УДК 517.986

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

И. В. Курбатова*

Воронежский государственный университет

Изучается дифференциальное уравнение $F\dot{x} = Gx + f$. Операторы F и G могут быть необратимыми и неограниченными. Импульсной характеристикой называют решение, соответствующее $f = 1\delta$. Если коэффициент F имеет ненулевое ядро, то импульсная характеристика является обобщенной функцией. В заметке приводятся (теорема 5) условия существования обобщенной импульсной характеристики. Обобщенная импульсная характеристика может существовать даже в случае уравнения, соответствующего полугруппе, не являющейся сильно непрерывной.

1. РЕЗОЛЬВЕНТА ПУЧКА

Пусть U и V — банаховы пространства. Символом $\mathbf{BO}(U,V)$ будем обозначать пространство всех линейных ограниченных операторов $A: U \to V$, а символом $1 = 1_U$ — тождественный оператор, действующий из U в U.

Пусть X и Y — комплексные линейные пространства, $X_F, X_G \subseteq X$ — линейные подпространства, а $F: X_F \to Y$ и $G: X_G \to Y$ — два линейных оператора. (*Линейным операторным*) *пучком* называют [1, 2, 3] функцию

$$\lambda \mapsto \lambda F - G : X_* \to Y, \ \lambda \in \mathbb{C}, \qquad (1)$$

где $X_* = X_F \cap X_G$. При этом под $0F - G$ будем понимать оператор $-G: X_* \to Y$. Предположение относительно непрерывности F и G будет сделано ниже.

Пример 1. *Пусть $Y = (L_2[0,\pi]\times[0,\pi])$, а F и G — операторы взятия второй производной по разным переменным, рассматриваемые на функциях с нулевыми краевыми условиями. В этом случае X_* совпадает с подпространством $\overset{\circ}{W}{}_2^2([0,\pi]\times[0,\pi])$ пространства Соболева $W_2^2([0,\pi]\times[0,\pi])$, состоящем из функций, равных нулю на границе. Этот пример интересен тем, что он не охватывается теорией* [1, 2, 3, 4, 5], *поскольку в нем ни один из операторов F или G не является подчиненным другому.*

Резольвентным множеством пучка называют множество $\rho(G,F)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых ядро оператора $\lambda F - G$ состоит из нуля, а образ совпадает с Y, и тем самым оператор $\lambda F - G$ обратим, а *резольвентой* — функцию

$$R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1} : Y \to X_*, \ \lambda \in \rho(G,F). \qquad (2)$$

Дополнение $\sigma(G,F)$ к резольвентному множеству $\rho(G,F)$ называют *спектром*.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131

В дальнейшем будем считать выполненным следующее предположение.

Предположение. Пространство Y является банаховым (относительно X никаких непосредственных предположений не делается), а $\rho(G,F)$ содержит по крайней мере две точки $\lambda \neq \mu$, для которых операторы

$$(\lambda F - G)(\mu F - G)^{-1} : Y \to Y$$
$$\text{и} \qquad (3)$$
$$(\mu F - G)(\lambda F - G)^{-1} : Y \to Y$$

ограничены. В этом случае, очевидно, изоморфизмы $\lambda F - G,\ \mu F - G : X_* \to Y$ порождают эквивалентные нормы на X_*. Введем на X_* одну из этих эквивалентных норм.

Следующие три утверждения общего характера приведем без доказательства.

Предложение 1. *Если для двух точек $\lambda, \mu \in \rho(G,F)$, $\lambda \neq \mu$, операторы $(\lambda F - G)(\mu F - G)^{-1}$ и $(\mu F - G)(\lambda F - G)^{-1}$ ограничены, то операторы $F, G : X_* \to Y$ ограничены. Поэтому при любом $\nu \in \rho(G,F)$ оператор $\nu F - G : X_* \to Y$ порождает на X_* норму, эквивалентную нормам, порожденным $\lambda F - G$ и $\mu F - G$.*

В силу предложения 1 можно изначально без ограничения общности считать, что X_* и Y — банаховы пространства, а $F, G : X_* \to Y$ — линейные ограниченные операторы.

