УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПИСЫВАЮЩЕЙ СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПОРОГОВОГО ТИПА*

М. Ю. Кузьмин

Воронежский государственный университет

Доказано существование решений краевой задачи описывающей стационарное движение нелинейно-вязкой жидкости при условии проскальзывания порогового типа. Доказательство теоремы существования получено с помощью аппроксимационно-топологического подхода.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена доказательству теоремы существования слабых решений краевой задачи, описывающей стационарное движение нелинейно-вязкой жидкости с условием проскальзывания на границе. Необходимо отметить, что ранее в работах H. Fugita и C. Le Roux [1], [2] при условии проскальзывания порогового типа изучалась стационарная система Навье—Стокса без конвективных членов. При этом в упомянутых работах слабая постановка формулировалась в виде вариационного неравенства. Применяемый в настоящей работе аппроксимационно-топологический подход позволяет изучить более общую задачу.

Пусть изучаемая жидкость целиком заполняет сосуд с твердыми стенками, представляемый ограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \{2,3\}$, с липшицевой границей S. Как хорошо известно, стационарное движение любой жидкости описывается уравнением движения в форме Коши:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = F_i, \qquad (1)$$

где $x \in \Omega$; $u = (u_1, \dots, u_n)$ — поле скоростей жидкости; $\{T_{ij}\}_{i,j=1,n}$ — тензор напряжений; $F = (F_1, \dots, F_n)$ — плотность объемных сил. Предполагается условие несжимаемаемости жидкости:

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (2)$$

Основным объектом исследования являются нелинейно-вязкие жидкости, подчиняющиеся следующему определяющему соотношению (см. [3], [4]):

$$T_{ij}(p,u) = -p\delta_{ij} + \varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u), \qquad (3)$$

где $\delta_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты единичного тензора и тензора скоростей деформации; $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$; φ — нелинейная вязкость, т.е. вещественная функция, определенная на множестве $[0, +\infty) (= \mathbb{R}_+)$; $I(u) = \sum_{i,j=1}^{n} (\varepsilon_{ij}(u))^2$ — второй инвариант тензора ε; p — сферическая часть тензора T.

Далее на границе S вводятся условия проскальзывания жидкости (см. [4], [5]). Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — сила взаимодействия жидкости и стенки сосуда. Имеем, что

$$f = T\eta, \qquad (4)$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} [-p\delta_{ij} + \varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u)]\eta_j \,|_S, \qquad (5)$$

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — единичная внешняя нормаль к S, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый фиксированный базис в $\mathbb{R}^n$. Поверхностную силу f можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$f(s) = f^{\eta}(s) + f^{\tau}(s) \quad \forall s \in S, \qquad (6)$$

где

$$f^{\eta}(s) = f_{\eta}^{*}(s)\eta(s), \; f_{\eta}^{*}(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\eta_i(s), \qquad (7)$$

$$f^{\tau}(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\tau}(s) e_i, \qquad (8)$$

$$f^{\tau}(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\tau}(s) e_i, \; f_i^{\tau}(s) = f_i(s) - f_{\eta}^{*}(s)\eta_i(s). \; (9)$$

Ясно, что для поля скоростей жидкости u имеет место аналогичные разложение.

* Работа поддержана грантами РФФИ (№ 04-01-00081) и Минобрнауки РФ.

Скольжение порогового типа частиц жидкости описывается следующими тремя условиями:

$$u^{\eta}(s) = 0, \tag{10}$$

$$\left|f^{\tau}(s)\right| \le g(s) \text{ при } u^{\tau}(s) = 0, \tag{11}$$

$$f^{\tau}(s) = -(g(s) + \chi(f^{*}_{\eta}(s), \left|u^{\tau}(s)\right|^{2}))\frac{u^{\tau}(s)}{\left|u^{\tau}(s)\right|} \quad \text{при } u^{\tau}(s) \ne 0 \tag{12}$$

через $|\cdot|$ обозначается норма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n, s \in S$. Вместо (11) будет рассматривается «регуляризованное» условие:

$$f^{\tau}(s) = -(g(s) + \chi(f^{*}_{r\eta}(s), \left|u^{\tau}(s)\right|^{2}))\frac{u^{\tau}(s)}{\left|u^{\tau}(s)\right|} \quad \text{при } u^{\tau}(s) \ne 0, \tag{13}$$

где g — ограниченная вещественная функция определенная на границе S, χ — вещественная непрерывная функция,

$$f^{*}_{r\eta}(p,u) = \left[-Pp + \sum_{i,j=1}^{n}\varphi(I(Pu))\varepsilon_{ij}(Pu)\eta_i\eta_j\right]\Bigg|_S,$$

здесь

$$Pv(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\omega(|\, x - x'\,|)v(x')dx', \;\; x \in \bar{\Omega},$$

при $\omega \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+), \sup p\omega \in [0,a], a \in \mathbb{R}_+,\ \omega(z) \ge 0$ при $z \in \mathbb{R}_+, \int_{\mathbb{R}^n}\omega(|\, x\,|)dx = 1.$

Кроме того, необходимо нормировочное условие на давление:

$$\int_{\Omega}p(x)dx = 0. \tag{14}$$

Итак, далее будет изучаться краевая задача (1)—(3), (10), (11), (13), (14).

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА РАБОТЫ

Перед определением понятия слабого решения обозначим некоторые пространства:

$$\mathcal{P}_0 = \left\{\rho \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega}\rho(x)dx = 0\right\},$$

$$Z = \{v : v \in H^1(\Omega)^n, v^{\eta}\,|_S = 0\},$$

$$W = \{v : v \in H^1(\Omega)^n, v^{\eta}\,|_S = 0, \;\; \operatorname{div} v\,|_{\Omega} = 0\}.$$

Пространство Z является гильбертовым (см., например, [4]) со скалярным произведением определяемым для любых $u, v \in Z$ равенством

$$(u,v)_Z = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}[u](x)\varepsilon_{ij}[v](x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{S}u_i^{\tau}(s)v_i^{\tau}(s)ds. \tag{15}$$

При этом скалярное произведение (15) порождает норму эквивалентную соболевской норме индуцированной из $H^1(\Omega)^n$.

