УДК 004.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В КАНАЛЕ С БОКОВЫМ ПОДВОДОМ РАБОЧЕГО ТЕЛА

Е. В. Голикова, Е. Н. Коржов, Т. В. Требунских, А. И. Шашкин

Воронежский государственный университет
ОАО КБХимавтоматики

Предложена математическая модель для описания турбулентного течения закрученного потока в канале с боковым подводом рабочего тела, основанная на $k-\varepsilon$ модели турбулентности и методе контрольных объемов. Проведено численное исследование указанного типа течения. Установлены некоторые закономерности и особенности потока, которые могут быть использованы для разработки методов расчета и проектирования смесительных устройств.

Закрученный поток — один из наиболее распространенных типов течения. Его специфические свойства используются во многих технических приложениях. Подобный тип течения характеризуется специфическими принципиально отличающими его от осевого потока свойствами: соизмеримые значения осевой, радиальной и вращательной составляющими скорости, продольным и поперечным градиентами статического и полного давлений, значительными градиентами скорости в поперечном направлении, высоким уровнем турбулентных пульсаций и т.д. [1]. Для оптимизации работы устройств с закруткой потока необходимо обладать информацией об особенностях течения внутри канала.

Потоки с вращением характеризуются сложной структурой течения [2], поэтому их моделирование является нетривиальной задачей. Во многих исследованиях закрученного потока в каналах течение принимается симметричным, закрутка на входе задается с помощью различного рода завихрителей или по закону твердого тела [3—6]. Однако в технических приложениях (например, в смесительных устройствах или форсунках [1]) закрутка нередко осуществляется боковым подводом среды, что меняет характер течения. Кроме того, экспериментальное исследование, представленное в [2], показывает, что затухание закрутки по длине канала приводит к резкому росту турбулентной энергии и дальнейшему ассиметричному развитию потока. В связи с этим построение модели в предположении, например, об осемимметричности не позволит получить полную детальную информацию о характере течения. Необходимо моделирование, способное с высокой степенью достоверности предсказывать поведение закрученного потока.

Результаты моделирования течения с закруткой потока с использованием классических моделей, основанных на осредненных по Рейнольдсу уравнениях движения (RANS), и их модификаций представлены в ряде исследований, показавших удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными или результатами прямого численного моделирования [7].

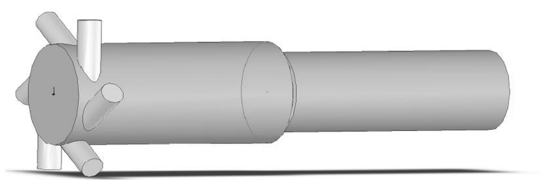
Рассматривается течение закрученного потока вязкой несжимаемой жидкости в круглом цилиндрическом канале с внезапным сужением с боковыми входными каналами (рис. 1а). Гидросистема образована двумя основными участками: прямая цилиндрическая труба диаметром D_0, длиной L_0 и цилиндрическая труба диаметром D_1, длиной L_1. Общая длина канала L. Жидкость поступает в канал через шесть тангенциальных подводящих каналов диаметром d и длиной l. В процессе течения температура не изменяется, остается равной температуре на входе.

Система уравнений, описывающая стационарное турбулентное течение несжимаемой вязкой жидкости включает уравнения движения и уравнение неразрывности [8]:

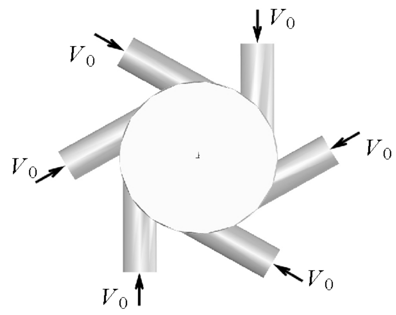
$$\rho\ \mathrm{div}\left(V_1 V\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mathrm{div}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\ \mathrm{grad}\, V_1\right),$$

$$\rho\ \mathrm{div}\left(V_2 V\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mathrm{div}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\ \mathrm{grad}\, V_2\right), \quad (1)$$

$$\rho\ \mathrm{div}\left(V_3 V\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \mathrm{div}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\ \mathrm{grad}\, V_3\right),$$