Предложение 2. *В окрестности любой точки $\mu \in \rho(G,F)$ резольвента R_λ пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G : X_* \to Y$ раскладывается в степенной ряд*

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (R_\mu F)^{n+1} R_\mu. \qquad (4)$$

Следствие 3. *Резольвентное множество $\rho(G,F)$ открыто, а резольвента на нем является аналитической функцией со значениями в $\mathbf{BO}(Y, X_*)$.*

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ОБОБЩЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Для произвольной функции $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ замыкание множества $\{t:\psi(t)\neq 0\}$ называют *носителем* функции ψ и обозначают символом $\operatorname{supp}\psi$. Обозначим через $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ линейное пространство всех бесконечное число раз дифференцируемых функций $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, имеющих компактный носитель (подробнее см., например, [6]), относительно поточечных операций сложения и умножения на число. Говорят, что последовательность $\psi_k\in\mathcal{D}$ *сходится* к функции $\psi\in\mathcal{D}$, если

a) носители функций ψ_k *равномерно ограничены*, т. е. все содержатся в одном и том же отрезке $[a,b]$;

b) последовательность $\psi_k^{(n)}$ равномерно сходится к $\psi^{(n)}$ при всех $n=0,1,2,\dots$; здесь $\psi^{(n)}$ — n-ая производная функции ψ, в частности, $\psi^{(0)}=\psi$.

Пусть $\mathbb{E}$ — комплексное банахово пространство. Пусть $f:\mathcal{D}\to\mathbb{E}$ — линейный (векторнозначный) функционал. Будем обозначать значение функционала f на $\psi\in\mathcal{D}$ символом $\langle\psi,f\rangle$. Функционал f называют *непрерывным*, если $\langle\psi_k,f\rangle$ сходится к $\langle\psi,f\rangle$ всякий раз, когда ψ_k сходится к ψ в $\mathcal{D}$. Очевидно, если f непрерывен в точке $\psi=0$, то он непрерывен во всех точках. Всякий непрерывный линейный функционал $f:\mathcal{D}\to\mathbb{E}$ называют [6] *обобщенной функцией* или *распределением* на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{E}$ (подробнее по поводу векторнозначных обобщенных функций см. [7]). Обозначим символом $\mathcal{D}'=\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ линейное пространство всех обобщенных функций f с естественными операциями сложения и умножения на число. Допуская вольность речи, элементы пространства $\mathcal{D}'$ обычно называют просто функциями.

Говорят, что последовательность $f_k\in\mathcal{D}'$ *сходится* к $f\in\mathcal{D}'$, если $\langle\psi,f_k\rangle\to\langle\psi,f\rangle$ для всех $\psi\in\mathcal{D}$.

Пусть $f\in\mathcal{D}'$. Функционал $\dot f$, определенный правилом

$$\langle\psi,\dot f\rangle=-\langle\dot\psi,f\rangle, \tag{5}$$

называют *производной* функционала f. Нетрудно видеть, что $\dot f$ — действительно линейный и непрерывный функционал и, таким образом, принадлежит $\mathcal{D}'$.

Пусть $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — бесконечное число раз дифференцируемая функция (компактность носителя не предполагается). Произведением функции α на обобщенную функцию $f\in\mathcal{D}'$ называют обобщенную функцию αf, определенную по правилу

$$\langle\psi,\alpha f\rangle=\langle\alpha\psi,f\rangle. \tag{6}$$

Обозначим через $L_{1\,\mathrm{loc}}=L_{1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ пространство всех измеримых [8] функций $x:\mathbb{R}\to\mathbb{E}$, интегрируемых по Лебегу на каждом отрезке. Пусть $x\in L_{1\,\mathrm{loc}}$ (например, x может быть непрерывной функцией). Очевидно, функционал f_x, определенный правилом

$$\langle\psi,f_x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)x(t)\,dt, \tag{7}$$

принадлежит $\mathcal{D}'$. Обобщенную функцию f_x, порожденную функцией $x\in L_{1\,\mathrm{loc}}$, называют *регулярной*. Легко видеть, что $f_x=f_y$ влечет $x=y$ почти всюду. Таким образом, соответствие $x\mapsto f_x$ определяет вложение $L_{1\,\mathrm{loc}}$ в $\mathcal{D}'$. Производную $\dot f_x\in\mathcal{D}'$ функционала $f_x\in\mathcal{D}'$ называют *обобщенной производной* функции $x\in L_{1\,\mathrm{loc}}$.

