УДК: 539.3

УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА И ПЛАСТИНКИ УФЛЯНДА—МИНДЛИНА

А. А. Локтев

ООО «Конмарк», Воронеж

В работе рассматривается поперечный удар вязкоупругого тела с вязкоупругой изотропной пластинкой, динамическое поведение которой описывается уравнениями, учитывающими инерцию вращения нормали к срединной поверхности и деформации поперечного сдвига нормального сечения пластинки. В качестве метода решения применяется лучевой метод, основанный на лучевых рядах и условиях совместности, а также метод сращивания асимптотических разложений, полученных для малых времен в зоне контакта и вне ее. Получены простые и компактные аналитические выражения для контактной силы. Проведенные численные исследования позволяют сделать заключение о влиянии параметров конструкции, в том числе отвечающих за вязкоупругие свойства контактирующих тел, на динамические характеристики взаимодействия.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, связанные с проблемой ударного взаимодействия пластин с другими телами, актуальны как с точки зрения фундаментальных исследований по прикладной механике, так и с точки зрения приложений.

Одним из примеров, связанных с ударным взаимодействием плиты с твердым телом посредством буфера, является удар свободно падающего противовеса лифта о железобетонное перекрытие под шахтой. В литературе встречается несколько подходов для определения характеристик ударного взаимодействия. Один из таких подходов был предложен в работах [1, 2] для динамического расчета пластинок и балок, испытывающих поперечное воздействие упругих стержня и шара. Он основан на использовании волновых уравнений Уфлянда—Миндлина, описывающих динамическое поведение пластинки, и зарождении в момент удара в ней нестационарной волны поперечного сдвига, за счет которой происходит деформация материала пластинки вне контактной области. Используя волновой подход в работах [3, 4] исследовался поперечный удар твердого тела о нелинейно упругий и упругий буфер, установленный на упругой изотропной и ортотропной пластине.

Все более возрастающие потребности инженерной практики заставляют исследователей идти по пути усложнения реологических моделей соударяемых тел и более детального описания характера их ударного взаимодействия, что в свою очередь приводит к созданию более совершенных средств противоударной защиты конструкций и их элементов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вязкоупругий ударник представляет собой вязкоупругий буфер в виде соединенных последовательно гидравлического демпфера и цилиндрической пружины, один конец которого жестко соединен с твердым телом, а второй свободен [5].

Ударник массой m движется со скоростью V_0 перпендикулярно к круглой пластинке толщиной h и падает в ее центре. В момент удара в пластинке образуется контактная область радиусом r_0, размеры которой определяются размерами свободного конца ударяющего по ней буфера (рис.1). Предполагается, что буфер не теряет устойчивость в процессе взаимодействия.