а)



б)

Рис. 1. Канал с боковыми входными отверстиями: а — общий вид, б — скорость на входе

$$\operatorname{div} V = 0, \tag{2}$$

где V — осредненный по времени вектор скорости, V_i — компоненты вектора скорости V; P — осредненное относительное давление; ρ, μ — плотность, динамическая вязкость, μ_t — турбулентная вязкость.

Для замыкания системы уравнений, описывающей поток с закруткой, может быть использована стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности [3, 4, 7]. Коэффициент турбулентной вязкости μ_t в $k-\varepsilon$ модели рассчитывается с применением уравнения переноса для кинетической энергии турбулентных пульсаций $k = \left\langle v_i'^2 \right\rangle / 2$ и скорости диссипации турбулентной энергии $\varepsilon = \nu \left\langle \left(\partial v_i' / \partial x_j \right)^2 \right\rangle$, где v_i' — пульсационные составляющие вектора скорости, $\nu = \mu / \rho$ — кинематический коэффициент вязкости. При расчетах распределения осредненных скоростей μ_t можно считать скалярной величиной и для его определения использовать соотношение [4]

$$\mu_t = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon. \tag{3}$$

C_μ — безразмерная константа, ее значение определено ниже.

Уравнения переноса величин k и ε записываются в виде [9]

$$\rho \operatorname{div}(kV) = \operatorname{div}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \operatorname{grad} k \right) + +2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho\varepsilon, \tag{4}$$

$$\rho \operatorname{div}(\varepsilon V) = \operatorname{div}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \operatorname{grad} \varepsilon \right) + +C_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{5}$$

где $E_{ij} = 1/2\left(\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i \right)$, $E_{ii} = \partial V_i / \partial x_i$. Уравнения содержат пять констант σ_k, σ_τ C_1, C_2, C_μ — параметры модели, которые предполагают различные значения в зависимости от приложений [3, 7]. Стандартная $k-\varepsilon$ модель использует значения $\sigma_k = 1$, $\sigma_\tau = 1.3$, $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $C_\mu = 0.09$, выведенные всесторонним исследованием данных для широкого диапазона турбулентных потоков [4, 9].

Очевидно, закрученным течениям присуще значительное искривление линий тока, что приводит к проявлению анизотропии [7]. Стандартная $k-\varepsilon$ модель строится в предположении об изотропном характере турбулентности, поэтому в расчетах вращающихся потоков с применением данной модели возрастает вероятность получения неточных результатов. В [7] для учета анизотропии турбулентности было предложено число Ричардсона Ri, характеризующее меру дополнительных турбулентных напряжений, обусловленных искривлением линии тока. Число Ричардсона вводится в выражение для коэффициента C_2, чем корректируется диссипативный член в уравнении переноса для скорости диссипации ε. Для течения с закруткой предложено

$$C_2 = 1.92 \exp\left(2\alpha_w Ri_g + 2\alpha_c Ri_c \right),$$

где $\alpha_w = -0.75$, $\alpha_c = -2.0$ — эмпирические константы. Ri_g — градиентное число Ричардсона, Ri_c — число Ричардсона кривизны:

$$Ri_c = \frac{\sqrt{V_z^2 + V_r^2}}{R_c \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r V_z \right) + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right]},$$

$$Ri_g = \frac{2 \frac{V_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r V_\theta \right)}{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right)^2},$$

$$R_c = \frac{\left(V_z^2 + V_r^2 \right)^{3/2}}{V_z V_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r V_z \right) - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right]},$$

где R_c — радиус кривизны линии тока.