Заметим, что если умножить обе части равенства (1) скалярно в $L_2(\Omega)^n$ на произвольную функцию $h \in Z$, получаем последовательно, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}(x)h_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}F_i(x)h_i(x)dx,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}T_{ij}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{S}T_{ij}(s)\eta_j(s)h_i(s)ds = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}F_i(x)h_i(x)dx, \tag{16}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}T_{ij}(x)\varepsilon_{ij}[h](x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}f_i^{\tau}(s)h_i(s)ds = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}F_i(x)h_i(x)dx. \tag{17}$$

(здесь предполагается, что $F \in L_2(\Omega)^n$).

Определение 1.1 *Слабым решением задачи* (1)—(3), (10), (11), (13), (14) *называем тройку функций* $(u,p,f^{\tau}) \in W \times \mathcal{P}_0 \times L_2(\partial\Omega)^n$, *удовлетворяющую при произвольной функции* $h \in Z$ *соотношениям* (3), (17), (11), (13).

На функции φ, χ, g налагаются следующие условия:

C1) Функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является непрерывной.

C2) Существуют положительные константы a_1 и a_2 такие, что $a_1 \le \varphi(y) \le a_2$ для любых $y \in \mathbb{R}_+$.

C3) Функция $y \mapsto \varphi(y^2)y$ при неотрицательных y является неубывающей.

C4) Функция $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является непрерывной.

C5) Существуют положительные константы b_1 и b_2 такие, что $b_1z_2 \le \chi(z_1,z_2) \le b_2z_2$ для любых $(z_1,z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

C6) Функция $g:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ является измеримой.

C7) Существует положительная константа c_1 такая, что $0\le g(s)\le c_1 \forall s\in\partial\Omega$.

Главный результат работы представляет

Теорема. *При выполнении условий* C1)—C7) *существует по крайней мере одно слабое решение задачи* (1)—(3), (10), (11), (13), (14).

Для доказательства вышеприведенной теоремы применяется аппроксимационно-топологический метод [6], для чего, вначале, вводится так называемое апроксимирующее семейство уравнений, — некоторое семейство уравнений зависящее от параметра δ, далее, с помощью теории И. В. Скрыпника топологической степени обобщенных монотонных отображений, на основании априорных оценок, доказывается существование решений апроксимационных уравнений, в итоге совершается предельный переход при $\delta\to 0$, посредством которого и показывается разрешимость исходного операторного уравнения, а значит и задачи (1)—(3), (10), (13), (14).

Замечание 1.1. *Покажем, что если слабое решение* (u,p,f^τ) *задачи* (1)—(3), (10), (13), (14), *является регулярным, т.е. таким, что* $u\in C^1(\overline{\Omega})^n\cap C^2(\Omega)^n, p\in C^1(\overline{\Omega}), f^\tau\in C(\partial\Omega)^n$, *функции* g,φ *и граница области* $\partial\Omega$ *являются соответственно* C^0-, C^1-, C^2-*гладкими, то выполнены соотношения* (1)—(3), (10), (13), (14). *При этом для регулярного решения выполнено равенство* $f^\tau=(T\eta)^\tau$.

Действительно, равенства (2), (14), (11) выполнены по определению слабого решения. Далее, так как соотношение (17) имеет место для всех $h\in Z$, то оно справедливо для $h\in H_0^1=\{v\in H^1(\Omega)^n, v|_{\partial\Omega}=0\}$. Для $h\in H_0^1$, "перебрасывая" производные с пробной функции h, получаем из равенства (17), что

$$\int_\Omega\left[\sum_{j=1}^n u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}-F_i\right]h_i dx=0 \ \forall h\in H_0^1. \quad (18)$$

Поскольку сужения функций из пространства H_0^1 плотны в любом пространстве $L_2(\Omega^*)^n$, где Ω^* — произвольная подобласть области Ω, не имеющая общих с Ω граничных точек, а выражение заключенное в прямоугольные скобки в соотношении (18) принадлежит $L_2(\Omega^*)^n$, то получаем, что имеет место соотношение (1). Вслед за этим, из равенства (1) выводим соотношение (16), после чего, как следствие (16) и (17) имеем, что

$$\sum_{i=1}^n\int_S (T\eta)_i^\tau h_i ds=\sum_{i=1}^n\int_S f_i^\tau h_i ds \ \forall h\in Z. \quad (19)$$

Возьмем касательную составляющую h_*^τ любой функции $h_*\in H^1(\Omega)^n$. Используя то, что граница $\partial\Omega$ является C^2-гладкой и, следовательно, для поля нормалей η существует C^1-гладкое продолжение $\tilde\eta$ на $\overline{\Omega}$ находим, что $h_*^\tau=\left[h_*-\sum_{i=1}^n(h_{*i},\tilde\eta_i)\tilde\eta\right]\Big|_{\partial\Omega}$. Следовательно, соотношение (19) выполнено для любой функции $h\in H^1(\Omega)^n$, а так как множество следов функций из $H^1(\Omega)^n$ плотно в $L_2(S)^n$, то заключаем, что имеет место соотношение (4).

2. АППРОКСИМАЦИОННОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Нетрудно заметить, что можно дать эквивалентное (1.1) определение слабого решение, как тройки функций $(u,p,f^\tau)\in W\times\mathcal{P}_0\times L_2^\tau(\partial\Omega)$, удовлетворяющей при произвольной функции $h\in Z$ соотношению вида

$$\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)dx+$$
$$+\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\varepsilon_{ij}[u](x)\varepsilon_{ij}[h](x)dx-\sum_{i=1}^n\int_S f_i^\tau(s)h_i(s)ds= \quad (20)$$
$$=\sum_{i=1}^n\int_\Omega F_i(x)h_i(x)dx.$$

а также соотношениям (11), (13).

