МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ФУНКЦИИ СПРОСА

М. Е. Семенов, Т. В. Рудченко*

Воронежская государственная технологическая академия
**Воронежский государственный университет*

Задача установления равновесной цены широко применяется в реальной экономике на монотоварных рынках и требует более детального изучения. В статье рассматривается гистерезисная функция спроса, зависящая не только от цены в настоящий момент времени, но и от ее значений в предыдущие моменты времени, построена математическая модель ценообразования на монотоварных рынках с учетом нестационарности потребительских отношений, проведено исследование полученных нетривиальных решений и последовательности решений на устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из принципиальных задач математического моделирования в экономике является задача, связанная с изучением процесса установления равновесной цены.

При классическом подходе к отображению функций спроса и предложения анализ ценообразования рассматривается в рамках паутинообразной модели или ее аналогов. Современные исследования показывают, что состояние экономической системы в некоторый момент времени зависит не только от значений параметров в этот момент, но и от их значений в предыдущие моменты .

Следовательно, возникает задача разработать математическую модель функции спроса, учитывающую эту особенность.

Наиболее подходящими для этой цели являются преобразователи гистерезисной природы. Поэтому в данной статье рассматривается гистерезисная функция спроса, зависящая не только от цены в настоящий момент времени, но и от ее значений в предыдущие моменты времени.

Следуя классическим схемам М. А. Красносельского и А. В. Покровского, гистерезисные операторы трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: вход — состояние и состояние — выход.

Обозначим через $R[\alpha,\beta,x_0]$ двухпозиционное реле с пороговыми числами α и β. Пространством состояний неидеального реле является пара чисел $\{0, 1\}$. Связь между входом $u(t)\in c_{[0,t]}$ и переменным выходом $x(t)\in\{0,1\}$ устанавливается оператором $R[\alpha,\beta,x_0]$:

$$x(t) = R\left[\alpha,\beta,x_0\right]u(t), \tag{1}$$

здесь x_0 — начальное состояние преобразователя.

Начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{gathered}\text{если } u(0)\le\alpha, \text{ то } x_0 = 0;\\ \text{если } u(0)\ge\beta, \text{ то } x_0 = 1; \\ \text{если } \alpha\le u(0)\le\beta, \text{ то } x_0 = 0 \text{ или } x_0 = 1.\end{gathered} \tag{2}$$

Преобразователем Прейзаха—Гилтая называют континуальный аналог преобразователя, состоящего из неидеальных реле, соединенных параллельно.

Рассмотрим частный класс таких реле. Пусть на полуплоскости $P_{\alpha,\beta}\equiv\{\alpha,\beta:\alpha<\beta\}$ определена положительная абсолютно непрерывная суммируемая функция $\lambda=\lambda(\alpha,\beta)$. Определим на полуплоскости $P_{\alpha,\beta}$ меру μ равенством:

$$d\mu = \lambda(\alpha,\beta)d\alpha d\beta. \tag{3}$$

Измеримыми по мере μ будут все измеримые по Лебегу множества, в том числе и имеющие бесконечную меру.

Обозначим через ψ класс ограниченных функций, заданных на неотрицательной полуоси и удовлетворяющих условию Липшица с коэффициентом, равным единице. Введем в рассмотрение множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha,\beta)$, заданных на полуплоскости $P_{\alpha,\beta}\equiv\{\alpha,\beta:\alpha<\beta\}$ и таких, что:

$$\omega(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, \text{ если } \alpha+\beta>\psi(\beta-\alpha),\\ 1, \text{ если } \alpha+\beta\le\psi(\beta-\alpha),\end{cases}\qquad(4)$$

где $\psi(\nu)\in\psi$. Множество Ω_ψ — пространство возможных состояний преобразователя Прейзаха—Гилтая. На рис. 1 показан один из элементов множества Ω_ψ.

