УДК 517.9

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОДОБИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Т. В. Азарнова, Н. Б. Ускова

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный технический университет

Описаны один способ преобразования подобия возмущенных линейных операторов и его применение к исследованию спектральных дифференциальных операторов, определяемых квазипериодическими краевыми условиями.

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$ Всюду через A обозначается замкнутый линейный оператор, действующий в $\mathcal{X}$ с областью определения $D(A)$. Он в дальнейшем играет роль невозмущенного оператора и обычно хорошо изучен. Символом $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору A. Это означает, что если $B \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, то $D(B) \supset D(A)$ и полагается

$$\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \le C(\|x\| + \|Ax\|)\ \forall\ x \in D(A)\}$$

Основные результаты статьи связаны с преобразованиями подобия возмущенного оператора $A - B$, где $B \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, в оператор $A - B_0$, где оператор B_0 имеет более простую структуру по отношению к A. В основе проводимых исследований лежит метод подобных операторов, основные положения которого изложены в работах [1]—[3]. При этом используется

Определение 1. Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1,2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и

$$A_1Ux = UA_2x, \quad x \in D(A_2).$$

Оператор U называется **оператором преобразования** оператора A_1 в A_2.

Основной составляющей метода подобных операторов является понятие допустимой тройки, которая должна для применимости метода удовлетворять ряду условий.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — линейное подпространство операторов из $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ и $\mathrm{J} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $\Gamma : \mathfrak{A} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ — трансформаторы (т. е. линейные операторы в пространствах операторов). Тройку $(\mathfrak{A}, \mathrm{J}, \Gamma)$ назовем **допустимой тройкой** для оператора A, а $\mathfrak{A}$ — **допустимым пространством возмущений**, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{A}$ — банахово пространство (со своей нормой), непрерывно вложенное в $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ (т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \le C\|X\|\ \ \forall X \in L_A(X)$);

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и $A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX$ $\forall X \in \mathfrak{A}$, причем $\Gamma X \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - \mathrm{J}X$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{A}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{A}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\| \le \gamma\|X\|\|Y\|\},\ X, Y \in \mathfrak{A}$$

5) для любых $X \in \mathfrak{A}$, $\varepsilon > 0$, можно указать число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Пусть $(\mathfrak{A}, \mathrm{J}, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройка и B — некоторый оператор из пространства допустимых возмущений $\mathfrak{A}$. Тогда для любого оператора $X \in \mathfrak{A}$ равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - \mathrm{J}X), \qquad (1)$$

означающее подобие оператора $A - B$ оператору $A - \mathrm{J}X$, можно переписать в виде нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(\mathrm{J}X) + B. \qquad (2)$$

Теорема 1. Оператор $A - B$ подобен оператору $A - \mathrm{J}X_0$, если выполнено неравенство

$$\|\mathrm{J}\|\|B\|\|\Gamma\| < \frac{1}{6}.$$

Оператор $X_0 \in \mathfrak{A}$ является решением нелинейного уравнения (2) и его можно найти методом простых итераций.

© Азарнова Т. В. , Ускова Н. Б., 2007

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07—01—00131

Построение допустимой тройки $(\mathfrak{A}, \mathrm{J}, \Gamma)$ для невозмущенного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ обычно осуществляется таким образом, что пространство $\mathfrak{A}$ содержало возмущение B. Однако, часто такое построение трудно осуществимо. Здесь мы изложим способ построения преобразования подобия оператора $A - B$ в более простой оператор, когда допустимая тройка возникает после предварительного преобразования возмущенного оператора и только затем появляется допустимая тройка, а также применяется теорема 1.

Во-первых, возмущение B должно быть подчинено оператору A и, более того, быть выполнено условие 5) из определения 2. Трансформатор J вначале определим на всем банаховом пространстве $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ таким образом, чтобы он являлся проектором и операторы вида $A - \mathrm{J}X,\ X \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, имели несложную структуру. Например, это может означать, что оператор $A - \mathrm{J}X$ имеет легко вычислимый спектр или легко вычислимые спектральные компоненты. Далее, рассмотрим линейное уравнение

$$AY - YA = B - \mathrm{J}B \tag{3}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ и допустим, что оно имеет решение $Y_0 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, которое обладает свойствами: $Y_0 D(A) \subset D(A)$, существует допустимая для A тройка $(\mathfrak{A}_0, \mathrm{J}_0, \Gamma_0)$ такая, что выполнены свойства

1) $Y_0,\ BY_0,\ Y_0\mathrm{J}B \in \mathfrak{A}_0$;

2) $\mathfrak{A}_0$ инвариантно относительно J и J_0 совпадает с J на $\mathfrak{A}_0$.