Условимся о некоторых обозначениях. Через X^* обозначается пространство сопряженное некоторому банахову пространству X, а через $\langle \mathrm{g},y\rangle_{X^*,X}$ — действие функционала $\mathrm{g}\in X^*$ на элемент $y\in X$. В качестве пространства X как правило будет употребляться пространство Z, поэтому будет использоваться обозначение вида $\langle\cdot,\cdot\rangle(=\langle\cdot,\cdot\rangle_{Z^*,Z})$. Запись X^m обозначает топологическое произведение m экземпляров пространства X.

Введем операторы:

$$A:Z\to Z^*,$$
$$\langle A(u),h\rangle=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(h)dx, \quad (21)$$

$$\langle K_\delta(u),h\rangle=$$
$$=\sum_{i=1}^n\int_S\frac{(g+\chi(f_{r\eta}^*(-\delta^{-1}Du,u),|u|^2))}{\max(|u|,\delta)}u_ih_ids, \quad (22)$$

$$\langle M_\delta(u),h\rangle=\frac{1}{1+\delta^{1/4}\|u\|_{L_4(\Omega)^n}}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}h_idx, \quad (23)$$

$$\langle A^{+}(u),h\rangle=\delta\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(h)dx. \qquad (24)$$

Положим

$$D:Z\to L_2(\Omega),\ \ D(u)=\operatorname{div}u.$$

Отождествляя $L_2(\Omega)^n$ и $(L_2(\Omega)^n)^*$, согласно теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве, можно определить оператор

$$D^*:L_2(\Omega)^n\equiv(L_2(\Omega)^n)^*\to Z^*,$$

$$\langle D^*(p),h\rangle=\int_{\Omega}p(x)[\operatorname{div}h](x)dx,$$

Для произвольного $\delta>0$ введем вспомогательное уравнение относительно неизвестной функции u^{δ}:

$$\begin{gathered}A^{+}(u^{\delta})+A(u^{\delta})+K_{\delta}(u^{\delta})+\\+M_{\delta}(u^{\delta})+\delta^{-1}D^*D(u^{\delta})=F,\end{gathered} \qquad (25)$$

3. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Всюду далее записи $\mathbf{v}_k\underset{k\to\infty}{\to}\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_k\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}\mathbf{v}_0$ обозначают, соответственно, сильную и слабую сходимости последовательности $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$ к элементу $\mathbf{v}_0$; если же члены последовательности $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$ не стремятся к элементу $\mathbf{v}_0$ в сильном смысле, то будем обозначать этот факт как $\mathbf{v}_k\underset{k\to\infty}{\not\to}\mathbf{v}_0$.

Лемма 3.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

a) *Оператор A ограничен и непрерывен.*

b) *Оператор A является монотонным, т.е. для любых $u_1,u_2\in Z$ имеет место неравенство*

$$\langle A(u_1)-A(u_2),u_1-u_2\rangle\geq 0. \qquad (26)$$

Доказательство. a) Ограниченность оператора A следует из оценки

$$\|A(u)\|_{Z^*}\leq a_2\|u\|_Z. \qquad (27)$$

Далее доказывается свойство непрерывности оператора A. Итак, пусть $u_k\underset{k\to\infty}{\to}u_0$ в Z. Предположим, что $A(u_k)\underset{k\to\infty}{\not\to}A(u_0)$ в Z^*. Не ограничивая общности можно считать, что для некоторой подпоследовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ имеет место неравенство

$$\left\|A(u_{k_l})-A(u_0)\right\|_{Z^*}>\zeta, \qquad (28)$$

с некоторым фиксированным $\zeta>0$.

Оцениваем:

$$\begin{aligned}&\left\|A(u_{k_l})-A(u_0)\right\|_{Z^*}\overset{\text{def}}{=}\sup_{\breve{h}\in Z,\|\breve{h}\|_Z=1}\left|\langle A(u_{k_l})-A(u_0),\breve{h}\rangle\right|=\\
&=\sup_{\breve{h}\in Z,\|\breve{h}\|_Z=1}\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi(I(u_{k_l}))\varepsilon_{ij}(\breve{h})dx-\right.\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi(I(u_{k_l}))\varepsilon_{ij}(u_0)\varepsilon_{ij}(\breve{h})dx+\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi(I(u_{k_l}))\varepsilon_{ij}(u_0)\varepsilon_{ij}(\breve{h})dx-\\
&\left.-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi(I(u_0))\varepsilon_{ij}(u_0)\varepsilon_{ij}(\breve{h})dx\right|\leq\\
&\leq\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi(I(u_{k_l}))\varepsilon_{ij}(u_{k_l}-u_0)(\breve{h})dx\right|+\\
&+\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left[\varphi(I(u_{k_l}))-\varphi(I(u_0))\right]\varepsilon_{ij}(u_0)\varepsilon_{ij}(\breve{h})dx\right|\leq\\
&\leq a_2\left\|u_{k_l}-u_0\right\|z+\\
&+\left\{\int_{\Omega}\left[\varphi(I(u_{k_l}))-\varphi(I(u_0))\right]^2 I(u_0)dx\right\}^{1/2}.\end{aligned} \qquad (29)$$

Первое слагаемое в последней части неравенств (29) стремится к нулю в силу сходимости $u_k\underset{k\to\infty}{\to}u_0$ в Z. Второе слагаемое стремится к нулю в силу теоремы Лебега, так как не ограничивая общности можно полагать, что для подпоследовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ имеют место сходимость

$$I(u_{k_l})[x]\underset{l\to\infty}{\to}I(u_0)[x]\ \text{для почти всех}\ x\in\Omega. \qquad (30)$$

Следовательно $A(u_{k_l})\underset{l\to\infty}{\to}A(u_0)$, что противоречит неравенству (28).