Пусть $f,g\in\mathcal{D}'$. Говорят, что f и g *совпадают* на открытом множестве $M\subseteq\mathbb{R}$, если $\langle\psi,f\rangle=\langle\psi,g\rangle$ для всех $\psi\in\mathcal{D}$ таких, что $\operatorname{supp}\psi\subseteq M$. Очевидно, если f и g регулярны, это определение эквивалентно равенству почти всюду на M.

Обозначим через $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ линейное пространство всех бесконечное число раз дифференцируемых функций $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\forall m,n=0,1,2,\dots\ \exists C\ \forall x\quad |x^m\phi^{(n)}(x)|<C \tag{8}$$

(подробнее см., например, [6]). Говорят, что последовательность $\psi_k\in\mathcal{S}$ *сходится* к функции $\psi\in\mathcal{S}$, если при всех $m,n=0,1,2,\dots$ последовательность $x\mapsto x^m\psi_k^{(n)}(x)$ равномерно сходится к функции $x\mapsto x^m\psi^{(n)}(x)$.

Линейный (векторнозначный) функционал $f:\mathcal{S}\to\mathbb{E}$ называют *непрерывным*, если $\langle\psi_k,f\rangle$ сходится к $\langle\psi,f\rangle$ всякий раз, когда ψ_k сходится к ψ в $\mathcal{S}$. Всякий непрерывный линейный функционал $f:\mathcal{S}\to\mathbb{E}$ называют [6] *обобщенной функцией* или *распределением медленного роста* со значениями в $\mathbb{E}$. Обозначим символом $\mathcal{S}'=\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ пространство всех обобщенных функций f медленного роста. Поскольку $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{S}$ и из сходимости в $\mathcal{D}$ вытекает сходимость в $\mathcal{S}$, пространство $\mathcal{S}'$ можно считать подпространством $\mathcal{D}'$. Нетрудно показать, что операция дифференцирования переводит $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ в себя.

Напомним [6], что на пространстве $\mathcal{S}'$ корректно определено преобразование Фурье F.

Обобщенной функцией класса $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R},\mathbb{E},\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, называют [6] такую, которая равна нулю на $(-\infty,0)$ и после умножения на функцию $t \mapsto e^{-\sigma t}$ при любом $\sigma > \alpha$ попадает в пространство $\mathcal{S}'$.

Преобразованием Лапласа функции $f \in \mathcal{D}'_+(\alpha)$ называют [6] функцию

$$\mathcal{F}(\sigma + i\omega) = F(f_\sigma)(\omega),\ \ \omega > \alpha, \tag{9}$$

где $F : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ — преобразование Фурье, а $f_\sigma(t) = e^{-\sigma t} f(t)$.

Замечание 1. Очевидно, $\mathcal{D}'_+(\alpha) \subseteq \mathcal{D}'_+(\beta)$ при $\alpha \le \beta$. Можно положить $\mathcal{D}'_+ = \cup_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathcal{D}'_+(\alpha)$.

Предложение 4. *Преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между пространством $\mathcal{D}'_+(\alpha)$ и пространством $H(\alpha)$ аналитических функций $\mathcal{F}$, определенных в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ и удовлетворяющих условию*

$$\begin{gathered}\forall \sigma_0 > \alpha\ \exists m \ge 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C\ \forall \sigma > \sigma_0\ \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \left\| \mathcal{F}(\sigma + i\omega) \right\| \le C e^{\varepsilon\sigma} (1 + |\sigma + i\omega|^m).\end{gathered} \tag{10}$$

При этом

$$\begin{gathered} f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^{m+2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{(\sigma + i\omega - \alpha)^{m+2}} \mathcal{F}(\sigma + i\omega) d\omega,\ \ t \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{11}$$

где m выбрано по $\sigma_0 > \alpha$ в соответствии с (10), а $\sigma > \sigma_0$.