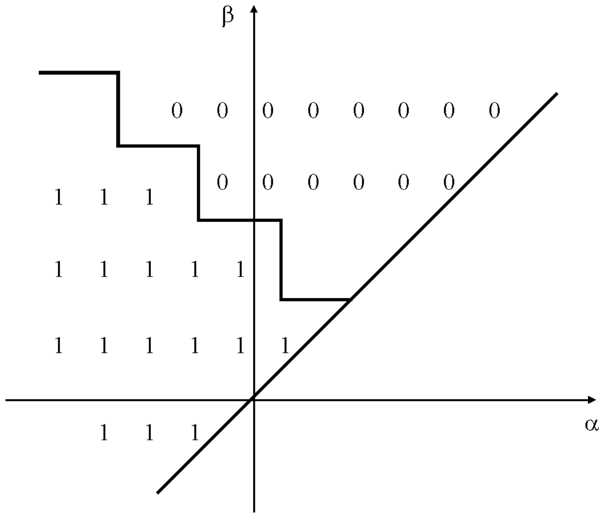

Рис. 1. Элемент множества Ω_ψ

Пусть задан произвольный элемент $\omega_0(\alpha,\beta)\in\Omega_\psi$. Допустимыми для преобразования Прейзаха—Гилтая (Γ,ξ), находящегося в начальном состоянии $\omega_0(\alpha,\beta)$ являются все непрерывные входы $u(t)$, $t\ge 0$, удовлетворяющие равенству $u(0)=\psi_0(0)$, где $\omega_0(\alpha,\beta)$ и $\psi_0(\nu)$ связаны соотношением (4).

Соотношение вход — переменное состояние преобразователя Прейзаха—Гилтая (Γ,ξ) устанавливается оператором Γ:

$$\begin{aligned}\omega(\alpha(\gamma),\beta(\gamma),t)&=\Gamma\left[\omega_0(\gamma)\right]u(t)=\\ &=R\left[\omega_0(\alpha,\beta,\gamma),\alpha(\gamma),\beta(\gamma)\right]u(t),\end{aligned}\qquad(5)$$

где γ — параметр, $\gamma\in P_{\alpha,\beta}$.

Выход преобразователя (Γ,ξ) определяется соотношением:

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\int\limits_{\alpha\le\beta}\omega(\alpha,\beta,t)d\mu=\\ \mu(\{\alpha,\beta\}&:R[\omega_0(\alpha,\beta),\alpha,\beta]u(t)=1).\end{aligned}\qquad(6)$$

Рассмотрим, как можно использовать модификацию приведенных преобразователей для моделирования потребительского спроса на некоторые виды товаров.

Пусть функция спроса $P(t)$ зависит в момент времени t только от цены $c(t)$ следующим образом. Отношение индивидуального потребителя к некоторому товару определим функцией $R(c(t))$, принимающей значения 0 или 1 по правилу:

$$R(c(t))=\begin{cases}1, \text{ если } c(t)\le\alpha(t),\\ 0, \text{ если } c(t)\ge\beta(t),\\ 1 \text{ или } 0, \text{ если } \alpha(t)<c(t)<\beta(t).\end{cases}\qquad(7)$$

Т.е. функция $R(c(t))$ принимает значения равные единице, если товар покупается и нуль в противном случае. Функцию $R(c(t))$ будем трактовать как выход некоторого преобразователя $R[\alpha(t),\beta(t),R_0]$, аналогичного неидеальному реле с инверсией роли пороговых чисел α,β, на вход которого поступает сигнал $c(t)(t\ge 0)$. Взаимосвязь между входом и выходом иллюстрирует рис. 2.

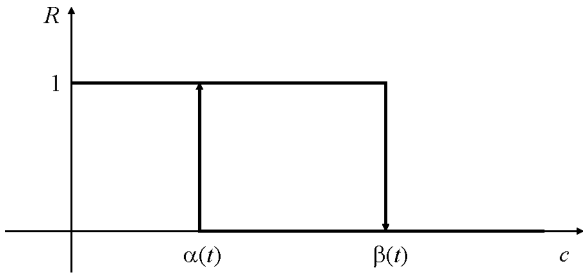

Рис. 2. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя R

Зависимость от времени пороговых чисел $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ дает возможность учитывать, что отношение потребителя к товару может меняться со временем.