Коррекцию коэффициента C_2 рекомендуется проводить в областях, где искривление линий тока значительно. В качестве критерия используется число Ri_c:

$$\text{при } Ri_c \geq 0.2 \;\; C_2 = 1.92\exp\left(2\alpha_w Ri_g + 2\alpha_c Ri_c\right);$$
$$\text{при } Ri_c \leq 0.2 \;\; C_2 = 1.92.$$

Уравнения движения — эллиптического типа, поэтому граничные условия для каждого из уравнений должны задаваться на всех границах. На твердых границах устанавливается условие прилипания [8, 9]

$$V = 0,\;\; k = 0,\;\; \varepsilon = 2\nu\left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial n}\right)^2.$$

На входе (рис. 1б) задается вектор скорости $V = V_0$. Для установления значения кинетической энергии турбулентных пульсаций k и переноса скорости диссипации турбулентной энергии ε на входной границе используются следующие значения $k = k_0 = 10^{-4}V_0^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 = k^{3/2}/\ell$ ($\ell = 0.05D_0$ — линейный масштаб турбулентности), средняя интенсивность турбулентности $I = 5$ %.

При высоких числах Рейнольдса распределения величин в вязкостном подслое подчинены «закону стенки» [9] (его адекватность для случая криволинейной поверхности подтверждается экспериментальными данными [4]). В этом случае вблизи стенки предполагается существование области, где профиль скорости соответствует логарифмическому закону:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(En^+\right),$$
$$n^+ = \frac{\rho u_\tau n}{\mu},$$

n^+ — безразмерное расстояние от твердой границы, $u_\tau = \left(\tau_w/\rho\right)^{1/2}$ — «скорость трения», $\kappa = 0.41$ — постоянная Вон Кармана, E — параметр шероховатости (для гладкой стенки $E = 9.0$ [4]).

Распределение кинетической энергии и скорости диссипации вблизи твердой границы так же задано согласно «закону стенки» [4, 9]:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}},\;\; \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa n}.$$

На выходе ($z = L$) из канала задаются условия свободного выхода [4, 9]: для всех функций $\partial/\partial n = 0$ и значение давления: $P = P_1$.

Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$\frac{x_i}{D_0} = x_i',\;\; \frac{V_i}{V_0^*} = V_i',\; \frac{P}{\rho V_0^{*2}} = P',$$
$$\frac{k}{k_0} = k',\;\; \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon' \tag{6}$$

где $V_0^* = \dfrac{m\tilde{s}V_0}{S_0}$, $m = 6$ — количество подводящих каналов, $\tilde{s}$ — площадь поперечного сечения подводящего канала, S_0 — площадь поперечного сечения канала.

С учетом (6) система дифференциальных уравнений (1), (2), (4), (5), и граничные условия примут вид:

$$\operatorname{div}\left(V_1'V'\right) = -\frac{\partial P'}{\partial x_1'} + \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_t}\right)\operatorname{grad} V_1'\right),$$
$$\operatorname{div}\left(V_2'V'\right) = -\frac{\partial P'}{\partial x_2'} + \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_t}\right)\operatorname{grad} V_2'\right), \tag{7}$$
$$\operatorname{div}\left(V_3'V'\right) = -\frac{\partial P'}{\partial x_3'} + \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_t}\right)\operatorname{grad} V_3'\right),$$

$$\operatorname{div} V' = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{div}\left(k'V'\right) = \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_k}\right)\operatorname{grad} k'\right) + 2G_1E_{ij}' \cdot E_{ij}' - G_1\varepsilon', \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon'V'\right) = \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\varepsilon}\right)\operatorname{grad}\varepsilon'\right) + C_1\frac{\varepsilon'}{k'}2G_1E_{ij}' \cdot E_{ij}' - C_2G_1\frac{\varepsilon'^2}{k'}, \tag{10}$$

