УДК 517.538.72, 517.987.5

СТРУКТУРА АТТРАКТОРА СИСТЕМЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Перов, М. М. Портнов

Воронежский государственный университет

В статье показано, что аттрактор системы итерированных функций, отвечающий семейству сжимающих отображений $F_1, F_2, \dots, F_p$ полного метрического пространства в себя, есть компактное множество, являющееся замыканием совокупности всех неподвижных точек отображений вида $F_{i_1} F_{i_2} \dots F_{i_n}$, где каждый из индексов независимо принимает значения $1, 2, \dots, p$, а $n = 1, 2, \dots$.

Пусть M есть произвольное непустое множество. Рассмотрим систему отображений

$$F_i : M \to M, \ i = 1, 2, \dots, p, \qquad (1)$$

этого множества в себя. Для всякого непустого множества X из M положим

$$\mathcal{F}X = \bigcup_{i=1}^{p} F_i X. \qquad (2)$$

Это отображение $X \to \mathcal{F}X$ назовем *отображением (преобразованием) Хатчинсона*, ассоциированным с семейством (1) (сравни с [1, с. 99]).

Предположим теперь, что M есть метрическое пространство с метрикой $d(x, y) : M \times M \to \mathbb{R}$. Отображение Хатчинсона мы будем изучать в пространстве $\mathcal{M}$ всех непустых ограниченных замкнутых множеств из M. Превратим это пространство в метрическое, введя в нем хаусдорфову метрику

$$h(X, Y) = \sup \{ d(x, Y), d(y, X) : x \in X, y \in Y \}. \qquad (3)$$

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1. *Если метрическое пространство M полно, то и метрическое пространство $\mathcal{M}$ также полно.*

Предполагая отображения семейства (1) ограниченными и замкнутыми в том смысле, что они переводят всякое ограниченное множество в ограниченное и всякое замкнутое множество в замкнутое, мы видим, что если X есть произвольное непустое ограниченное замкнутое множество из M, то и $\mathcal{F}X$ есть также непустое ограниченное замкнутое множество из M, то есть в рассматриваемом случае отображение Хатчинсона $\mathcal{F}$ действует в пространстве $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}. \qquad (4)$$

Предположим, что каждое из отображений семейства (1) является *сжимающим в широком смысле*, то есть $F_i^n(x) \to F_i^\infty(x)$ при каждом $x \in M$ и отображение $F_i^\infty : M \to M$ является *стационарным*: $F_i^\infty x \equiv x_i, i = 1, 2, \dots, p$. Нетрудно видеть, что x_i есть единственная неподвижная точка отображения F_i,

$$x_i = F_i x_i, \ i = 1, 2, \dots, p. \qquad (5)$$

В этих условиях естественно ожидать, что и отображение Хатчинсона является *сжимающим в широком смысле*, т.е. $\mathcal{F}^n X \to \mathcal{F}^\infty X$ при каждом $X \in \mathcal{M}$ и отображение $\mathcal{F}^\infty : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является *стационарным*: $\mathcal{F}^\infty X \equiv X^\infty$ для любого X из $\mathcal{M}$. Множество X^∞ является "неподвижной точкой" отображения Хатчинсона, т.е. удовлетворяет соотношению

$$X = \mathcal{F}^\infty X. \qquad (6)$$

Системой итерированных функций называется семейство отображений $F_1, F_2, \dots, F_p$ (см. (1)) вместе с итерационной схемой

$$X^{[n]} = \mathcal{F}X^{[n-1]}, \ n = 1, 2, \dots, (7) \qquad (7)$$

где $X^{[0]} = X_0$ есть произвольное непустое ограниченное замкнутое множество из M. Схема (7) соответствует так называемому *детерминированному алгоритму* из [1, с. 97]. Соответствующее данному семейству непустое ограниченное замкнутое множество $X = X^\infty$ (см. (6)) называется *аттрактором* системы итерированных функций.

Предположим, что каждое из отображений семейства (1) является *сжимающим*, т.е.

$$d(F_i x, F_i y) \le q_i d(x, y), \ i = 1, 2, \dots, p, \qquad (8)$$

где

$$0 \le q_i < 1, \ i = 1, 2, \dots, p. \qquad (9)$$

Как вытекает из принципа сжимающих отображений [2, с. 42—43] каждое сжимающее отображение есть сжимающее отображение в широком смысле. Нетрудно показать, что имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть каждое из отображений* F_i *семейства* (1) *является сжимающим с константой сжатия* $q_i, i = 1,\dots,p$ (см. (8) и (9)). *Тогда отображение Хатчинсона* $\mathcal{F}:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ *является сжимающим в хаусдорфовой метрике* (3), *т.е.*

$$h(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) \le qh(X,Y), \tag{10}$$

где

$$0 \le q = \max\{q_1, q_2,\dots,q_p\} < 1. \tag{11}$$

Из теорем 1 и 2 в силу принципа сжимающих отображений вытекает приводимое ниже важное утверждение.