Если обозначить через γ_i темп покупок i-го потребителя $(i=1,2\ldots n)$, то для системы из n любых потребителей функция продаж будет иметь вид:

$$P(c(t))=\sum\gamma_i R[\alpha_i(t),\beta_i(t),R_{0i}]c(t).\qquad(8)$$

В континуальном случае функция продаж будет аналогична преобразователю Прейзаха—Гилтая с инверсией нулей и единиц т.е.

$$P(c(t))=\int\limits_{\alpha\le\beta}\omega(\alpha(t),\beta(t),t)d\mu(t),\qquad(9)$$

где

$$\begin{aligned}\omega(\alpha(t),\beta(t),t)&=\Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(t)=\\ &=R[\alpha(\gamma,t),\beta(\gamma,t),R_0(\gamma)]c(t)\end{aligned}\qquad(10)$$

и $\gamma\in P_{\alpha,\beta}$.

Континуальный аналог преобразователя Прейзаха—Гилтая учитывает возможность изменения индивидуальных отношений потребителя к товару. Этим возможным изменениям в модели соответствует зависимость меры μ от t.

2. МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ФУНКЦИИ СПРОСА

Из экономической теории известно, что рыночные механизмы допускают равновесие, при котором цены устанавливаются так, что спрос на товары равен его предложению и при этом обеспечивается эффективное распределение ресурсов. В то же время известны периоды кризисов, во время которых равновесные цены оказывались неустойчивыми. Эту неустойчивость можно попытаться объяснить несоответствием рыночных механизмов технологической структуре экономики. Действительно, как правило, выход из кризиса являлся следствием структурных изменений в экономике. При этом вопрос о совместном влиянии технологической структуры экономики и структуры потребительского спроса на запас устойчивости рыночных механизмов исследован недостаточно.

2.1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Возможность решения этой задачи основывается на предложенной в модели потребительского спроса, учитывающей его инертность и возможные структурные изменения, а также новом направлении в теории динамических систем, связанном с понятием «странного аттрактора», которое изучает стохастическое поведение траекторий динамических систем [7].

В работе [7] было показано, как последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению странного аттрактора. Оказалось, что на этом эффекте основан один из сценариев возникновения турбулентности в гидродинамике и модель динамики численности популяций с неперекрывающимися поколениями. Для анализа экономических систем этот аппарат использовался в работах [8, 9].

В дальнейшем исходные предположения модели будут сделаны, следуя классическим работам Вальраса. Рассматривается монотоварный рынок, на котором купля-продажа товара происходит между потребителями и производителями. Предполагается, что в каждый момент n времени товар продается по единой цене c_n; поведение потребителей описывается функцией спроса $P(c)$, аналитический вид которой определяет преобразователь (9)—(10); поведение производителей описывается функцией предложения $g(c)$, аналитический вид которой будет приведен ниже; характерное время изменений функций спроса и предложения много больше времени изменения цены.

В сделанных предположениях времена изменений функций спроса и предложения и цены можно разделить и на промежутке дискретного изменения цены считать эти функции постоянными (справедливость гипотезы о разделении времен).

Следуя классическим построениям [1] предположим, что производители предлагают товар, ориентируясь на «предыдущую» цену c_{n-1}, и продают его по «нынешней» c_n. Потребители готовы покупать товар, ориентируясь на предыдущую цену $P(c_{n-1})$ (функция спроса) и готовы платить за него опять же предыдущую цену c_{n-1}. Тогда равновесие спроса и предложения определяется соотношением:

$$C_n q(C_{n-1}) = C_{n-1} P(C_{n-1}). \qquad (11)$$

В работах Поспелова показано, что функция предложения может определяется по следующей формуле:

$$g\left(p_{n-1}, t\right) = \int_{v}^{C_{n-1}/s} \xi\left(\lambda, t\right) d\lambda, \qquad (12)$$

где t — «медленное время», соответствующее процессам изменения мощностей, а n — дискретное «быстрое время», соответствующее процессам изменения цены, а $\Psi = \xi\left(\lambda, t\right)$ — некоторая гладкая функция распределения мощностей по технологиям приозводства.