где $E_{ij}' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V_i'}{\partial x_j'} + \dfrac{\partial V_j'}{\partial x_i'}\right)$, $E_{ii}' = \dfrac{\partial V_i'}{\partial x_i'}$; $G_1 = \dfrac{\nu_t V_0^*}{D_0k_0}$, $G_2 = \dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\dfrac{D_0}{V_0^*}$; $\mathrm{Re}\dfrac{V_0^*D_0}{\nu}$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Re}_t\dfrac{V_0^*D_0}{\nu_t}$, $\mathrm{Re}_k = \dfrac{V_0^*D_0}{\nu_k}$, $\mathrm{Re}_\varepsilon = \dfrac{V_0^*D_0}{\nu_\varepsilon}$, $\nu_t = \mu_t/\rho$, $\nu_k = \nu + \nu_t/\sigma_k$; $\nu_\varepsilon = \nu + \nu_t/\sigma_\varepsilon$; n — единичная нормаль к поверхности.

Граничные условия записываются в виде:

— на входе в подводящие каналы вектор скорости, ортогональный поверхности входа, $V' = V_0/V_0^*$ и значения $k' = 1$, $\varepsilon = 1$;

— на стенке условия прилипания: $V' = 0$, $k' = 0$, $\varepsilon' = 2\nu\left(\partial k'^{1/2}/\partial n\right)k_0/\varepsilon_0$;

— на выходе ($z' = L / D_0$) условия свободного выхода: для всех функций $\partial / \partial n = 0$ и давление $P = P_1 / (\rho V_0^{*2})$.

Параметром, характеризующим вращение, является угол закрутки потока φ, который определяется как угол между касательной к траектории частицы и образующей канала, характеризует степень отклонения линии тока от осевого направления [4]. Тангенс угла закрутки является функцией продольной координаты

$$\mathrm{tg}\varphi = s(z) = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z}. \qquad (11)$$

В результате приведения к безразмерному виду выделен безразмерный комплекс — число Рейнольда Re. Для рассматриваемых смесительных устройств число Рейнольдса изменяется в диапазоне $6.559 \cdot 10^4 \le \mathrm{Re} \le 3.771 \cdot 10^6$.

Для построения дискретной модели задачи используется метод контрольных объемов [9]. Построена сетка $12 \times 94 \times 135$ $(r \times \theta \times z)$. Выполнено измельчение вблизи твердых границ.

Уравнения (7)—(10) имеют одинаковую структуру и могут быть представлены в общем виде

$$\mathrm{div}(\phi V) = a_\phi \frac{\partial P}{\partial x_j} + \mathrm{div}\left(b_\phi \,\mathrm{grad}\,\phi\right) + c_\phi. \quad (12)$$

Величины a_ϕ, b_ϕ, c_ϕ приведены в табл. 1 для каждой из рассматриваемых зависимых переменных. (12) дискретизируются и решаются с привлечением пакета инженерного анализа. В программе выбрана Advection Scheme с High Resolution, применяется разностная схема QUICK. Для получения уравнения коррекции давления используется уравнение неразрывности в соответствие с алгоритмом SIMPLER [9]. Линеаризированные уравнения решаются методом Algebraic Multigrid [9].

Таблица 1

Выражения для a_ϕ, b_ϕ, c_ϕ в уравнении (12)

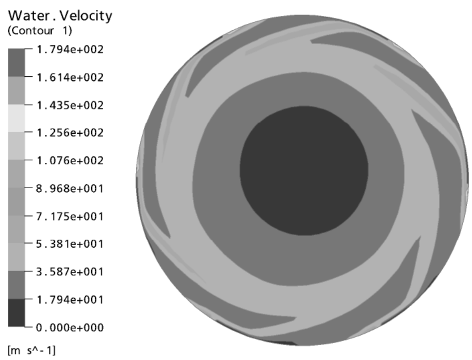
ϕ	a_ϕ	b_ϕ	c_ϕ
1	0	0	0
V_i	$-1/\rho$	$\nu + \nu_t$	0
k	0	ν_k	$1/\rho M_k - \varepsilon$
ε	0	ν_ε	$C_1 / \rho\varepsilon / kM_k - C_2\varepsilon^2 / k$

Слагаемое $M_k = 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij}$ определяет производство турбулентной энергии.