Доказательство. Для скалярных функций $\dim \mathbb{E} = 1$ это утверждение доказано в [6]. Для векторных функций доказательство точно такое же. □

3. ОБОБЩЕННАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Пусть X_* и Y — банаховы пространства, а $F, G : X_* \to Y$ — линейные ограниченные операторы. *Обобщенной* (*операторной*) *импульсной характеристикой* класса $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, \mathbf{BO}(Y, X_*), \alpha)$ дифференциального уравнения (оператор F, вообще говоря, не предполагается обратимым; такие уравнения возникают во многих приложениях, см., например, [3, 9, 10, 11, 12])

$$F\dot{x} - Gx = f \tag{12}$$

назовем обобщенную функцию T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, \mathbf{BO}(Y, X_*), \alpha)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$F\dot{T}(t) - GT(t) = \mathbf{1}_Y \delta(t), \tag{13}$$

где δ — обобщенная функция Дирака.

Теорема 5. *Для того чтобы существовала обобщенная импульсная характеристика T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы правая полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ содержалась в резольвентном множестве $\rho(F,G)$ и резольвента $R_\lambda : Y \to X_*$ в ней допускала оценку*

$$\begin{gathered}\forall \sigma_0 > \alpha\ \exists m\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C\ \forall \sigma > \sigma_0\ \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \left\| R_{\sigma+i\omega} : Y \to X_* \right\| \le C e^{\varepsilon\sigma} (1 + |\sigma + i\omega|^m).\end{gathered} \tag{14}$$

При этом T может быть найдена по формуле

$$\begin{gathered} T(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^{m+2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{(\sigma + i\omega - \alpha)^{m+2}} R_{\sigma+i\omega} d\omega,\ \ t \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{15}$$

где m выбрано по $\sigma_0 > \alpha$ в соответствии с (14), а $\sigma > \sigma_0$ произвольно.

Доказательство. Напомним (следствие 3), что резольвента является аналитической функцией.

В силу предложения 4 преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между пространством $\mathcal{D}'_+(\alpha)$ и пространством аналитических функций, удовлетворяющих условию (14). Поэтому для функции $T \in \mathcal{D}'_+(\alpha)$ уравнение (13) можно записать в эквивалентном виде $(\lambda F - G)\mathcal{T}(\lambda) = \mathbf{1}_Y$, $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$, где $\mathcal{T}$ — преобразование Лапласа функции T. Поскольку при $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ оператор $\lambda F - G : X_* \to Y$ обратим, уравнение $(\lambda F - G)\mathcal{T}(\lambda) = \mathbf{1}_Y$ можно эквивалентным образом переписать как $\mathcal{T}(\lambda) = (\lambda F - G)^{-1}\mathbf{1}_Y$ или $\mathcal{T}(\lambda) = R_\lambda$. Таким образом, уравнение (13) равносильно равенству $\mathcal{T}(\lambda) = R_\lambda$.

Пусть существует обобщенная импульсная характеристика T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$. Тогда оценка роста (14) следует из условия $T \in \mathcal{D}'_+(\alpha)$ и равенства $\mathcal{T}(\lambda) = R_\lambda$.

Обратно, пусть выполнена оценка (14). Тогда функция $\mathcal{T}(\lambda) = R_\lambda$ является преобразованием Лапласа функции T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$.

Формула (15) взята из предложения 4. □

Пример 2. *Пусть $X_* = Y = \mathbb{C}^2$. Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + f. \tag{16}$$

Тогда, как показывают простые непосредственные вычисления, $T = -\begin{pmatrix} \delta & \dot{\delta} \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Пусть* $Y = L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $X_* = W^1_\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $F = \mathbf{1}_{L_\infty}$, $(Gx)(s) = x'(s)$. *Очевидно,* $G: X_* \to Y$ *— ограниченный оператор. Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = Gx + f. \qquad (17)$$

Непосредственно проверяется, что $(R_\lambda z)(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r} z(t-r)dr$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Заметим, что $\|R_\lambda : L_\infty \to L_\infty\| = \int_{-\infty}^{0} |e^{\lambda r}| dr = \dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. А поскольку $\dfrac{d}{ds}R_\lambda = -\mathbf{1} + \lambda R_\lambda$ и, следовательно, $\left\|\dfrac{d}{ds}R_\lambda : L_\infty \to L_\infty\right\| \le 1 + \dfrac{|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda}$, имеем $\|R_\lambda : Y \to X_*\| \le C(1+|\lambda|)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 1$, т. е. выполнена оценка (14). Следовательно, обобщенная импульсная характеристика существует. Очевидно, $(T(t)x)(s) = x(t+s)$. Подчеркнем, что функция T не является сильно непрерывной, а X_* не является плотным в Y.