b) Из неравенства Коши—Буняковского и условия C3) следует, что

$$\begin{aligned}&\langle A(u_1)-A(u_2),u_1-u_2\rangle=\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}[\varphi(I(u_1))\varepsilon_{ij}(u_1)-\varphi(I(u_2))\varepsilon_{ij}(u_2)]\times\\
&\times[\varepsilon_{ij}(u_1-u_2)]dx=\int_{\Omega}[\varphi(I(u_1))I(u_1)+\\
&+\varphi(I(u_2))I(u_2)]dx-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}[\varphi(I(u_1))\varepsilon_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2)-\\
&-\varphi(I(u_2))\varepsilon_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2)]dx\geq\\
&\geq\int_{\Omega}[\varphi(I(u_1))I^{1/2}(u_1)-\varphi(I(u_2))I^{1/2}(u_2)]\times\\
&\times(I^{1/2}(u_1)-I^{1/2}(u_2))dx\geq 0.\end{aligned} \qquad (31)$$

□

Лемма 3.2. *Оператор K_{δ} таков, что для любой последовательности $\{u^k\}_{k=1,\infty}$ из пространства Z такой, что $u^k\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}u^0$ в Z существует подпоследовательность $\{u^{k_l}\}_{l=1,\infty}$ так, что имеет место сходимость $K_{\delta}(u^{k_l})\underset{l\to\infty}{\to}K_{\delta}(u^0)$ в Z^*.*

Доказательство. а) Итак, пусть имеют $u^k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u^0$ в Z. Используя то, что вложение $Z \mapsto L_2(S)^n$ компактно, выделим подпоследовательность $\{u^{k_l}\}_{l=1,\infty}$ так, что

$$u^{k_l} \underset{l\to\infty}{\to} u^0 \text{ в } L_2(S)^n, \tag{32}$$

$$u^{k_l}[s] \underset{l\to\infty}{\to} u^0[s] \text{ в } \mathbb{R}^n \text{ для почти всех } s \in S. \tag{33}$$

Продолжим функции последовательности $\{-\delta^{-1}Du^k\}_{k=0,\infty}$ на все пространство $\mathbb{R}^n$, для чего положим $\tilde{p}^k(x) = -\delta^{-1}Du^k(x)$ если $x \in \Omega$, в противном случае $\tilde{p}^k(x) = 0$. Ясно, что $\tilde{p}^{k_l} \underset{l\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{p}^0$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Имеем:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(|\,\xi - x'\,|)\tilde{p}^{k_l}(x')dx' = \\ = P(\tilde{p}^{k_l})[\xi] \underset{l\to\infty}{\to} P(\tilde{p}^0)[\xi] \text{ для всех } \xi \in S.\end{gathered} \tag{34}$$

Аналогично

$$\begin{gathered}\left[-P\tilde{p}^{k_l} + \sum_{i,j=1}^{n}\varphi(I(Pu^{k_l}))\varepsilon_{ij}(Pu^{k_l})\eta_i\eta_j\right](s) = \\ = f^*_{r\eta}(\tilde{p}^{k_l}, u^{k_l})[s] \underset{l\to\infty}{\to} f^*_{r\eta}(\tilde{p}^0, u^0)[s] \text{ для всех } s \in S.\end{gathered} \tag{35}$$

Оцениваем:

$$\begin{gathered}\sup_{h\in Z,\|h\|_{z=1}}\left|\left\langle K_\delta(u^{k_l}), h\right\rangle - \left\langle K_\delta(u^0), h\right\rangle\right| \le \\ \le \sup_{h\in Z,\|h\|_{z=1}}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_S \frac{g + \chi\left[f^*_{r\eta}(\tilde{p}^{k_l}, u^{k_l})\left|u^{k_l}\right|\right]}{\max\left(\delta, \left|u^{k_l}\right|\right)} u_i^{k_l} h_i ds - \right. \\ -\sum_{i=1}^{n}\int_S \frac{g + \chi\left[f^*_{r\eta}(\tilde{p}^{k_l}, u^{k_l})\left|u^{k_l}\right|\right]}{\max\left(\delta, \left|u^{k_l}\right|\right)} u_i^0 h_i ds + \\ +\sum_{i=1}^{n}\int_S \frac{g + \chi\left[f^*_{r\eta}(\tilde{p}^{k_l}, u^{k_l})\left|u^{k_l}\right|\right]}{\max\left(\delta, \left|u^{k_l}\right|\right)} u_i^0 h_i ds - \\ \left. -\sum_{i=1}^{n}\int_S \frac{g + \chi\left[f^*_{r\eta}(\tilde{p}^0, u^0)\left|u^0\right|\right]}{\max\left(\delta, \left|u^0\right|\right)} u_i^0 h_i ds\right| \le \\ \le \max(b_2, c_1)\left\|u^{k_l} - u^0\right\|_{L_2(\partial\Omega)^n} + \\ +\left\|\frac{g + \chi\left[f^*_{r\eta}(\tilde{p}^{k_l}, u^{k_l})\left|u^{k_l}\right|\right]}{\max\left(\delta, \left|u^0\right|\right)} - \right. \\ \left. -\frac{g + \chi\left[f^*_{r\eta}(\tilde{p}^0, u^0)\left|u^0\right|\right]}{\max\left(\delta, \left|u^0\right|\right)}\right\|_{L_2(S)^n} \left\|u^0\right\|_{L_2(\partial\Omega)^n}.\end{gathered} \tag{36}$$

Используя соотношения (32)—(35) и теорему Лебега заключаем, что последняя часть неравенств (36) стремится к нулю. Следовательно, $K_\delta(u^{k_l}) \underset{l\to\infty}{\to} K_\delta(u^0)$ в Z^*. □

Лемма 3.3. *Положим*

$$M_\delta : Z \to Z^*,$$

$$\langle M_\delta(u), h\rangle = \frac{1}{1 + \delta^{1/4}\,\|u\|_{L_4(\Omega)^n}} \times$$

$$\times\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h_i dx \;\; (\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0).$$

Справедливы следующие утверждения:

а) Оператор M_δ ограничен и вполне непрерывен.

b) Возьмем произвольные последовательности $\{u^k\}_{k=1,\infty}$ и $\{h^k\}_{k=1,infty}$ из пространства Z такие, что $u^k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u^0$ в Z, $h^k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} h^0$ в Z, тогда оказывается, что существует подпоследовательности $\{u^{k_l}\}_{l=1,\infty}$ и $\{h^{k_l}\}_{l=1,\infty}$, для которых имеет место сходимость $\langle M(u^{k_l}), h^{k_l}\rangle \underset{l\to\infty}{\to} \langle M_\delta(u^0), h^0\rangle$.