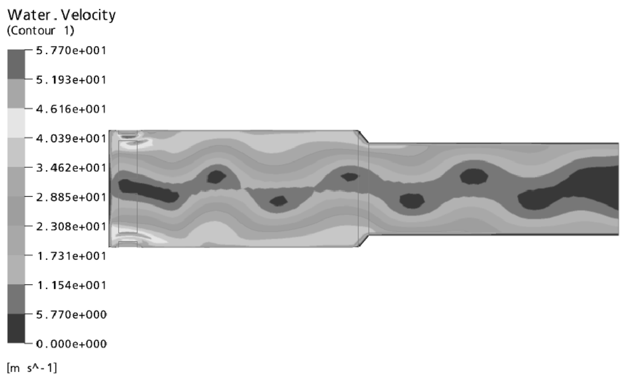
В результате численного эксперимента получены распределения безразмерных скоростей, давлений, турбулентной кинетической энергии и скорости ее диссипации. В качестве рабочей среды использовались вода ($P_1 = 30$ атм, $T = 293$ К, $6.559 \cdot 10^4 \le \mathrm{Re} \le 1.128 \cdot 10^5$) и жидкий кислород ($P_1 = 62.03$ и 102.2 атм, $T = 110$ К, $2.355 \cdot 10^6 \le \mathrm{Re} \le 3.771 \cdot 10^6$).

На рис. 2 показано распределение скорости в сечении $z = 0.17D_0$ и по длине канала для $\mathrm{Re} = 6.559 \cdot 10^4$. Вблизи центральной оси канала вследствие действия центробежных сил образуется зона с пониженными скоростями. Увеличение числа Re приводит к увеличению этой зоны на участке канала от сужения ($z = 2.3D_0$) до выходного сечения.

По данным моделирования безразмерная продольная скорость V_z' возрастает по длине канала до $z = 2.3D_0$, затем остается практически постоянной, число Re не оказывает влияния на V_z' в заданном диапазоне. Во всех рассмотренных случаях наблюдается рост продольной скорости по радиусу канала, максимальные значения достигаются вблизи стенки.



а)

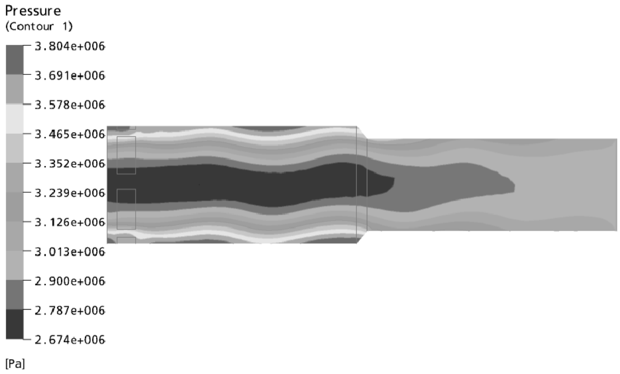


б)

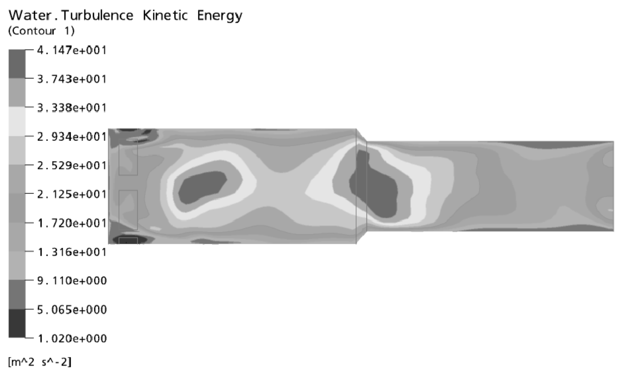
Рис. 2. Распределение общей скорости: а — в поперечном сечении канала $z = 0.17D_0$; б — по длине канала для $\mathrm{Re} = 6.559 \cdot 10^4$

Согласно полученным данным, наибольше искривление линий тока наблюдается в первой половине канала, что характеризует область наиболее интенсивного смешивания.