Движение ударника после начала взаимодействия описывается уравнением

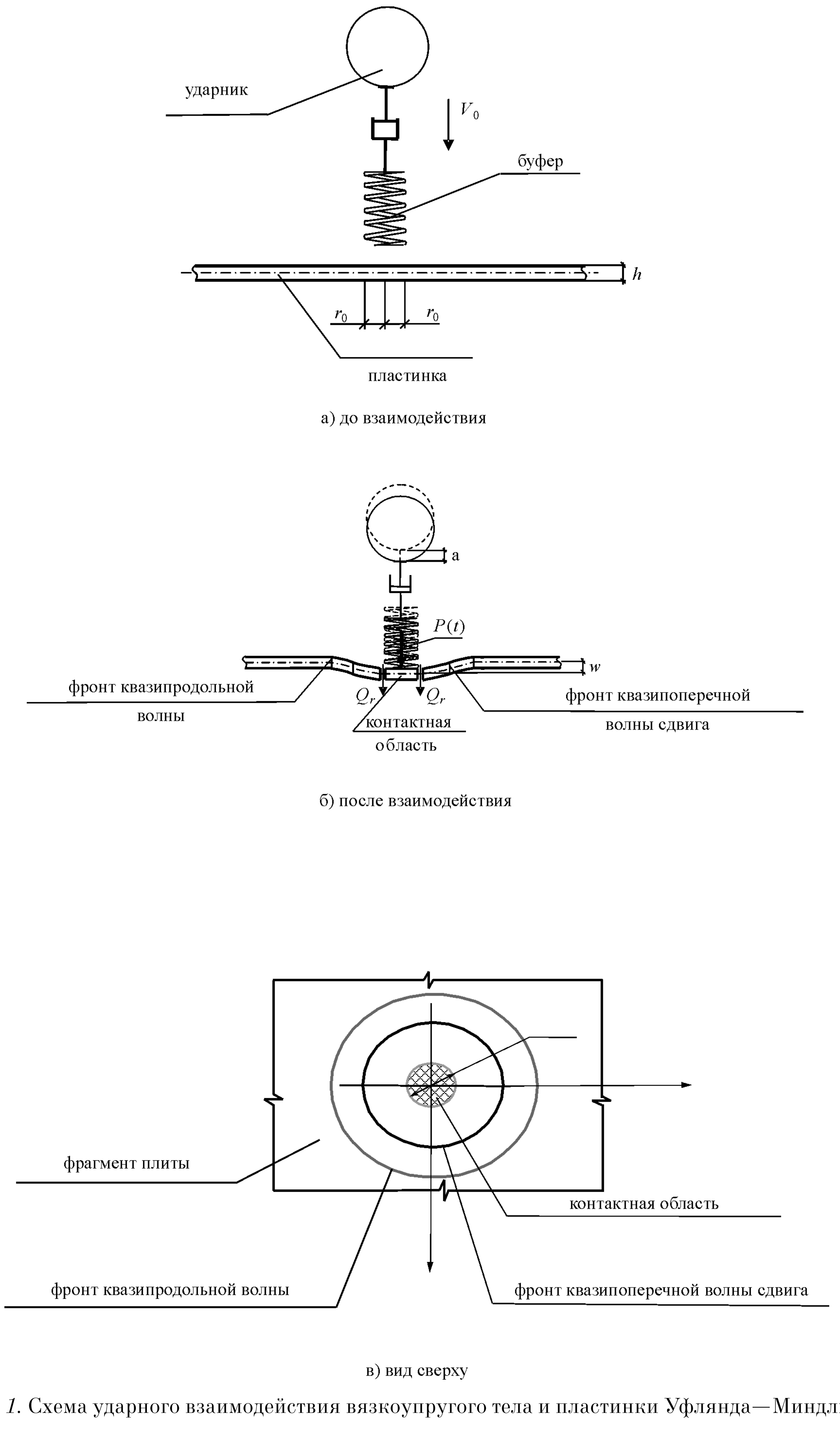
$$m\ddot{\alpha} = -P(t), \quad (1)$$

а уравнение движения контактной области пластинки имеет вид

$$\rho h \pi r_0^2 \ddot{w} = 2\pi r_0 Q_{r|r=r_0} + P(t),, \quad (2)$$

где ρ — плотность материала пластинки, α и w — перемещения верхнего и нижнего конца буфера, соответственно, $P(t)$ — контактная сила, t — время с момента удара, $Q_{r|r=r_0}$ — перерезывающая сила на границе контактной области.

Контактная сила для вязкоупругого элемента Максвелла описывается интегральным вы-



в) вид сверху

Рис. 1. Схема ударного взаимодействия вязкоупругого тела и пластинки Уфлянда—Миндлина ражением с экспоненциальным ядром релаксации

$$P(t) = E_1(\alpha - w) - \frac{E_1}{\tau_1}\int_0^t (\dot{\alpha} - \dot{w}) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt', \quad (3)$$

где E_1 — коэффициент жесткости пружины буфера, τ_1 — время релаксации буфера, t' — переменная интегрирования, $\alpha - w$ — величина сжатия буфера.

Процесс ударного взаимодействия происходит при соблюдении трех начальных условий

$$\dot{\alpha}\big|_{t=0} = V_0, \quad \dot{w}\big|_{t=0} = 0, \quad P(t)\big|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Динамическое поведение вязкоупругой изотропной пластинки в полярной системе координат r, φ описывается уравнениями Уфлянда—Миндлина, учитывающими инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига:

$$\frac{1}{r}\left(M_r - M_\varphi\right) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + Q_r = \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\beta}_r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} = \rho h \dot{W}, \quad (6)$$

$$\dot{M}_r = -D_\infty\left[\left(\frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r} + \sigma\frac{\dot{\beta}_r}{r}\right) - \int_0^t g(t-t')\left(\frac{\partial \ddot{\beta}_r}{\partial r} + \sigma\frac{\ddot{\beta}_r}{r}\right)dt'\right], \quad (7)$$

$$\dot{M}_\varphi = -D_\infty\left[\left(\frac{\dot{\beta}_r}{r} + \sigma\frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r}\right) - \int_0^t g(t-t')\left(\frac{\ddot{\beta}_r}{r} + \sigma\frac{\partial \ddot{\beta}_r}{\partial r}\right)dt'\right], \quad (8)$$

$$\dot{Q}_r = K\mu_\infty h\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \dot{\beta}_r\right) - \int_0^t g(t-t')\left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial r} - \ddot{\beta}_r\right)dt'\right], \quad (9)$$