Доказательство. а) Свойства ограниченности и непрерывности оператора M_δ доказываются достаточно стандартно (см., например, [8]). Докажем, что оператор M_δ переводит ограниченные подмножества Z в относительно компактные подмножества Z^*.

Далее будет использоваться признак И. М. Гельфанда относительной компактности в банаховом пространстве, предварительно переформулированный в виде следующей леммы.

Лемма 3.4. *Для того, чтобы подмножество $\mathfrak{W}$ банахова пространства $\mathcal{X}$ было относительно компактным необходимо, а если $\mathcal{X}$ сепарабельно то и достаточно, чтобы из любой последовательности функционалов $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{X}^*$ такой, что*

$$\mathbf{f}_k(y) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \;\; \forall y \in \mathcal{X}, \tag{37}$$

можно было выделить подпоследовательность $\{\mathbf{f}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ так, что для выбранной подпоследовательности предельное соотношение (37) оказалось бы выполненным равномерно на $\mathfrak{W}$.

Доказательство леммы (3.4) проводится так же как доказательство теоремы 3(1.IX) из [7] (см. стр. 274), незначительные изменения связаны с переходом к подпоследовательности в формулировке утверждения.

Теперь, пусть $\mathfrak{W}$ — некоторое ограниченное множество в Z, $h_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ в пространстве $(Z^*)^* \equiv Z$. Имеем $\forall u \in \mathfrak{W}$:

$$\left|\langle h_k, M_\delta(u)\rangle_{Z^{**}, Z^*}\right| = \left|\langle M_\delta(u), h_k\rangle\right| \le$$

$$\le \frac{\|u\|_{L_4(\Omega)^n}\,\|u\|_{H^1(\Omega)^n}}{1 + \delta^{1/4}\,\|u\|_{L_4(\Omega)^n}}\left\|h_k\right\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Так как вложение $Z \mapsto L_4(\Omega)^n$ компактно, то для некоторой подпоследовательности $\{h_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ получаем, что $\langle h_{k_l}, M_\delta(u)\rangle \underset{l\to\infty}{\to} 0$ равномерно по всем u из $\mathfrak{W}$. Следовательно, множество $M_\delta(\mathfrak{W})$ относительно компактно, что и требовалось показать.

b) Пусть $u^k \underset{k\to\infty}{\to} u^0$ и $h^k \underset{k\to\infty}{\to} h^0$ в Z. В силу компактности вложения $Z \mapsto L_4(\Omega)^n$ существуют подпоследовательности $\{u^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ и $\{h^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что

$$(u^{k_l}, h^{k_l}) \underset{l\to\infty}{\to} (u^0, h^0) \tag{38}$$

по норме пространства $L_4(\Omega)^n \times L_4(\Omega)^n$.

Имеем:

$$\begin{gathered}
\left|\left\langle M_\delta(u^0), h^0\right\rangle - \left\langle M_\delta(u^{k_l}), h^{k_l}\right\rangle\right| \le \\
\le \left|\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^0 \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j}\right) h_i^0 dx\right| + \\
+\left|\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (u_j^0 - u_j^{k_l}) \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} h_i^0 dx\right| + \\
+\left|\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^{k_l} \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} (h_i^0 - h_i^{k_l}) dx\right| + \\
+\left|\left(\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} - \frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n}}\right) \times \right. \\
\left. \times \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^{k_l} \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} h_i^{k_l} dx\right| \le
\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}
\le \left|\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^0 \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j}\right) h_i^0) dx\right| + \\
+ \frac{\left\|u^0 - u^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n} \ u^{k_l}{}_{H^1(\Omega)^n} \left\|h^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} + \\
+ \frac{\left\|u^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n} \ u^{k_l}{}_{H^1(\Omega)^n} \left\|h^0 - h^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n}}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} + \\
+\left|\left(\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}} - \frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n}}\right)\right| \times \\
\times \left\|u^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n} \ u^{k_l}{}_{H^1(\Omega)^n} \left\|h^{k_l}\right\|_{L_4(\Omega)^n}.
\end{gathered}$$

Первое слагаемое в последней части неравенств (39) стремится к нулю в силу того, что $u^{k_l} \underset{l\to\infty}{\rightharpoonup} u^0$ в Z, остальные слагаемые стремятся к нулю в силу (38).

4. АППРОКСИМАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Далее необходима следующая лемма об априорной оценке. Положим

$$\langle K^+(u), h\rangle = \frac{\min(a_1, b_1)}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_S u_i h_i ds.$$

Лемма 4.1. *Для нижеследующего семейства операторных уравнений, зависящих от параметра $t \in [0,1]$,*

$$\begin{gathered}
\Lambda_t^\delta(u^\delta) = A^+(u^\delta) + K^+(u^\delta) + t(A(u^\delta) + K_\delta(u^\delta) - \\
-K^+u^\delta + M_\delta(u^\delta) + \delta^{-1}D^*D(u^\delta) - F) = 0,
\end{gathered} \tag{40}$$

при «достаточно малых» δ, имеет место априорная оценка решений, т.е. при всех δ таких, что

$$0 < \delta \le c(a_1, b_1, n, \Omega)$$

выполнено неравенство

$$\left\|u^\delta\right\|_Z \le C(\|F\|_{Z^*}, a_1, b_1, n, \Omega), \tag{41}$$

где c, C — величины, зависящие только от указанных аргументов.