Давление достигает наиболее высоких значений на стенках начального участка длиной $2.3D_0$ и снижается по направлению к оси (рис. 3а). Увеличение скорости подачи среды приводит к уменьшению длины зоны пониженного давления и увеличению перепада давления по радиусу в сечении от 13 до 68 % в рассмотренном диапазоне чисел Re. Наибольшие потери давления происходят на начальном участке длиной $2.3D_0$. Увеличение Re способствует снижению P' по всей длине канала.



а)



б)

Рис. 3. Распределение а — давления, б — турбулентной кинетической энергии по длине канала. $\mathrm{Re} = 6.559 \cdot 10^4$

Распределение турбулентной кинетической энергии k в продольном сечении канала показано на рис. 3б. При $\mathrm{Re} = 3.771 \cdot 10^6$ максимальные значения k расположены в центральной части участка $z = 0.5—1.6D_0$. Снижение Re приводит к формированию в канале двух зон с максимальными значениями k — на расстоянии $z \approx 1D_0$ от входа и в области сужения.

Наибольшие значения кинетической энергии $k' = k / \rho V_0^{*2}$ по радиусу канала расположены на оси и монотонно убывают по направлению к стенке. Высокая интенсивность турбулентности в центральной области канала показана также в ряде исследований. Для $\mathrm{Re} = 6.559 \cdot 10^4$ k' возрастает на начальном участке длиной $2.3D_0$ и достигает наибольших значений в сужении, при $\mathrm{Re} = 1.128 \cdot 10^5$ k' убывает по всей длине канала.

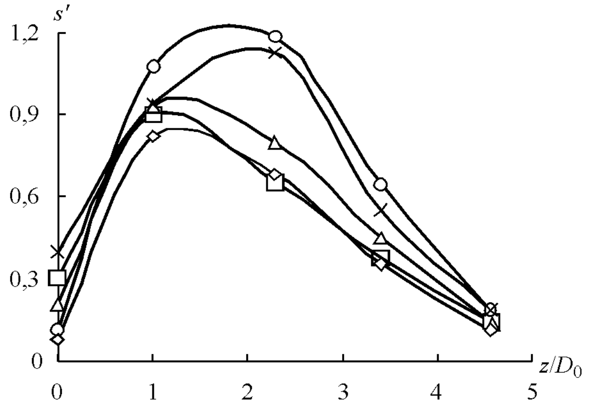


Рис. 4. Распределение относительной интенсивности закрутки s' по длине канала. о — $\mathrm{Re} = 6.559 \cdot 10^4$, х — $9.283 \cdot 10^4$, ◊ — $1.128 \cdot 10^5$, □ — $2.355 \cdot 10^6$, Δ — $3.771 \cdot 10^6$

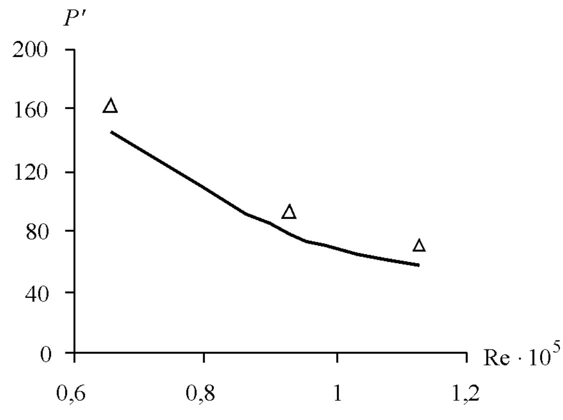


Рис. 5. Сравнение значений безразмерного давления на входе в канал, полученные в результате моделирования, с экспериментальными данными (Δ)