где r и φ — полярные радиус и угол, M_r и M_φ — изгибающие моменты, Q_r — перерезывающая сила, $\dot{\beta}_r$ — угловая скорость вращения нормали к срединной поверхности пластинки в направлении r, $W = \dot{w}$ — скорость прогиба, $K = \pi^2/12$ — коэффициент, учитывающий сдвиг, σ — коэффициент Пуассона, $D_\infty = E_\infty\left(1-\sigma^2\right)^{-1} h^3/12$, $\mu_\infty = E_\infty/2(1+\sigma)$, $g(t-t') = 1 - e^{-(t-t')/\tau}$, $g(t)$ — функция релаксации для модели Максвелла, E_∞ и μ_∞ — нерелаксированные значения модуля Юнга и модуля сдвига соответственно.

В результате поперечного удара в пластинке на границе контактной области зарождаются продольная и поперечная волны, фронты которых представляют собой цилиндрические поверхности сильного разрыва, образующие которых параллельны нормали к срединной поверхности, а направляющие, расположенные в срединной плоскости, представляют собой окружности, расширяющиеся с нормальными скоростями $G^{(\alpha)}$ (индекс α принимает значение 1 и 2 и означает номер волны).

Вне контактной области за фронтом каждой волновой поверхности $\Sigma^{(\alpha)}$ искомая функция представляется в виде лучевого ряда [2]

$$Z(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[Z_{,(k)}\right]_{t=r/G} \times \left(t - \frac{r-r_0}{G}\right)^k H\left(t - \frac{r-r_0}{G}\right), \quad (10)$$

где $[Z_{,(k)}] = Z^+_{,(k)} - Z^-_{,(k)} = [\partial^k Z/\partial t^k]$ — скачки производных k-го порядка по времени t от искомой функции Z на волновой поверхности Σ, т.е. при $t = (r-r_0)/G^{(\alpha)}$, r_0 — начальный радиус (радиус свободного конца буфера), величины Z^+ и Z^- вычислялись непосредственно перед и за волновым фронтом соответственно, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, r — длина дуги, отсчитываемая вдоль луча.

Для определения скачков производных от искомых функций в лучевом ряду (10) необходимо продифференцировать определяющие уравнения (5—9) для вязкоупругой пластинки k раз по времени, взять их разность на различных сторонах волновой поверхности $\Sigma^{(\alpha)}$ и для перехода от производной по поверхностной координате k-го порядка от функции Z к производной по времени $k+1$-го порядка применить условие совместности [6]:

$$G\left[\frac{\partial Z_{,(k)}}{\partial r}\right] = -\left[Z_{,(k+1)}\right] + \frac{\delta\left[Z_{,(k)}\right]}{\delta t}, \quad (11)$$

где r — пространственная координата вдоль прямого луча, $\delta/\delta t$ — δ-роизводная по времени.

В результате из уравнений движения (5), (6) для упругой изотропной пластинки получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений, решая которую можно получить скачки искомых величин с точностью до произвольных констант:

$$\left(1-\frac{\rho h^3 G^2}{12D}\right)\omega_{(k+1)} = 2\frac{d\omega_{(k)}}{dt} + Gr^{-1}\omega_{(k)} + \omega_{(k)}\Gamma(0) + bGX_{(k)} + F_{1(k-1)}, \tag{12}$$