В дальнейшем оператор Y_0 будет обозначаться через ΓB. При сделанных предположениях относительно возмущения B имеет место

Теорема 2. Оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где $B_0 = \mathrm{J}B - (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)\mathrm{J}B)$, причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - B_0). \tag{4}$$

Доказательство теоремы основано на простой проверке равенства (4) с использованием отмеченных ранее свойств оператора $Y_0 = \Gamma B$.

Теорема 2 позволяет свести изучение оператора $A - B$ к изучению подобного ему оператора $A - B_0$. Поскольку оператор $A - \mathrm{J}B$ имеет более простую структуру по сравнению с $A - B$ и поскольку оператор $(I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)\mathrm{J}B)$ принадлежит допустимому пространству $\mathfrak{A}_0$, то дальнейшее изучение оператора $A - B_0$ может осуществляться, например, заменой невозмущенного оператора A оператором $A_1 = A - \mathrm{J}B$, для которого $\mathfrak{A}_0$ может остаться также допустимым пространством возмущений с тем же выбором оператора J_0. Далее следует применять теорему 1. Важно отметить, что в данном случае мы не строим допустимое пространство возмущений, которое содержит оператор B.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathcal{L}_\alpha : W_2^2([0,1], \mathbb{C}^m) = W_2^2 \subset L_2([0,1], \mathbb{C}^m) = W_2^2 \subset L_2([0,1], \mathbb{C}^m) = L_2 \to L_2$ — дифференциальный оператор, порожденный в гильбертовом пространстве L_2 векторных функций (W_2^2 — пространство Соболева) дифференциальным выражением

$$l(y) = -y''(t) + Q(t)y(t)$$

и квазипериодическими краевыми условиями

$$y(1) = e^{i\alpha}y(0), \quad y'(1) = e^{i\alpha}y'(0),$$

где $\alpha \in [0, 2\pi)$. Здесь $Q \in L_2([0,1], \operatorname{End}\mathbb{C}^m)$ — операторнозначная функция.

Такие краевые условия играют фундаментальную роль в спектральной теории дифференциального оператора $L : D(L) \subset L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, порожденного дифференциальным выражением $l(y)$ с периодическим потенциалом $Q : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{C}^m$. Это объясняется тем, что спектр оператора $\mathcal{L}$ является объединением спектров операторов $\mathcal{L}_t,\ t \in [0, 2\pi)$ (см. [4]). Из классических результатов [5] нетрудно получить, что собственные значения оператора $\mathcal{L}_t$ состоят из m последовательностей

$$\{\lambda_{k1}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \{\lambda_{k2}, k \in \mathbb{Z}\}, \ldots, \{\lambda_{k,m}, k \in \mathbb{Z}\},$$

которые лежат внутри окружностей радиусов $O(|k|^{1-m})$, центры которых совпадают с собственными значениями $(2k\pi + \alpha)^2,\ k \in \mathbb{Z}$, оператора $Ay = -y''$, который далее считается невозмущенным оператором. Оператор $By = Qy$ считается возмущением и тогда $\mathcal{L}_\alpha = A - B$. При этом отметим, что если $Q \in L_2 \setminus L_\infty$, то B — неограниченный оператор в L_2.

Нетрудно показать, что оператор B удовлетворяет условию 5) из определения 2. Отметим, что оператор A является самосопряженным с компактной резольвентой и собственные функции вида

$$\varphi_{n,k} = e_k \exp i(2\pi n + \alpha)t, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \le k \le m,$$

где $e_1, \ldots, e_m$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{C}^m$, образуют ортонормированный базис в L_2, причем $A\varphi_{n,k} = (2\pi n + \alpha)^2 \varphi_{n,k},\ n \in \mathbb{Z}$,

$1 \le k \le m$. Пусть P_n, $n \in \mathbb{Z}$, — проектор Рисса, отвечающий собственному значению $\lambda_n = (2\pi n + \alpha)^2$. Поскольку они являются ортопроекторами, то (см. [1]) корректно определен оператор $\mathrm{J} : \mathcal{L}_A(\mathcal{L}_2) \to \mathcal{L}_A(\mathcal{L}_2)$ с помощью формулы

$$\mathrm{J}X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X (A - \lambda_0 I)^{-1} P_n (A - \lambda_0 I),$$
$$X \in \mathcal{L}_A(\mathcal{L}_2),$$