Теорема 3. *Пусть* M *есть полное метрическое пространство. Пусть каждое из отображений системы* (1) *является сжимающим* (см. (8) и (9)). *Тогда существует единственная неподвижная точка* X *отображения Хатчинсона* (2). *Эта неподвижная точка (аттрактор системы итерированных функций) может быть получена методом последовательных приближений* (7). *Имеют место следующие оценки*

$$h(X, X^{[0]}) \le \frac{1}{1-q} h(X^{[1]}, X^{[0]}), \tag{12}$$

$$h(X, X^{[n]}) \le q^n h(X, X^{[0]}),\ \ n = 1,2,\dots, \tag{13}$$

$$h(X, X^{[n]}) \le \frac{q^n}{1-q} h(X^{[1]}, X^{[0]}),\ \ n = 1,2,\dots. \tag{14}$$

Ясно, что оценка (14) непосредственно вытекает из оценок (12) и (13).

Лемма 1. *Если все отображения семейства* (1) *попарно коммутируют, т.е.*

$$F_iF_j = F_jF_i,\ \ i,j = 1,2,\dots,p, \tag{15}$$

то

$$x_i = x_j,\ \ i,j = 1,2,\dots,p, \tag{16}$$

см. (5).

□ Из (15) получаем $F_iF_jx_j = F_jF_ix_j$; так как согласно (5) $F_jx_j = x_j$, то $F_ix_j = F_j\left(F_ix_j\right)$. В силу единственности неподвижной точки у отображения F_j получаем $F_ix_j = x_j$, т.е. x_j оказывается и неподвижной точкой отображения F_i. Поэтому $x_i = x_j$ и равенство (16) установлено. ■

Мы видим, что если в условиях теоремы 3 выполнены условия коммутируемости (15), то аттрактор X состоит из единственной точки $x \equiv x_i$ при $i = 1,2,\dots,p$. В дальнейшем рассматривается общий случай, то есть не предполагается, что выполнены условия коммутируемости (15).

Пусть x_0 — произвольная точка из M. Построим последовательность точек $x^{[n]}$, положив $x^{[0]} = x_0$ и выбрав в качестве $x^{[1]}$ какую-либо точку из $F_1x^{[0]}, F_2x^{[0]},\dots,F_px^{[0]}$, в качестве $x^{[2]}$ какую-либо точку из $F_1x^{[1]}, F_2x^{[1]},\dots,\ F_px^{[1]}$ и т.д. Иными словами

$$x^{[n]} = F_{i(n)}x^{[n-1]},\ \ n = 1,2,\dots, \tag{17}$$

где $x^{[0]} = x_0$ и $i(n)$ — какой-то из номеров $1,2,\dots,p$. Алгоритм (17) есть составная часть так называемого *рандомизированного алгоритма* из [1, с. 98]. Последовательность $i(1), i(2),\dots$, каждый член которой принимает одно из значений $1,2,\dots,p$ назовем *управляющей*. (В рандомизированном алгоритме она должна обладать некоторыми статистическими закономерностями.)

Между детерминированным алгоритмом (7) и рандомизированным алгоритмом (17) существует простая связь. Если $x_0 \in X_0$, то

$$x^{[n]} \in X^{[n]},\ \ n = 1,2,\dots \tag{18}$$

при любом выборе управляющей последовательности $i(1), i(2),\dots,i(n)$ и наоборот

$$X^{[n]} = \{x_{i_1\dots i_n}(x_0) : 1 \le i_1,\dots,i_n \le p, x_0 \in X_0\}, \tag{19}$$

где $x_{i_1\dots i_n}(x_0) = x^{[n]}$ из (17) при $i(1) = i_1,\dots,i(n) = i_n$.

Пусть $i_1,\dots,i_n$ — набор из n чисел, каждое из которых может принимать значения $1,\dots,p$. Рассмотрим отображение

$$F_{i_1\dots i_n} \equiv F_{i_n}\dots F_{i_1} : M \to M \tag{20}$$

(именно в этом порядке!). Ясно, что оно является сжимающим и в силу (8) и (9)

$$d(F_{i_1\dots i_n}x, F_{i_1\dots i_n}y) \le q_{i_1\dots i_n}d(x,y), \tag{21}$$

где (см. (11))

$$0 \le q_{i_1\dots i_n} \equiv q_{i_n}\dots q_{i_1} \le q^n < 1. \tag{22}$$

Поэтому каждое такое отображение имеет единственную неподвижную точку, которую мы обозначим через $x_{i_1\dots i_n}$,

$$x_{i_1\dots i_n} = F_{i_1\dots i_n}x_{i_1\dots i_n}. \tag{23}$$

В этой статье основной является

Теорема 4. *В предположениях теоремы 3 аттрактор* X *всегда является компактным множеством. Он состоит из всевозможных точек* $x_{i_1\dots i_n}$ (см. (23)) *и их пределов; иными словами: каждая неподвижная точка* $x_{i_1\dots i_n}$ *отображения* $F_{i_1\dots i_n}$ (см. (20)) *входит в аттрактор* X *и множество таких точек плотно в* X.