$$\left(1-\frac{\rho G^2}{K\mu}\right)X_{(k+1)} = 2\frac{dX_{(k)}}{dt} + Gr^{-1}X_{(k)} + X_{(k)}\Gamma(0) - G\omega_{(k)} + F_{2(k-1)}. \tag{13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{1(k-1)} = &-\frac{d^2\omega_{(k-1)}}{dt^2} - Gr^{-1}\frac{d\omega_{(k-1)}}{dt} + G^2r^{-2}\omega_{(k-1)} - bG\frac{dX_{(k-1)}}{dt} + \\ &+bG^2\omega_{(k-1)} + \Bigg(-2\frac{d\omega_{(k-1)}}{dt} - Gr^{-1}\omega_{(k-1)} + Gr^{-1}\frac{d\omega_{(k-2)}}{dt} - G^2r^{-2}\omega_{(k-2)} + \frac{d^2\omega_{(k-2)}}{dt^2} - \\ &-bGX_{(k-1)} + bG\frac{dX_{(k-2)}}{dt} - bG^2\omega_{(k-2)}\Bigg)\Gamma(0) + \\ &+Gr^{-1}\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(-\omega_{(i+1)} + \frac{d\omega_{(i)}}{dt}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-2)} - \\ &-Gr^{-1}\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(Gr^{-1}\omega_{(i)}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-2)} - \\ &-\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(-\omega_{(i+1)} + \frac{d\omega_{(i)}}{dt}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-1)} + \\ &+\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(-\omega_{(i+1)} + \frac{d\omega_{(i)}}{dt}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-2)} + \\ &+bG\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{2(k-1)} = &\,G\frac{d\omega_{(k-1)}}{dt} - \frac{d^2X_{(k-1)}}{dt^2} - Gr^{-1}\frac{dX_{(k-1)}}{dt} + G^2r^{-1}\omega_{(k-1)} + \\ &+\Bigg(-2\frac{dX_{(k-1)}}{dt} + G\omega_{(k-1)} + \frac{d^2X_{(k-2)}}{dt^2} - \\ &-G\frac{d\omega_{(k-2)}}{dt} - Gr^{-1}X_{(k-1)} + Gr^{-1}\frac{dX_{(k-2)}}{dt} - G^2r^{-1}\omega_{(k-2)}\Bigg)\Gamma(0) - \\ &-\sum_{i=0}^{i=k-2}\left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-1)} + \\ &+\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-2)} + \\ &+Gr^{-1}\sum_{i=0}^{i=k-3}\left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)}\right)\Gamma(0)_{,(k-i-2)}. \end{aligned}$$

где $\Gamma(t) = \dot{g}(t)$ — ядро релаксации, $\Gamma(0)$ — ядро релаксации в начальный момент времени $t=0$.

При выводе уравнений (12—13) учитывался осесимметричный характер задачи и, следовательно, независимость волновых характеристик от угла φ. Ограничимся в дальнейших вычислениях пятью членами лучевого ряда для искомых функций. Полагая в (12) и (13) $k=-1, 0, 1, 2, 3$, получим скачки соответствующего порядка на первой и второй волнах.

Полагая $k=-1$, из (12) и (13) находим на первой волне (квазипродольной) ее скорость и скачок нулевого порядка

$$\rho G^{(1)2} = E(1-\sigma^2)^{-1},\ \omega_{(0)}^{(1)} \neq 0,\ X_{(0)}^{(1)} = 0, \tag{14}$$

и на второй волне (квазисдвиговой)

$$\rho G^{(2)2} = K\mu,\ X_{(0)}^{(2)} \neq 0,\ \omega_{(0)}^{(2)} = 0, \tag{15}$$

Интегрируя (12) при $k=0$, получим

$$\omega_{(0)}^{(1)} = c_0^{(1)} r_1^{-1/2} e^{-1/2\Gamma(0)t}, \tag{16}$$

а из (13) алгебраическое выражение для $X_{(1)}^{(1)}$

$$X_{(1)}^{(1)} = -\omega_0^{(1)} f^{-1} G^{(1)} r_1^{-1/2} e^{-1/2\Gamma(0)t}, \tag{17}$$

где $f = 1 - EK^{-1}\mu^{-1}(1-\sigma^2)^{-1} = 1 - G^{(1)2}/G^{(2)2}$, $c_0^{(1)}$ — произвольная постоянная, $r_\alpha = G^{(\alpha)}t + r_0$ $(\alpha = 1,2)$.

Для определения недостающего скачка необходимо подставить известные величины $\omega_{(0)}^{(1)}$ и $X_{(1)}^{(1)}$ в (12) при $k=1$. В результате получим

$$\omega_{(1)}^{(1)} = \left[c_1^{(1)} r_1^{-1/2} + \frac{3}{8} c_0^{(1)} G^{(1)} r_1^{-3/2} - \frac{1}{2} c_0^{(1)} \frac{b}{e} G^{(1)} r_1^{1/2} - \frac{3}{8}\frac{\Gamma(0)^2 c_0^{(1)}}{G^{(1)}} r_1^{1/2}\right] e^{-1/2\Gamma(0)t}. \tag{18}$$

Из (15) при $k=1$ находим

$$X_{(2)}^{(1)} = G^{(1)} f^{-1}\left[-c_1^{(1)} r_1^{-1/2} + \frac{1}{8} c_0^{(1)} G^{(1)} r_1^{-3/2} + \frac{1}{2}\frac{b}{e} c_0^{(1)} G^{(1)} r_1^{1/2} + \frac{1}{2}\Gamma(0) c_0^{(1)} r_1^{-1/2} + \frac{3}{8}\Gamma(0)^2 c_0^{(1)} r_1^{1/2}\right] e^{-1/2\Gamma(0)t}, \tag{19}$$

где $c_1^{(1)}$ — произвольная постоянная.

