) \in \operatorname{Im} T_0(1)\} = \overline{\operatorname{Im}\mathcal{D}_X},$$

$$\ell^\infty_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X) = \operatorname{Ker}\mathcal{D}_X^* = \{\xi \in \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X) : \xi(0) = 0, \xi(1) \in \operatorname{Ker} T_0(1)^*,\ \xi(n) = 2^{-n+1}\xi(1),\ n \geq 2\} \neq \{0\}.$$

Таким образом, $\mathcal{D}_X$ — фредгольмово отношение, а из леммы 8.7 следует, что семейство $\mathcal{U}$ не допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$.

Пример 10.6. Пусть $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — невозрастающая непрерывная ненулевая функция с компактным носителем, $X = \mathbb{C}$ и семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to \operatorname{End} X$ определим равенствами: $\mathcal{U}(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$, если $U(s) \neq 0$, $\mathcal{D}(t,s) = 0$, если $U(s) = 0$, $0 \leq s \leq t < \infty$. Тогда $\mathcal{U}$ не может решать задачу Коши (1.4) для любого дифференциального уравнения вида (1.1) с $A \in S^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z., 32 : 3(1930), P. 465-473.

2. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства // М.: Мир, 1970.

3. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука, 1970.

4. *Жиков В.В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем., 40:6(1976), С. 1380—1408.

5. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений // М.: Мир, 1985.

6. *Howland J.S.* Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians // Math. Ann., 207(1974), P. 315—335.

7. *Rau R.* Hyperbolic evolutionary semigroups on vector-valued function spaces // Semigroup Forum., 48(1994), P. 107—118.

8. *Latushkin.Y., Montgomery-Smith.* Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces // J. Funct. Anal., 127(1995), P. 173—197.

9. *Latushkin.Y., Randolph T., Schnaubelt R.* Exponential dichotomy and mild sulutions of nonautonomous equations in Banach spaces // J. Dynam. Diff. Eq., 10(1998), P. 489—510.

10. *Nagel R.* Semigroup methods for non-autonomous Cauchy problems in Evolution Equations // Lect. Notes Pure Appl. Math., 168(1995), P. 301—316.

11. *Тюрин В.М.* Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб. матем. журн., 32:3(1991), P. 160—165.

12. *Räbiger F., Schnaubelt R.* The spectral mapping theorem for evolution semigroups on spaces of vector-valued functions // Semigroup Forum., 48(1996), P. 225—239.

13. *Латушкин Ю.Д., Степин А.М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем // Успехи матем. наук., 46:2(1991), С. 85-143.

14. *Nguyen Van Minh, Räbiger F., Schnaubelt R.* Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line // Integr. equ. theory, 32(1998), P. 332—353.

15. *Chicone C., Latushkin Y.* Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations // Amer. Math. Soc., 1999.

16. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов // Докл. РАН., 343:3(1995), С. 295—298.

17. *Баскаков А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил., 30:3(1996), С. 1—11.

18. *Баскаков А.Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Матем. зам., 59:6(1996), С. 811—820.

19. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов. 1 // Дифференц. уравнения. 33:10(1997), 1299—1306; II, 37:1(2001), С. 3—11.

20. *Баскаков А.Г.* О корректности линейных дифференциальных операторов // Матем. сб., 190:3(1999), С. 3—28.

21. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы // М.: Иностранная литература, 1962.

22. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A.* Classes of Linear Operators // Vol. I. Basel—Boston—Berlin. Birkhaser Verlag, 1990.

23. *Minh N.V., Huy N.T.* Characterization of Dichotomies of Evolution Equations on the Half-Line // J. Math. Anal. and Appl, 261(2001), P. 28—43.

24. *Latuskin.Y., Tomilov Y.* Fredholm Properties of Evolution Semigroups // Illinois J. Math., 48:3(2004), P. 999—1020.

25. *Бирман М.Ш.* Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна), М.: Наука, 1972.

26. *Крейн С.Г., Семенов Е.М., Петунин Ю.И.* Интерполяция линейных операторов // М.: Наука, 1978.

27. *Баскаков А.Г., Криштал И.А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН, сер. матем., 69:3(2005), С. 3—54.

28. *Баскаков А.Г.* Теория представления банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // М., Современная математика. Фундаментальные направления, 9(2004), С. 3—151.

29. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденые полугруппы операторов // Матем. сб., 193:11(2002), С. 3—42.

30. *Cross R.* Multivalued Linear Operators // М.: Dekker, New York, 1998.

31. *Favini A., Yagi A.* Degenerate Differential Equations in Banach Spaces // М.: Dekker, New York, 1998.

32. *Кутателадзе С.С.* Основы функционального анализа // Изд-во ин-та математики, Новосибирск, 2001.

33. *Megan M., Sasu A. L., Sasu B.* Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families // Discrete Contin. Dynam. Systems, 9(2003), P. 383—397.

34. *Latushkin.Y., Tomilov Y.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients // J. Differential Equations, 208(2005), P. 388—429.

35. *Taylor A.E.* Introduction to Functional Analysis // John Wiley, New York, 1958.

36. *Goldberg S.* Unbounded Linear Operators. Theory and Applications // McGraw-Hill, New York, 1966.

37. *Рудин У.* Функциональный анализ // М.: Мир, 1975.

38. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства // М.: Мир, 1967.

39. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория // М.: Иностранная литература, Т. 1, 1962.

40. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений // М.: Мир, 1979.

41. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов // М.: Мир, 1972.

42. *Bart H., Gohberg I., Kaashoek M.A.* Wiener-Hopf factorization, inverse Fourier transform and exponential dichotomies operators // J. Funct. Anal., 68(1986), P. 1-42.

43. *Bart H., Gohberg I., Kaashoek M.A.* Invertibility and dichotomy of differential operators on a half-line // J. Dynam. Diff. Eqns., 5(1993), P. 1—36.

44. *Баскаков А.Г.* Спектральные свойства дифференциального оператора с неограниченным оператором // Дифф. уравнения, 27:1(1991), С. 2162—2164.

45. *Sasu B., Sasu A.L.* Exponential dichotomy and admissibility on the half-line // J. Math. Anal. Appl., 316(2006), P. 397—408.

46. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы // М.: Мир. Т. 3, 1974.

47. *Иосида К.* Функциональный анализ // М.: Мир, 1967.

48. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения // М., 1969.