Доказательство. При $t = 0$ имеется только нулевое решение, в этом случае оценка (41) очевидна. Пусть u^δ — решение (40) при некотором $t \in (0,1]$. Подействуем левой и правой частями (40) на u^δ. Имеем:

$$\langle A^+(u^\delta) + K^+(u^\delta), u^\delta\rangle \le 0, \tag{42}$$

таким образом

$$\begin{gathered}
\langle A(u^\delta), u^\delta\rangle + \langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle - \langle K^+(u^\delta), u^\delta\rangle + \\
+\langle M_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle + \delta^{-1}\langle D^*D(u^\delta), u^\delta\rangle \le \langle \mathrm{F}, u^\delta\rangle.
\end{gathered} \tag{43}$$

Откуда следует, что

$$\begin{gathered}
\langle A(u^\delta), u^\delta\rangle + \langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle \le \\
\le |\langle K^+(u^\delta), u^\delta\rangle| + |\langle M_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle| + \\
+\delta^{-1} |\langle D^*D(u^\delta), u^\delta\rangle| + |\langle F, u^\delta\rangle|.
\end{gathered} \tag{44}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}
\langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle = \\
= \sum_{i=1}^{n} \int_S \frac{(g + \chi(f_{r\eta}^*(-\delta^{-1}Du^\delta, u^\delta), \left|u^\delta\right|^2))}{\max(|u^\delta|, \delta)} \left|u^\delta\right|^2 ds = \\
= \int_{|u|\le\delta} + \int_{|u|>\delta} \ge \int_{|u|>\delta} \ge b_1 \int_{|u|>\delta} |u|^2 \, ds.
\end{gathered}$$

Откуда

$$\begin{gathered}
\langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle + \delta^2 b_1 mes(\Omega) \ge \\
\ge \langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle + b_1 \int_{|u|\le\delta} |u|^2 \, ds = b_1 \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, ds.
\end{gathered} \tag{45}$$

Поэтому

$$\langle A(u^\delta),u^\delta\rangle+\langle K_\delta(u^\delta),u^\delta\rangle+\delta^2 b_1 mes(\Omega)\geq \geq \min(a_1,b_1)\left\|u^\delta\right\|_Z^2. \qquad (46)$$

Вместе с тем

$$\left|\left\langle M_\delta(u^\delta),u^\delta\right\rangle\right|= =\left|\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^\delta\right\|_{L_4(\Omega)^n}}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_j^\delta\frac{\partial u_i^\delta}{\partial x_j}u_i^\delta dx\right|= =\frac{1}{1+\delta^{1/4}\left\|u^\delta\right\|_{L_4(\Omega)^n}}\times \times\left|-\frac{1}{2}\int_\Omega D(u^\delta),\left|u^\delta\right|dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_S u_{\tau j}^\delta\eta_i\left|u^\delta\right|ds\right|\leq \leq\frac{n}{2}\left\|D(u^\delta)\right\|_{L_2(\Omega)}\frac{\left\|u^\delta\right\|^2_{L_4(\Omega)^n}}{1+\delta^{1/4}\left\|u^\delta\right\|_{L_4(\Omega)^n}}\leq \leq\frac{n}{2}\left\|D(u^\delta)\right\|_{L_2(\Omega)}\frac{\left\|u^\delta\right\|^2_{L_4(\Omega)^n}}{\delta^{1/4}\left\|u^\delta\right\|_{L_4(\Omega)^n}}\leq \leq\frac{\left\|D(u^\delta)\right\|_{L_2(\Omega)}}{\delta^{1/2}}\delta^{1/4}\frac{n}{2}\vartheta\left\|u^\delta\right\|_Z\leq \leq\frac{\left\|D(u^\delta)\right\|^2_{L_2(\Omega)}}{\delta}+\frac{\delta^{1/2}n^2\vartheta^2}{16}\left\|u^\delta\right\|_Z^2, \qquad (48)$$

здесь ϑ — норма оператора вложения пространства Z в пространство $L_4(\Omega)^n$.

Нетрудно заметить, что

$$\delta^{-1}\langle D^*D(u^\delta),u^\delta\rangle= =\delta^{-1}\langle D(u^\delta),D(u^\delta)\rangle=\delta^{-1}\left\|D(u^\delta)\right\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad (49)$$

$$\left|\langle F,u^\delta\rangle\right|\leq\|F\|_{Z^*}\left\|u^\delta\right\|_Z\leq\frac{l^2}{4}\|F\|^2_{Z^*}+\frac{1}{l^2}\left\|u^\delta\right\|^2. \qquad (50)$$

Таким образом

$$\frac{1}{2}\min(a_1,b_1)\left\|u^\delta\right\|_Z^2+\frac{\left\|D(u^\delta)\right\|^2_{L_2(\Omega)}}{\delta}\leq \leq\frac{l^2}{4}\|F\|^2_{Z^*}+\frac{1}{l^2}\left\|u^\delta\right\|^2+\frac{\left\|D(u^\delta)\right\|^2_{L_2(\Omega)}}{\delta}+ +\frac{\delta^{1/2}n^2\vartheta^2}{16}\left\|u^\delta\right\|_Z^2+\delta^2 b_1 mes(\Omega). \qquad (51)$$

Положим l настолько большим по модулю, что

$$\frac{1}{l^2}<\frac{1}{2}\min(a_1,b_2). \qquad (52)$$

Тогда при «достаточно малых» δ получаем, что

$$\left\|u^\delta\right\|_Z^2\leq\frac{l^2}{4}\left(\frac{1}{2}\min(a_1,b_1)-\frac{1}{l^2}\right)^{-1}\|F\|^2_{Z^*}. \qquad (53)$$

Неравенство (53) и является оценкой вида (41).□

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Для доказательства существования решений аппроксимационного уравнения применим метод топологической степени обобщенных монотонных отображений (см. [9]). Покажем, что семейство Λ_t^δ осуществляет гомотопию отображений Λ_0^δ и Λ_1^δ. Для этого, вначале, заметим, что из априорной оценки (41) следует, что в пространстве Z существует замкнутый шар Θ_R с центром в нуле радиуса $R>0$ такой, что на его границе $\partial\Theta_R$ нет решений уравнений $\Lambda_t^\delta(u^\delta)=0$ (при всех $t\in[0,1]$). Далее нам необходимо показать, что