Из баланса мощностей и зная начальное распределение мощностей по технологиям $\xi\left(\lambda, \tau_0\right)$ и динамику строительства новых мощностей $I(t)$ за период $\tau_0 \le t \le \tau$, однозначно определяется распределение мощностей по технологиям $\xi\left(\lambda, t\right)$ и функциям предложения $g(p, t)$ при $\tau_0 \le t \le \tau$. Численные эксперименты показывают, что в замкнутых моделях экономического роста распределение мощностей по технологиям независимо от начальных условий $\xi\left(\lambda, \tau_0\right)$ асимптотически стремится к распределению на режиме экспоненциального роста.

В режиме экспоненциального роста с темпом γ

$$I(t) = M\left(\tau_0\right)\left(\gamma + \mu\right) e^{\gamma(t-\tau_0)}. \qquad (13)$$

Легко показать, что при этом

$$g\left(C_{n-1},t\right)=M(t)\left[1-\left(\frac{s\nu}{C_{n-1}}\right)^{(\gamma+\mu)/\mu}\right]. \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$x_n=\frac{s\nu}{p_n},\ \alpha=\frac{\gamma+\mu}{\mu}\geq 1,\ A(t)=\frac{M(t)}{P(C)}, \quad (15)$$

где $P(C)$ определяется как выход преобразователя (9)—(10) в момент $t=1$ на выход которого поступает сигнал

$$\varphi(t)=tC_n+(1-t)C_{n-1}, \quad (16)$$

т.е. линейная функция, соединяющая предыдущее и нынешнее значение цены.

Тогда из (9) с учетом (14) получаем:

$$x_n=A(t)x_{n-1}(1-x_{n-1}^{\alpha}). \quad (17)$$

Естественно предполагать, что наилучшая технология неубыточна, т.е. $x_n=s\nu/C_n\leq 1$. Тогда $0\leq x_n\leq 1$. Для того чтобы отображение (17) переводило $x_{n-1}\in[0,1]$ в $x_n\in[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$0\leq A(t)\leq\frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)/\alpha}}{\alpha}=A_M(\alpha). \quad (18)$$

Отображение (17) определяет дискретную динамическую систему, в которой «медленное время» t является параметром.

2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Рассмотренная выше модель ценообразования $x_{n+1}=f(x_n,A,\alpha)$, где $f(x,A,\alpha)=Ax(1-x^{\alpha})$, по заданному начальному условию x_0 однозначно определяет бесконечную траекторию $x_0,x_1,\dots,x_n,\dots$ Ввиду принятой гипотезы о разделении времен представляет содержательный интерес изучение асимптотического (при $n\to\infty$) поведения цены.

Простейшими типами предельных траекторий системы (18) являются неподвижные точки x, для которых $x=f(x,\ A,\ \alpha)$, и периодические траектории. Периодической траекторией периода T называется набор несовпадающих точек $x_1,x_2,\dots,x_T$, таких, что $x_2=f(x_1,A,\alpha)$, $x_3=f(x_2,A,\alpha),\dots,\ x_T=f(x_{T-1},A,\alpha),\ x_1=f(x_T,A,\alpha)$. При всех $A\geq 0,\ \alpha\geq 1$ у динамической системы (17) имеется неподвижная точка $x=0$, соответствующая бесконечно большой цене на товар. Кроме того, при $A\geq 1,\ \alpha\geq 1$ существует еще одна неподвижная точка $x_p(A,\alpha)=(1-1/A)^{1/\alpha}$, соответствующая равновесной цене[1]). Траектория, порожденная точкой $x_p(A,\alpha)$, выделяется с содержательной точки зрения, как единственная траектория, на которой прогноз цены потребителя и производителями товара совпадает с реализацией, и производство согласовано со спросом. На периодических траекториях в среднем наблюдается избыток производства над спросом.

[1] Равновесной называется цена на товар, при которой спрос на него равен предложению.

Заметим, что увеличение $A=M/P$ означает увеличение производства по отношению к суммарному спросу, с чем экономисты связывают кризисы перепроизводства, сопровождающиеся «бурями» в изменении цен.