где λ_0 — некоторая точка из резольвентного множества $\rho(A)$ оператора A. Из вида оператора B следует, что оператор $B_0 = JB$ при условии, что $\alpha \ne 0$, $\alpha \ne \pi$, допускает представление

$$(B_0 y)(t) = Q_0 y(t), \qquad y \in L_2,$$

где оператор $Q_0 \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$ определяется равенством

$$Q_0 = \int_0^1 Q(t)dt.$$

Далее, следуя схеме построений из § 1, рассмотрим уравнение вида (3) для рассматриваемых операторов A и B. Его решением будет интегральный оператор $Y_0 = \Gamma B$, который имеет ядро $G : [0,1] \times [0,1] \to \operatorname{End}\mathbb{C}^m$ вида

$$G(t,s) = \begin{cases} -Q_1\left(\dfrac{t+s}{2}\right) + 2(t-s)Q_2\left(\dfrac{t+s}{2}\right), & s \le t, \\ Q_1\left(\dfrac{t+s}{2}\right) + 2(t-s)Q_2\left(\dfrac{t+s}{2}\right), & t < s, \end{cases}$$

где Q_1 — периодическая функция, являющаяся интегралом от функции $Q - Q_0$ и функция Q_2 имеет вид $Q_2(t) = \sum_{n \ne 0} (4\pi n)^{-1} Q_{2m} \exp i2\pi mt$, если Q имеет ряд Фурье вида $Q(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \exp i2\pi nt$. Такие формулы для J и G были получены в диссертации [6] для периодических краевых условий и они остаются верными и при $\lambda \ne 0$.

Далее, в качестве пространства допустимых возмущений $\mathfrak{A}_0$ рассмотрим двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта с тем же выбором J. Ясно, что этому идеалу принадлежит оператор Y_0, а также операторы BY_0, BJB. Следовательно, в силу теоремы 2 оператор $\mathcal{L}_\alpha = A - B$ подобен оператору вида $A - \mathrm{J}B - B_1$, где B_1 — оператор Гильберта—Шмидта. Пусть λ_k^0, $1 \le k \le m$, — собственные значения оператора $Q_0 \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$. Тогда спектр дифференциального оператора $A - \mathrm{J}B = -\dfrac{d^2}{dt^2} - Q_0$ состоит из собственных значений вида

$$(2\pi n + \alpha)^2 + \lambda_k^0, \quad 1 \le k \le m, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Считая оператор $A - \mathrm{J}B$ невозмущенным и применяя теорему 1, получаем, что он подобен оператору $A - \mathrm{J}B - \mathrm{J}X_0$, где X_0 — оператор Гильберта—Шмидта. При этом в качестве пространства допустимых возмущений выступает пространство операторов Гильберта—Шмидта (более подробно см. [1] и [3]). Итак, из полученных результатов следует

Теорема 3. Пусть оператор $Q_0 \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$ имеет простые собственные значения $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ и $\alpha \ne 0, \pi$. Тогда спектр $\sigma(\mathcal{L}_\alpha) = \{\lambda_{n,k}, n \in \mathbb{Z}, 1 \le k \le m\}$ оператора $\mathcal{L}_\alpha$ допускает представление вида

$$\lambda_{n,k} = (2\pi n + \alpha)^2 + \lambda_k^0 + \mu_{nk}, \; n \ge N, 1 \le k \le m$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$, где последовательности $(\mu_{n,k})$, $1 \le k \le m$, обладают свойством

$$\sum_{|n| \ge N} \left|\mu_{n,k}\right|^2 < \infty, \quad 1 \le k \le m.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во Воронеж. университета, 1987. — 164 с.

2. *Баскаков А.Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. Изв. Акад. Наук, Сер. матем., 1994. Т 3. С. 435—457.

3. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ возмущенных квазианалитических и спектральных операторов. Изв. Акад. Наук. Сер. матем., 1994. Т. 58, С. 3—32.

4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М. Наука. 1969.

5. *Carlson R.* Large eigenvalues and trace formulas for matrix Sturm—Liouville problems. SIAM J. Math. Anal. 1999. V. 30, N. 5. P. 949—962.

6. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов: дисс... докт. физ.-мат. наук. Киев, 1987.