Было бы весьма интересно с позиций теоремы 4 проанализировать различные примеры странных аттракторов, разобранные в книге [3].

□ Покажем, что аттрактор X является не только ограниченным и замкнутым множеством, но и компактным. Пусть x_0 — совершенно произвольная точка из M. Положим $X_0 = \{x_0\}$ (одноэлементное множество) и построим согласно детерменированному алгоритму (7) последовательность множеств $X^{[1]}, X^{[2]}, \ldots$. Тогда, во-первых, каждое из $X^{[n]}$ состоит из конечного числа точек, а, во-вторых, для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ в силу оценки (13) (или (14))

$$h(X, X^{[n]}) < \varepsilon,$$

если номер n достаточно велик. Фиксируя найденное n, мы видим, что аттрактор X содержится в ε-окрестности множества $X^{[n]}$:

$$X \subseteq S(X^{[n]}, \varepsilon).$$

Отсюда вытекает, что конечное множество $X^{[n]}$ является ε-сетью для X. Поэтому по теореме Хаусдорфа [4, с. 51] в силу произвольности $\varepsilon > 0$ аттрактор X является компактным множеством.

Первое утверждение теоремы 4 доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим предварительно произвольную последовательность $x^{[n]}$, построенную по рандомизированному алгоритму (17). Так как в изучаемом случае

$$\delta \equiv h(X^{[1]}, X^{[0]}) = \max\{d(F_i x_0, x_0) : 1 \le i \le p\},$$

то из оценки (14) находим

$$h(X, X^{[n]}) \le \frac{q^n}{1-q}\delta. \qquad (24)$$

Так как очевидно в силу (18) $x^{[n]} \in X^{[n]}$, то при любом выборе управляющей последовательности $i(1), i(2), \ldots$ из оценки (22) получаем

$$d(X, x^{[n]}) \le \frac{q^n}{1-q}\delta. \qquad (25)$$

Мы видим, что расстояние от точки $x^{[n]}$ до аттрактора X стремится к нулю при $n \to +\infty$ (со скоростью геометрической прогрессии), что и объясняет происхождение названия этого множества (аттрактор).

Пусть теперь $x_0 = x_{i_1 \ldots i_n}$ (см. (23)). В качестве управляющей последовательности $i(1), i(2), \ldots$ возьмем последовательность, содержащую $i_1 \ldots i_n$ в качестве периода. Тогда $x^{[kn]} = x_0 = x_{i_1 \ldots i_n}$ при любом целом положительном k, и так как согласно доказанному выше $d(X, x^{[kn]}) \to 0$ при $k \to +\infty$ (см. оценку (25)), то $d(X, x_0) \to 0$, то есть $d(X, x_0) = 0$. Поэтому $x_0 \in \bar{X}$ (замыкание X) и так как аттрактор X есть замкнутое множество, то $x_0 \equiv x_{i_1 \ldots i_n} \in X$.

Второе утверждение теоремы 4 доказано.

Покажем, что множество неподвижных точек отображения (20) плотно в X. Пусть x_0 есть произвольная фиксированная точка из аттрактора X. По лемме 2, доказательство которой приведено ниже, построим по рандомизированному алгоритму (17) такую последовательность $x^{[n]}$, которая плотна в X, причем $x^{[0]} = x_0$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем номер $n = n(\varepsilon)$ так, чтобы

$$d(x^{[n(\varepsilon)]}, x_0) < d \equiv \varepsilon(1-q).$$

Рассмотрим отображение (20), где $i_1, \ldots, i_n$ есть $i(1), \ldots, i(n(\varepsilon))$. Тогда

$$F_{i_1 \ldots i_n} x_0 = x^{[n(\varepsilon)]}$$

и так как согласно принципу сжимающих отображений

$$d(x_0, x_{i_1 \ldots i_n}) \le \frac{d(x_0, x^{[n(\varepsilon)]})}{1 - q_{i_1 \ldots i_n}} < \frac{\alpha}{1-q} = \varepsilon,$$

то плотность множества неподвижных точек $x_{i_1 \ldots i_n}$ отображений $F_{i_1 \ldots i_n}$ в аттракторе X установлена.