Аналогичным образом на второй волне находим

$$X_{(0)}^{(2)} = c_0^{(2)} r_2^{-1/2} e^{-1/2\Gamma(0)t}, \quad \omega_{(1)}^{(2)} = c_0^{(2)} b e^{-1} G^{(2)} r_2^{-1/2} e^{-1/2\Gamma(0)t}, \tag{20}$$

$$X_{(1)}^{(2)} = \left[c_1^{(2)} r_2^{-1/2} - \frac{1}{8} c_0^{(2)} G^{(2)} r_2^{-3/2} + \frac{1}{2} c_0^{(2)} b e^{-1} G^{(2)} r_2^{1/2} - \frac{3}{8}\frac{\Gamma(0)^2 c_0^{(2)}}{G^{(2)}} r_2^{1/2}\right] e^{-1/2\Gamma(0)t}, \tag{21}$$

$$\omega_{(2)}^{(2)} = \frac{b}{e} G^{(2)} \left[c_1^{(2)} r_2^{-1/2} + \frac{3}{8} G^{(2)} c_0^{(2)} r_2^{-3/2} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{b}{e} G^{(2)} c_0^{(2)} r_2^{1/2} - \frac{1}{2} \Gamma(0) c_0^{(2)} r_2^{-1/2} - \qquad (22)$$
$$\left. - \frac{3}{8} \frac{\Gamma(0)^2}{G^{(2)}} c_0^{(2)} r_2^{1/2} \right] e^{-1/2\Gamma(0)t},$$

где $c_0^{(2)}$ и $c_1^{(2)}$ — произвольные постоянные, $e = 1 - K\mu(1-\sigma^2)/E = 1 - G^{(2)2}/G^{(1)2}$.

Из описанной схемы следует, что величины, определяющие в основном характер квазиобъемной волны, получаются из решения дифференциальных уравнений, а сопутствующие величины — алгебраических.

Скачки на первой и второй волнах при $k = 2, 3, 4$ также были подсчитаны, но не приводятся в виду их громоздкости.

Найденные скачки позволяют записать выражения для искомых функций в виде отрезков лучевых рядов с известными с точностью до постоянных интегрирования коэффициентами

$$W \cong \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} X_{(k)}^{(\alpha)} y_\alpha^k H(y_\alpha), \qquad (23)$$

$$Q_r \cong K\mu h \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} \left[\left(-X_{(k)}^{(\alpha)} G^{(\alpha)-1} + \right. \right.$$
$$\left. + \frac{dX_{(k-1)}^{(\alpha)}}{dt} G^{(\alpha)-1} - \omega_{(k-1)}^{(\alpha)} \right) +$$
$$+ \left(-X_{(k-1)}^{(\alpha)} G^{(\alpha)-1} + \frac{dX_{(k-2)}^{(\alpha)}}{dt} G^{(\alpha)-1} - \omega_{(k-2)}^{(\alpha)} \right) \Gamma(0) + \qquad (24)$$
$$+ \sum_{i=0}^{i=k-2} \left(-X_{(i)}^{(\alpha)} G^{(\alpha)-1} + \frac{dX_{(i-1)}^{(\alpha)}}{dt} G^{(\alpha)-1} - \right.$$
$$\left. \left. - \omega_{(i-1)}^{(\alpha)} \right) \Gamma(0)_{,(k-i-1)} \right] y_\alpha^k H(y_\alpha).$$

где Q_r — поперечная сила на площадке с нормалью r, $y_\alpha = t - (r - r_0) G^{(\alpha)-1}$, а величины $X_{(k)}^{(\alpha)}$ и $\omega_{(k)}^{(\alpha)}$ вычисляются при $y_\alpha = 0$.