На рис. 4 показано изменение относительной интенсивности закрутки $s' = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} / V_0^*$ по длине канала. Для $\mathrm{Re} = 6.559 \cdot 10^4$, $9.283 \cdot 10^4$ s' возрастает и достигает максимума в сужения канала ($z = 2.3D_0$), затем закрутка монотонно убывает. Подобное поведение тангенциальной составляющей скорости закрученного потока в трубе отмечено в [10]. С увеличением Re максимум s' смещается к входу и достигается на более близком расстоянии $z \approx 1 - 1.3D_0$. Увеличение Re приводит к снижению s' по длине канала.

Проведено сравнение результатов расчета давления на входе в канал с экспериментальными данными, полученными в ходе испытаний на стендах КБХА для воды (рис. 5). Погрешность результатов моделирования закрученного потока составила в среднем 15 %.

В работе представлена математическая модель вращающегося турбулентного потока в гидросистеме с боковым подводом среды. Результаты расчета показали, что модель адекватно описывает рассматриваемый тип течения. Установлены особенности распределения характеристик закрученного течения. Безразмерная продольная скорость V_z' возрастает по длине канала и достигает максимальных значений в сужении, на оставшемся участке остается практически постоянной, число Re в рассмотренном диапазоне не оказывает влияния на V_z'. В поперечных сечениях V_z' возрастает по направлению к стенкам. Безразмерная скорость V' монотонно убывает по длине канала. Наиболее значительные потери давления p' в гидросистеме происходят на начальном участке длиной $2.3D_0$. Кинетическая энергия k' принимает наибольшие значения на оси канала и монотонно убывает по направлению к стенке, увеличение Re приводит к общему росту k' и смещению максимума от области сужения к входным отверстиям канала. Относительная интенсивность закрутки s' возрастает в первой половине канала, где располагается зона интенсивного смешивания, затем монотонно убывает. Максимум s' с увеличением Re смещается от сужения к области подачи среды. Полученные закономерности могут применяться для оптимизации работы смесительных устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щукин В.К., Халатов А.А.* Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. М.: Машиностроение, 1982. — 200 с.

2. *Pashtrapanska M., Jovanovic J., Leinhart H., Durst F.* Turbulence measurements in a swirling pipe flow. // Exp. Fluids, 2006. — Vol. 41. — P. 813—827.

3. *Кубо И., Гоулдин Ф.* Численный расчет закрученного турбулентного течения. // Конференция ASME-CSME, 1975. — С. 127—133.

4. *Третьяков В.В., Ягодкин В.И.* Расчетное исследование турбулентного закрученного течения в трубе. // ИФЖ, 1979. — Т. 37, № 2. — С. 254—259.

5. *Herrada M.A., Perez-Saborid M., Barrero A.* Nonparallel local spatial stability analysis of pipe entrance swirling flow. // Phys. Fluids, 2004. — Vol. 16, № 7. — P. 2147—2153.

6. *Митрофанова О.В.* Гидродинамика и теплоперенос в закрученных потоках в каналах с завихрителями (Аналитический обзор). // Теплофиз. высок. темпер., 2003. — Т. 41, № 4. — С. 508—560.

7. *Фафурин В.А.* Моделирование вращающихся и рециркуляционных потоков на основе гибридной двухпараметрической k-e модели. // ИФЖ, 2002. — Т. 75, № 1. — С. 76—81.

8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. — М.: Физматлит, 2003. — 736 с.

9. *Versteeg H.K., Malalasekera W.* An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. — Longman Scientific & Technical, 1995. — 257 pp.

10. *Шнайдерман М.Ф., Ершов А.И.* О влиянии закрутки потока на распределение скоростей и температур в круглой трубе. // ИФЖ, 1975. — Т. 28, № 4. — С. 630—635.

Поступила в редакцию 27.12.2006