Рассмотрим, как с увеличением параметра A изменяется асимптотическое поведение траекторий динамической системы (17). Если $0\leq A<1$, то при любом начальном условии x_0 траектория системы (17) стремится к 0. С содержательной точки зрения означает, что производственных мощностей не хватает для удовлетворения спроса, при этом цена товара стремится к $+\infty$. При $A=1$ происходит бифуркация, в результате которой неподвижная точка $x=0$ становится неустойчивой, и рождается устойчивая (при A, близких к 1) неподвижная точка $x_p(A,\alpha)$. Известно, что для устойчивости неподвижной точки $x_p(A,\alpha)$ необходимо, чтобы

$$\left|\frac{df(x,A,\alpha)}{dx}\right|_{x=x_p(A,\alpha)}|\leq 1, \quad (19)$$

и достаточно, чтобы

$$\left|\frac{df(x,A,\alpha)}{dx}\right|_{x=x_p(A,\alpha)}|<1. \quad (20)$$

Отсюда следует, что неподвижная точка $x_p(A,\alpha)$ устойчива при $1<A<\dfrac{\alpha+2}{\alpha}=\dfrac{\gamma+3\mu}{\gamma+\mu}=A_1(\alpha)$ и неустойчива при $A>A_1(\alpha)$. Поскольку

$$\left.\frac{df(x,A_1(\alpha),\alpha)}{dx}\right|_{x=x_p(A_1(\alpha),\alpha)}=-1, \quad (21)$$

то при $A=A_1(\alpha)$ неподвижная точка $x_p(A,\alpha)$ теряет устойчивость в результате бифуркации Хопфа.

В теории динамических систем [3] асимптотическое поведение траекторий при $A>A_1(\alpha)$ наиболее полно исследовано при $\alpha=1$. У этой знаменитой динамической системы при увеличении параметра A наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода $\{A_n(1)\}$. При $A=A_n(1)$ траектория периода 2^{n-1} теряет устойчивость, и в результате бифуркации Хопфа рождается устойчивая траектория периода 2^n, к которой притягиваются траектории динамической системы при почти всех начальных условиях. Существует предел

$$\lim_{n\to\infty} A_n(1) = A_\infty(1) \approx 3,57, \qquad (22)$$

и ему соответствует аттрактор динамической системы (17), при $\alpha = 1$ гомеоморфный канторову совершенному множеству. Отметим, что при $\alpha = 1$, $A = A_M(1)$ динамическая система (17) имеет стохастическое поведение: обладает абсолютно непрерывной инвариантной мерой с плотностью $\pi^{-1}(x(1-x))^{-1/2}$ и изоморфна сдвигу Бернулли. М. В. Якобсоном доказано, что множество значений параметра A из правой полуокрестности $A_\infty(1)$, при которых $x_{n+1} = f(x_n, A, 1)$ обладает абсолютно непрерывной инвариантной мерой, имеет положительную меру Лебега.

Результаты исследования динамической системы (17) при $\alpha = 1$ частично обобщаются на системы $x_{n+1} = F(x_n)$ с отрицательной производной Шварца

$$S(F(x)) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(x)}{F'(x)}\right)^2. \qquad (23)$$

Дж. Гукенхеймер установил, что в случае, когда существует единственная устойчивая траектория, множество точек, не притягивающихся к ней, имеет меру нуль.

Заметим, что в нашем случае

$$S(f(x, A, \alpha)) = \\ = \frac{\alpha(\alpha+1)(2(\alpha-1) + (\alpha+2)(\alpha+1)x^{\alpha})x^{\alpha-2}}{2(1-(\alpha+1)x^{\alpha})^2}. \qquad (24)$$

Следовательно, $S(f(x, A, \alpha)) < 0$ при $x \in (0,1] \setminus x_c$ и $\alpha \geq 1$. Из теоремы Д. Зингера [3] следует, что динамическая система (17) при $\alpha \geq 1$ имеет не более одной устойчивой периодической траектории. Причем, если устойчивая периодическая траектория существует, к ней притягиваются почти все траектории системы (17) и заведомо траектория с начальным условием $x_c = (1/(1+\alpha))^{1/\alpha}$.