Добавляя к уравнениям (1), (2) выражение (3) в дифференциальном виде и считая контактную область жестким пятном, приходим к системе уравнений, которая определяет процесс взаимодействия ударника и плиты:

$$m\ddot{\alpha} = -P(t),$$
$$\rho h \pi r_0^2 \ddot{w} = 2\pi r_0 Q_r + P(t),$$
$$E_1(\dot{\alpha} - \dot{w}) = \dot{P}(t) + \frac{P(t)}{\tau_1}, \qquad (25)$$
$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0,$$

Для решения системы уравнений (25) необходимо от лучевых рядов (23), (24) перейти к степенным по времени t, а функции α и $P(t)$ представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5, , \qquad (26)$$

$$P(t) = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + P_4 t^4 + P_5 t^5, \qquad (27)$$

где α_i и P_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ — пока неизвестные константы.

Подставляя соотношения (23) и (24), записанные на границе области контакта, т.е. при $r = r_0$, и (26), (27) в уравнения (25) и приравнивая коэффициенты в полученных выражениях при одинаковых степенях t, на каждом шаге приходим к системе четырех алгебраических уравнений для определения четырех неизвестных констант $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ $(j = 0, 1, 2)$, α_i и P_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Найденные постоянные величины α_i, P_i $(i = 0...5)$, $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ $(i = 0...3)$ позволяют полностью решить поставленную задачу и, в частности, найти зависимость контактной силы от времени. Из (27) получаем выражение для безразмерной контактной силы при ударном взаимодействии вязкоупругого ударника и вязкоупругой пластинки:

$$\tilde{P}(\tilde{t}) = \tilde{V} \left\{ \tilde{t} - \frac{\tilde{E}}{\pi \tilde{h}} (\tilde{m} + 2) \frac{\tilde{t}^3}{6} + \right.$$
$$+ \frac{\tilde{E}}{\pi \tilde{h}} \left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right) \frac{\tilde{t}^4}{6} - \frac{\tilde{E}}{\pi \tilde{h}} \left[\left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\tilde{g}}{3} \left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right) - \frac{\tilde{E}}{6\pi \tilde{h}} (\tilde{m} + 2)^2 \right] \frac{\tilde{t}^5}{20} - \frac{1}{\tilde{\tau}_1} \tilde{t}^2 + \qquad (28)$$
$$+ \frac{1}{3\tilde{\tau}_1^2} \tilde{t}^3 + \left[\frac{\tilde{E}}{3\tilde{\tau}_1 \tilde{h} \pi} (\tilde{m} + 2) - \frac{1}{2\tilde{\tau}_1^3} \right] \frac{\tilde{t}^4}{4}$$
$$\left. - \left[\frac{7\tilde{E}}{8\tilde{\tau}_1^2 \tilde{h} \pi} (\tilde{m} + 2) + \frac{\tilde{E}}{\tilde{\tau}_1 \tilde{h} \pi} \left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right) - \frac{1}{2\tilde{\tau}_1^4} \right] \frac{\tilde{t}^5}{15} \right\},$$

где $\tilde{t} = \frac{G^{(1)}}{r_0} t$, $\tilde{P} = \frac{P}{E_1 r_0}$, $\tilde{h} = \frac{h}{r_0}$, $\tilde{m} = \frac{\rho h \pi r_0^2}{m}$,

$\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} = \sqrt{\frac{K\mu(1-\sigma^2)}{E}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-\sigma}{6}}$, $\tilde{E} = \frac{E_1(1-\sigma^2)}{E r_0}$,

$\tilde{V} = \frac{V_0}{G^{(1)}}$, $\tilde{\tau}_1 = \frac{G^{(1)}}{r_0} \tau_1$ — безразмерное время релаксации буфера, $\tilde{g} = \Gamma(0) \frac{r_0}{G^{(1)}}$ — безразмерный параметр вязкости пластинки при $t = 0$.

В случае $\Gamma(0) = 0$ из выражений (7)—(9), (12), (13), (16)—(22), (24) получим соотношения для упругой изотропной пластинки, а из (27) и (28) контактную силу при ударном взаимодействии вязкоупругого ударника и упругой пластинки:

$$\tilde{P}\left(\tilde{t}\right)=\tilde{V}\left\{\tilde{t}-\frac{\tilde{E}}{\pi\tilde{h}}(\tilde{m}+2)\frac{\tilde{t}^3}{6}+\right.$$
$$+\frac{\tilde{E}}{\pi\tilde{h}}\left(1+\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}}\right)\frac{\tilde{t}^4}{6}-\frac{\tilde{E}}{\pi\tilde{h}}\times$$
$$\times\left[\left(1+\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}}\right)^2-\frac{\tilde{E}}{6\pi\tilde{h}}(\tilde{m}+2)^2\right]\frac{\tilde{t}^5}{20}-\frac{1}{\tilde{\tau}_1}\tilde{t}^2+$$
$$+\frac{1}{3\tilde{\tau}_1^2}\tilde{t}^3+\left[\frac{\tilde{E}}{3\tilde{\tau}_1\tilde{h}\pi}(\tilde{m}+2)-\frac{1}{2\tilde{\tau}_1^3}\right]\frac{\tilde{t}^4}{4}- \quad (29)$$
$$-\left[\frac{7\tilde{E}}{8\tilde{\tau}_1^2\tilde{h}\pi}(\tilde{m}+2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{E}}{\tilde{\tau}_1\tilde{h}\pi}\left(1+\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}}\right)-\frac{1}{2\tilde{\tau}_1^4}\right]\left.\frac{\tilde{t}^5}{15}\right\}.$$

При $\tau_1\to\infty$ из (3), (25) получим соотношения для упругого ударника, а из (27) и (28) контактную силу при ударном взаимодействии упругого ударника и вязкоупругой пластинки:

$$\tilde{P}\left(\tilde{t}\right)=\tilde{V}\left\{\tilde{t}-\frac{\tilde{E}}{\pi\tilde{h}}(\tilde{m}+2)\frac{\tilde{t}^3}{6}+\right.$$
$$\frac{\tilde{E}}{\pi\tilde{h}}\left(1+\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}}\right)\frac{\tilde{t}^4}{6}-\frac{\tilde{E}}{\pi\tilde{h}}\times \quad (30)$$
$$\times\left[\left(1+\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}}\right)^2+\frac{\tilde{g}}{3}\left(1+\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}}\right)-\frac{\tilde{E}}{6\pi\tilde{h}}(\tilde{m}+2)^2\right]\left.\frac{\tilde{t}^5}{20}\right\},$$

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

На рис. 2 построены графики зависимостей контактной силы от времени на основании формулы (30) для различного безразмерного времени релаксации буфера $\tilde{\tau}_1$, которое меняется в широких пределах. Остальные параметры принимают следующие значения: $\tilde{V}=8.5\cdot10^{-3}$, $\tilde{m}=25$, $\sigma=0.3$, $\tilde{h}=1$, $\tilde{E}=1.1\cdot10^{-6}$. На рис. 4 приведены кривые, изображающие максимальную контактную силу как функцию безразмерного времени релаксации буфера, для разных значений относительной жесткости буфера $\tilde{E}$. Числа, стоящие на графике около пунктирных линий, представляют собой значения максимальной контактной силы в случае линейно упругого буфера для соответствующего $\tilde{E}$.

Из рис. 2 и 3 следует, что максимальная безразмерная контактная сила уменьшается с

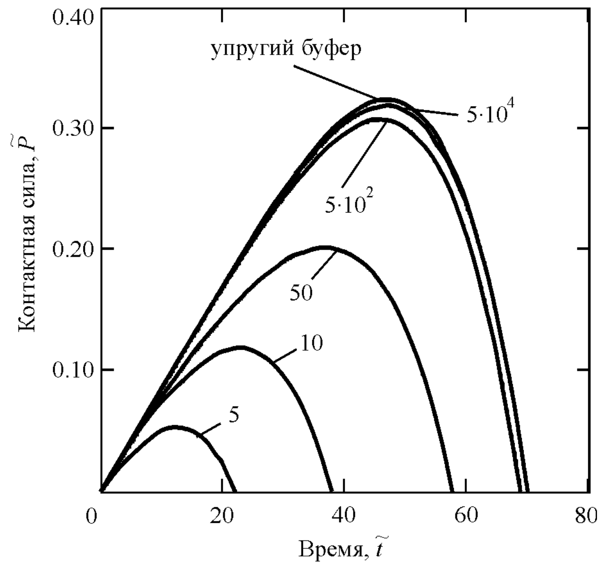


Рис. 2. Зависимость контактной силы от времени для различных значений безразмерного времени релаксации буфера $\tilde{\tau}_1$