а) для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1,\infty}$, взятой на границе $\partial\Theta_R$, и для любой последовательности точек $\{t_k\}_{k=1,\infty}$ на отрезке $[0,1]$, из того, что имеют место предельные соотношения $u_k\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}u_0$ в Z, $\Lambda_{t_k}^\delta(u_k)\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}0$ в Z^*, и $\left\langle\Lambda_{t_k}^\delta(u_k),u_k-u_0\right\rangle\underset{k\to\infty}{\to}0$ немедленно следует, что $u_k\underset{k\to\infty}{\to}u_0$ в Z,

b) для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1,\infty}$ из шара Θ_R такой, что $u_k\underset{k\to\infty}{\to}u_0$ в Z, при любой последовательности точек $\{t_k\}_{k=1,\infty}$ $(t_k\in[0,1])$ такой, что $t_k\underset{k\to\infty}{\to}t_0$ имеет место сходимость $\Lambda_{t_k}^\delta(u_k)\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}\Lambda_{t_0}^\delta(u_0)$ в Z^*.

Доказательство. а) Предположим противное, т.е. пусть $u_k\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}u_0$ в Z. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ и некоторого фиксированного числа $\varepsilon>0$ оказывается, что

$$\left\|u_{k_l}-u_0\right\|_Z>\varepsilon. \qquad (54)$$

Ясно, что из последовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ нельзя выделить подпоследовательность сходящуюся к u_0. Однако будет показано обратное утверждение; таким образом возникнет противоречие.

Из условия предложения а) имеем:

$$\lim_{l\to\infty}\langle\Lambda_{t_{k_l}}^\delta(u_{k_l}),u_{k_l}-u_0\rangle= =\lim_{l\to\infty}\langle\Lambda_{t_{k_l}}^\delta(u_{k_l})-\Lambda_{t_0}^\delta(u_{k_l})+ +\Lambda_{t_0}^\delta(u_{k_l})-\Lambda_{t_0}^\delta(u_0),u_{k_l}-u_0\rangle=0. \qquad (55)$$

Не ограничивая общности можем считать, что последовательность $\{t_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ такова, что $t_{k_l} \underset{l\to\infty}{\to} t_0 \in [0,1]$. Так как все определенные нами операторы ограниченны, то

$$\begin{gathered}\lim_{l\to\infty}\langle \Lambda^{\delta}_{t_{k_l}}(u_{k_l}) - \Lambda^{\delta}_{t_0}(u_{k_l}), u_{k_l} - u_0\rangle = \\ = \lim_{l\to\infty}\langle (t_{k_l} - t_0)[A(u_{k_l}) + K_\delta(u_{k_l}) - K^+(u_{k_l}) + \\ + M_\delta(u_{k_l}) + \delta^{-1}D^*D(u_{k_l}) - F], u_{k_l} - u_0\rangle = 0.\end{gathered} \tag{56}$$

Далее получаем. что

$$\begin{gathered}\lim_{l\to\infty}\langle \Lambda^{\delta}_{t_0}(u_{k_l}) - \Lambda^{\delta}_{t_0}(u_0), u_{k_l} - u_0\rangle = \\ = \lim_{m\to\infty}\langle A^+(u_{k_{l_m}}) - A^+(u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle + \\ + \lim_{m\to\infty} t_0\langle A(u_{k_{l_m}}) - A(u_0) + K_\delta(u_{k_{l_m}}) - K_\delta(u_0) + \\ + K^+(u_{k_{l_m}}) - K^+(u_0) + M_\delta(u_{k_{l_m}}) - \\ - M_\delta(u_0) + \delta^{-1}D^*D(u_{k_{l_m}} - u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle.\end{gathered} \tag{57}$$

С помощью лемм (3.1), (3.2) и (3.3) получается, что из последовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_{l_m}}\}_{m=1,\infty}$ так, что будут выполнены следующие предельные соотношения:

$$\lim_{m\to\infty}\langle A(u_{k_{l_m}}) - A(u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle \ge 0, \tag{58}$$

$$\begin{gathered}\lim_{m\to\infty}\langle K_\delta(u_{k_{l_m}}) - K_\delta(u_0) + K^+(u_{k_{l_m}}) - \\ - K^+(u_0) + M_\delta(u_{k_{l_m}}) - M_\delta(u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle = 0.\end{gathered} \tag{59}$$

То, что

$$\lim_{m\to\infty}\langle \delta^{-1}D^*D(u_{k_{l_m}} - u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle \ge 0 \tag{60}$$

очевидно.

Из (56)—(60) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\langle [A^+ + K^+](u_{k_{l_m}} - u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle \le 0. \tag{61}$$

Предельное соотношение (61) противоречит (54), так как оператор $A^+ + K^+$ строго монотоннен:

$$\begin{gathered}\langle [A^+ + K^+](u - w), u - w\rangle \ge \\ \ge \min(\delta, b_1/2)\|u - w\|_Z^2 \quad \forall u, w \in Z.\end{gathered} \tag{62}$$

Доказательство предложения b):

Очевидно, что для произвольного $h \in Z$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty}\langle \Lambda^{\delta}_{t_k}(u_k), h\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle \Lambda^{\delta}_{t_k}(u_k) - \\ - \Lambda^{\delta}_{t_0}(u_k), h\rangle + \lim_{k\to\infty}\langle \Lambda^{\delta}_{t_0}(u_k) - \Lambda^{\delta}_{t_0}(u_0), h\rangle.\end{gathered} \tag{63}$$

Первое слагаемое в равенстве (63) стремится к нулю в силу сходимости $t_k \underset{k\to\infty}{\to} t_0$, второе — в силу непрерывности всех входящих в слагаемое операторов. □

Таким образом отображения Λ^{δ}_0 и Λ^{δ}_1 гомотопны, вместе с тем степень $\deg(\Lambda^{\delta}_0, \Theta_R, 0)$ нечетна, так как отображение Λ^{δ}_0 нечетно. Поэтому решение уравнения $\Lambda^{\delta}_1(u^{\delta}) = 0$ существует при всех "достаточно малых" δ, что и требовалось показать.