На рис. 3 изображено дерево бифуркаций, т.е. зависимость аттрактора от параметра A. Проведенные численные эксперименты [5] позволили установить следующие факты. Во-первых, амплитуда колебаний периодических траекторий при $A \geq A_2(\alpha)$ имеет тот же порядок, что и равновесная цена. Во-вторых, величина $A_2(\alpha) - A_1(\alpha)$ в несколько раз больше величины $A_\infty(\alpha) - A_2(\alpha)$. Величину $A_\infty(\alpha)$ можно вычислить с помощью принципа универсальности Фейгенбаума [8], согласно которому последовательность $A_n(\alpha)$ сходится к $A_\infty(\alpha)$ асимптотически, как геометрическая прогрессия со знаменателем $1/\delta$, где $\delta \approx 4,669$ — универсальная постоянная Фейгенбаума.

Таким образом, с увеличением параметра $A = M/P$ динамика цен становится трудно прогнозируемой, и это обстоятельство препятствует деловой активности экономических агентов. Величины $A_1(\alpha), A_2(\alpha), \ldots, A_\infty(\alpha)$ являются характеристиками устойчивости рыночных механизмов. Увеличение темпа роста производства уменьшает диапазон устойчивости рыночных механизмов, что согласуется с представлениями экономистов о перегретой экономике.

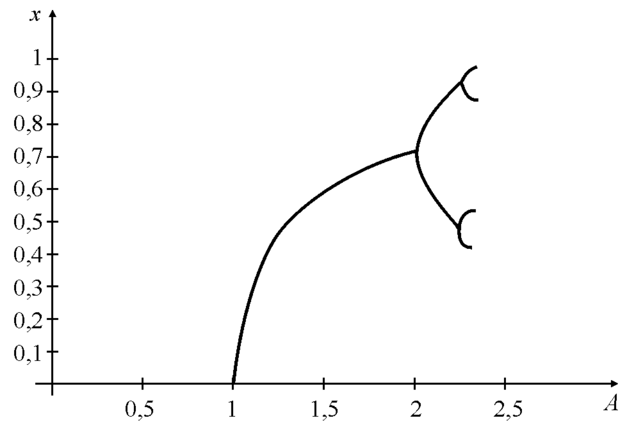

Рис. 3. $\alpha = 2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах Т. Пу [11, 12], Хикса [10] и ряда других экономистов отмечается, что для адекватного моделирования экономических систем необходимо учитывать их способность «запоминать» предыдущее состояние. Иными словами состояние многих экономических систем в момент времени $(t > t_0)$ зависит не только от некоторого набора внешних, и внутренних параметров в тот же момент времени, но и от того в каком состоянии система находилась в момент t_0. Одним из возможных способов объяснить это свойство является использование в экономических моделях операторов гистерезисной природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жак С.В.* Экономика для инженеров. / С. В. Жак // Учебное пособие. — М.: Вузовская книга, 2004. — С. 52—57.

2. *Красносельский М.А.* Системы с гистерезисом. / М. А. Красносельский, А. В. Покровский // М., Наука, 1983. — 271 с.

3. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева, А. А. Петрова. М.: Наука, 1986. С. 7—196.

4. *Оленов Н.Н., Поспелов И.Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа. // [12] С. 164—174.

5. *Параев Ю.И.* Решение задач об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара. / Ю. И. Параев // Известия академии наук. Теория и системы управления. 2000, № 2, С. 103—117.

6. *Семенов М.Е.* Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в системах с гистерезисными нелинейностями / М. Е. Семенов // Воронеж . — Издательство ВГУ. — 2002. — 104 с.

7. *Шананин А.А.* О стохастическом поведении цены в одной детерминированной модели ценообразования // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288, № 1. С. 63—65.

8. *Шананин А.А.* Об устойчивости Рыночных механизмов // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 2. С. 42—62.

9. *Шумпетер И.* Теория экономического развития. / И. Шумпетер // Теория экономического развития: Пер. с нем. / Под ред. А. Г. Малейковского. М.: Прогресс, 1982. — 456 с.

10. *Hicks J.R.* A contribution to the theory of the trade cycle (Oxford university press, Oxford, 1950).

11. *Puu T.* A simplified model of spatiotemporal population dynamics, Environment and planning, 1985, 17:1269—1269.

12. *Puu T., Weidlich W.* The stability of hexagonal tessellations, Karlsruhe papers in economic policy research, 1986, 3:133—158.

Поступила в редакцию 26.02.2007