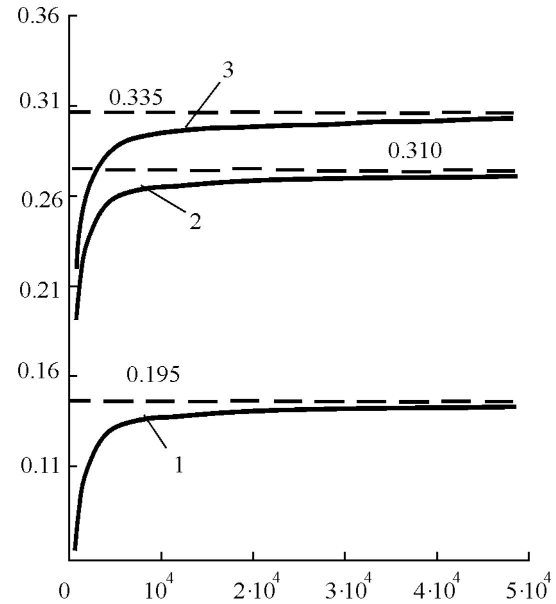


Рис. 3. Зависимость максимальной контактной силы от безразмерного времени релаксации буфера для пластинок с различными характеристиками $\tilde{E}$: кривая 1 — $\tilde{E}=10\cdot10^{-6}$, кривая 2 – $\tilde{E}=2\cdot10^{-6}$, кривая 3 — $\tilde{E}=1\cdot10^{-6}$

уменьшением безразмерного времени релаксации. При неограниченном возрастании времени релаксации кривая контактной силы бесконечно близко приближается к кривой (рис. 2) или прямой (рис. 3), соответствующим линейно упругому буферу.

На рис. 4 приведены графики зависимости безразмерной контактной силы (29), (31) от безразмерного времени для различных значе-

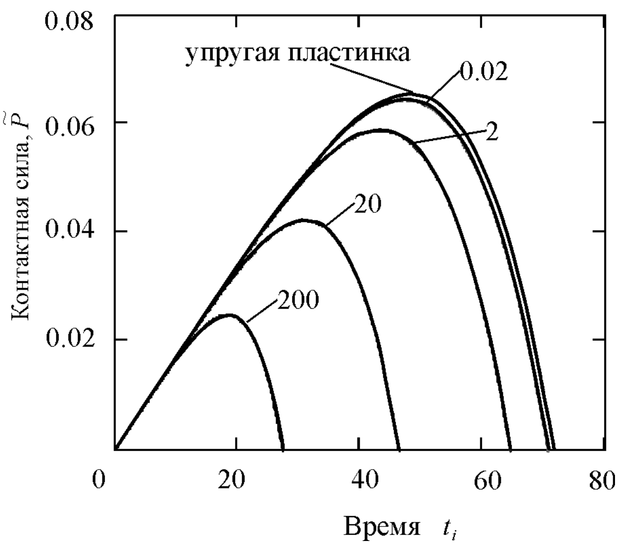


Рис. 4. Зависимость контактной силы от времени для различных значений параметра вязкости пластинки $\tilde{g}$

ний параметра вязкости пластинки $\tilde{g}$, которые указаны цифрами у кривых. Из рис. 4 видно, что максимальная контактная сила уменьшается с увеличением безразмерного параметра вязкости пластинки, т.е. с уменьшением времени релаксации. При неограниченном уменьшении $\tilde{g}$ кривая контактной силы бесконечно близко приближается к кривой в случае упругой пластинки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из анализа графиков на рис. 2—4 и формул (29), (30) видно, что вязкоупругие свойства буфера доминируют в начале процесса ударного взаимодействия тела с вязкоупругой пластинкой, поскольку от них зависит коэффициент при t^2 и более высоких степенях t, а вязкость пластинки включается в конце первой половины процесса взаимодействия, т.к. она влияет только на коэффициент при t^5.

Таким образом, используемый метод хорошо приспособлен для описания кратковременных процессов и позволяет учесть влияние реологических свойств соударяемых тел на динамические характеристики ударного взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.П.* Поперечный упругий удар тяжелым телом по круглой плите/ А. П. Филиппов // Механика твердого тела. — 1971. — № 6 — С. 102—109.

2. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* A ray method of solving problems connected with a shock interaction // Acta Mechanica. — 1994. — Vol. 102, № 1—4. — P. 103—121.

3. *Россихин Ю.А., Шитикова М.В., Локтев А.А.* Удар шара о нелинейно упругий буфер, установленный на плите перекрытия // Изв. вузов. Строительство. — 2004. — № 11 — С. 16—22.

4. *Локтев А.А.* Упругий поперечный удар по круглой ортотропной пластинке / А. А. Локтев // Письма в журнал технической физики. — 2005. — Т. 31, В. 18 — С. 4—9.

5. *Сеницкий Ю.Э.* Удар вязкоупругого тела по пологой сферической оболочке // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 2. — С. 138—143.

6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас — М.: Мир. — 1964. — 308 с.

Поступила в редакцию 29.01.2007