Третье утверждение теоремы 4 также доказано. ■

Лемма 2. *Пусть x_0 есть произвольная фиксированная точка из аттрактора X. Тогда можно указать такую управляющую последовательность $i(1), i(2) \ldots$, что последовательность $x^{[n]}$, построенная по рандомизированному алгоритму* (17), *всюду плотна в X.*

□ Покажем сначала, что для произвольных y_0 из X и $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $n(\varepsilon)$ и такой набор $i_1, \ldots i_{n(\varepsilon)}$, что если положить $x^{[0]} = x_0$ и далее строить последовательность $x^{[n]}$ по рандомизированному алгоритму (17), то $d(y_0, x^{[n(\varepsilon)]}) < \varepsilon$.

Возьмем $X_0 = \{x_0\}$ (одноэлементное множество) и согласно детерминированному алгоритму (7) построим последовательность множеств $X^{[n]}$. Так как в силу оценки (13) (или(14))

$$h(X, X^{[n]}) < \varepsilon,$$

если номер $n = n(\varepsilon)$ достаточно велик, то для элемента y_0 из X существует такой элемент $\tilde{x}$ из $X^{[n(\varepsilon)]}$, что $d(y_0, \tilde{x}) < \varepsilon$. По формуле (19) существует такой набор $i_1, \ldots i_{n(\varepsilon)}$, для которого

$$x_{i_1, \ldots, i_{n(\varepsilon)}}(x_0) \equiv x^{[n(\varepsilon)]} = \tilde{x}.$$

Поэтому $d(y_0, x^{[n(\varepsilon)]}) < \varepsilon$, и наше утверждение доказано.

Для завершения доказательства леммы 2 возьмем в аттракторе X произвольное счетное всюду плотное множество $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, стремящуюся к нулю. Полагая $y_0 = \xi_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$ в силу сказанного выше найдем такой номер n_1 и такой набор $i_1 \ldots i_{n_1}$, для которого

$$d(\xi_1, x^{n_1}) < \varepsilon_1.$$

После этого возьмем в качестве начальной точки $x^{[n_1]}$, в качестве $y_0 = \xi_2$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$. В силу сказанного выше найдем такой номер n_2 и такой набор $j_1 \ldots j_{n_2}$, для которого

$$d(\xi_2, x_{j_1 \cdots j_{n_2}}(x^{[n_1]})) < \varepsilon_2,$$

то есть

$$d(\xi_2, x^{[n_1+n_2]}) < \varepsilon_2$$

для набора $i_1 \ldots i_{n_1} j_1 \ldots j_{n_2}$. Продолжая этот процесс дальше, мы построим такую последовательность номеров $n_1, n_2, \ldots$, что

$$d(\xi_k, x^{[n_1+\cdots+n_k]}) < \varepsilon_k, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Ясно, что построенная последовательность обладает требуемыми свойствами. ■

В книге [1] в качестве метрического пространства M фигурирует вещественное n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, а в качестве отображений семейства (1) произвольные аффинные сжимающие отображения, т. е.

$$F_i x = A_i x + b_i, \;\; i = 1, \ldots, p,$$

где A_i вещественная невырожденая $n \times n$-матрица, спектральный радиус которой меньше единицы, а $b_i \in \mathbb{R}^n$. В качестве аттракторов получаются классические фракталы: *пыль Кантора, ковер Серпинского, губка Менгера* и т.п.

И последнее. Прежде чем сказать, что отображение Хатчинсона $\mathcal{F}$ (см. (2)) действует пространстве $\mathcal{M}$ непустых ограниченных и замкнутых множеств из M, предполагалось, что отображения F_i семейства (1) являются ограниченными и замкнутыми. Когда мы затем предположили, что отображения F_i являются сжимающими (см. (8) и (9)), то тем самым они стали непрерывными и ограниченными, однако замкнутыми они могли и не быть. Чтобы устранить этот дефект можно дополнительно к (8) и (9) предположить, что F_i являются гомеоморфными отображениями, т.е. отображающими M на себя взаимно однозначно и взаимно непрерывно [4, с. 40—41].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / Р. М. Кроновер — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.

2. *Люстерник Л.А.* Краткий курс функционального анализа. / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев — М.: Высшая школа, 1982. — 272 с.

3. *Мун Ф.* Хаотические колебания. / Ф. Мун — М.: Мир, 1990. — 312 с.

4. *Борисович Ю.Г.* Введение в топологию. / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко — М.: Высшая школа, 1980. — 296 с.

Поступила в редакцию 20.02.2007