6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Возьмем последовательность $\delta_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ и поставим в соответствие каждому δ_k решение $u_k \in Z$ уравнения $\Lambda^{\delta_k}_1(u_k) = 0$. Имеем:

$$\begin{gathered}\delta_k^{-1}D^*D(u_k) = F - A^+(u_k) - \\ - A(u_k) - K_{\delta_k}(u_k) - M_{\delta_k}(u_k).\end{gathered} \tag{64}$$

Теперь, как следствие результатов [10], отметим, что оператор D^* осуществляет изоморфизм пространств

$$\mathcal{P}_0 = \{\rho \in L_2(\Omega) : \int_\Omega \rho(x)dx = 0\}$$

и

$$W_0 = \{\mathrm{f} \in Z^* : \langle \mathrm{f}, u\rangle = 0 \forall u \in W\}.$$

Из априорной оценки и соотношения (64) следует, что существуют элементы $u_0 \in Z$, $p_0 \in \mathcal{P}_0$, $f^\tau \in L_2^\tau(S)$ такие, что

$$u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u_0 \text{ в } Z, \tag{65}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0 \text{ по норме } L_2(\Omega)^n \text{ и почти всюду на } \Omega, \tag{66}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0 \text{ по норме } L_2(S)^n \text{ и почти всюду на } S, \tag{67}$$

$$D(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \text{ в } L_2(\Omega), \tag{68}$$

$$\delta_k^{-1}D(u_k) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} -p_0 \ 2\ \mathcal{P}_0, \tag{69}$$

$$\frac{g + \chi(f^*_{r\eta}(-\delta^{-1}Du^{\delta_k}, u^{\delta_k}), |u^{\delta_k 2}|)}{|u^{\delta_k}|} u^{\delta_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} -f^\tau \quad \text{в } L_2(S)^n, \tag{70}$$

$$|f^\tau(s)| \le g(s) \text{ при } u_0(s) = 0, \tag{71}$$

$$f^\tau(s) = -(g(s) + \chi(f^*_{r\eta}(s), |u_0(s)|^2))\frac{u_0(s)}{|u_0(s)|} \quad \text{при } u_0(s) \ne 0. \tag{72}$$

Положим

$$M : Z \to Z^*, \ \langle M(u), h\rangle = = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)dx,$$

$$\begin{gathered}\Upsilon(u_k, v) = \langle A^+(u_k) + A(u_k) - A(v) + \\ + K_{\delta_k}(u_k) + f^\tau + M_{\delta_k}(u_k) - M(u_0) + \\ + \delta_k^{-1}D^*D(u_k) + D^*(p), u_k - v\rangle.\end{gathered} \tag{73}$$

Согласно леммам (3.1)—(3.3) и соотношениям (65)—(70) можно полагать, что последовательность $\{u_k\}_{k=1,\infty}$ такова, что выполнены следующие предельные соотношения:

$$\lim_{k\to\infty}\langle A(u_k)-A(v),u_k-v\rangle\geq 0, \qquad (74)$$

$$\lim_{k\to\infty}\langle K_{\delta_k}(u_k)+f^\tau+ \\ +M_{\delta_k}(u_k)-M(u_0),u_k-v\rangle=0, \qquad (75)$$

$$\lim_{k\to\infty}\langle \delta_k^{-1}D^*D(u_k)+D^*(p),u_k-v\rangle=0, \qquad (76)$$

$$\lim_{k\to\infty}\langle A^+(u_k),u_k-v\rangle=0. \qquad (77)$$

Из соотношений (74)—(77) имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\Upsilon(u_k,v)\geq 0\ \forall v\in Z. \qquad (78)$$

С другой стороны

$$\lim_{k\to\infty}\Upsilon(u_k,v)=\lim_{k\to\infty}\langle A^+(u_k),u_k-v\rangle+ \\ +\lim_{k\to\infty}\langle A(u_k)+K_{\delta_k}(u_k)+M_{\delta_k}(u_k)+ \\ +\delta_k^{-1}D^*D(u_k),u_k-v\rangle+ \qquad (79) \\ +\lim_{k\to\infty}\langle -A(v)+f^\tau-M(u_0)+D^*(p_0),u_k-v\rangle= \\ =\langle F-A(v)+f^\tau-M(u_0)+D^*(p_0),u_0-v\rangle.$$

Теперь возьмем $v=u_0-\gamma h$, где $\gamma>0, h\in Z$, и устремим $\gamma\to 0$. Из соотношений (78) и (79) следует, что для любого $h\in Z$ имеет место неравенство

$$\langle F-A(u_0)+f^\tau-M(u_0)+D^*(p_0),h\rangle\geq 0, \qquad (80)$$

заменяя в последнем неравенстве h на $-h$ получим, в силу произвольности h, что (u^0,p^0,f^τ) искомое слабое решение задачи (1)—(3), (10), (13), (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fugita H.* Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type / J. Comput. Math. 19, 2001. P. 1—8.

2. *Le Roux C.* Steady Stokes flows with threshold slip boundary conditions. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 15, № 8, 2005. P. 1141—1168.

3. *Астарита Дж., Марручи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. — М.: Мир, 1978. — 309 с.

4. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. — М.: Наука, 1982 — 376 с.

5. *Раджагопал К.Р.* О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // Успехи матем. наук, 2003, Вып. 58. № 2. С. 111—121.

6. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье—Стокса. — М.: УРСС, 2004. — 112 с.

7. *Канторович. А.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М: Физматгиз, 1959.

8. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М: Физматгиз, 1970.

9. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М: Физматгиз, 1990.

10. *Litvinov W.G.* Optimization in Elliptic Problems with Applications to Mechanics of Deformable Bodies and Fluid Mechanics. Birkhäuser, 2000.

Поступила в редакцию 25.12.2006