Введем на X_* какую-нибудь норму, меньшую исходной, и обозначим через X_1 пополнение X_* по этой норме. Например, в случае $X = Y$ и $F = \mathbf{1}$ в качестве X_1 можно взять Y при условии, что X_* плотно в Y. *Обобщенной (операторной) импульсной характеристикой* класса $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, \mathbf{BO}(Y, X_1), \alpha)$ дифференциального уравнения

$$F\dot{x} - Gx = f \qquad (18)$$

назовем обобщенную функцию T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, \mathbf{BO}(Y, X_1), \alpha)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$F\dot{T}(t) - GT(t) = \mathbf{1}_Y \delta(t). \qquad (19)$$

Следствие 6. *Для того чтобы существовала обобщенная импульсная характеристика* T *со значениями в* $\mathbf{BO}(Y, X_1)$ *класса* $\mathcal{D}'_+(\alpha)$, *необходимо и достаточно, чтобы правая полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ *содержалась в резольвентном множестве* $\rho(F,G)$ *и резольвента* $R_\lambda : Y \to X_1$ *в ней допускала оценку*

$$\begin{gathered}\forall \sigma_0 > \alpha\ \exists m \ge 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C\ \forall \sigma > \sigma_0\ \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \|R_{\sigma+i\omega} : Y \to X_1\| \le Ce^{\varepsilon\sigma}(1+|\sigma+i\omega|^m).\end{gathered} \qquad (20)$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 5. Заметим лишь, что при уменьшении нормы аналитичность сохраняется.

Замечание 2. *Конечно, функция* (15), *посчитанная в условиях следствия 6, будет та же, что и в условиях теоремы 5. Но уменьшение нормы может сделать интеграл в* (15) *абсолютно сходящимся уже при* $m + 2 = 0$, *в силу чего импульсная характеристика* T *станет обычной функцией.*

Теорема 7. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, Y, \alpha)$. *Тогда в условиях теоремы 5 решением начальной задачи*

$$\begin{gathered} F\dot{x}(t) - Gx(t) = f(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ x(t) = 0,\ t < 0 \end{gathered} \qquad (21)$$

является свертка $T * f$ *импульсной характеристики* T *и правой части* f.

Доказательство. Прежде всего заметим, что свертка $T * f$ определена и принадлежит $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, X_*, \alpha)$ (для скалярных функций это доказано в [6], для вектор-функций доказательство такое же). Переходя к преобразованию Лапласа в уравнении, получаем $(\lambda F + G)\mathcal{X}(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)$, где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{X}$ — преобразование Лапласа функции f и x, что при $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ равносильно равенству $\mathcal{X}(\lambda) = (\lambda F + G)^{-1}\mathcal{F}(\lambda)$. Остается заметить, что в силу свойств преобразования Лапласа [6] функция $\lambda \mapsto (\lambda F + G)^{-1}\mathcal{F}(\lambda)$ является преобразованием Лапласа функции $T * f$.

Автор выражает благодарность А. Г. Баскакову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. 2004. Т. 9. С. 3—151.

2. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. Математ. сборник. 2002. Т. 193, № 11. С. 3—42.

3. *Favini A., Yagi A.* Degenerate evolution equations in Banach spaces. New York: M. Dekker, 1998.

4. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов. Успехи матем. наук. 1994. Т. 49, Вып. 4. С. 47—74.

5. *Федоров В.Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов. Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, Вып. 3. С. 173—200.

6. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

7. *Schwartz L.* Distributionsà valeurs vectorielles. Ann. Inst. Fourier. 1957, Vol. 7. P. 1—141; II, 1957, Vol. 8. P. 1—209.

8. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М.: Мир, 1977.

9. *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфиро-

ванных колебаний континуумов. Тр. межд. симп. по прим. теории функций в мех. спл. среды. 1965. С. 283—322.

10. *Радбель Н.И., Руткас А.Г.* О линейных операторных пучках и неканонических системах. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1973, № 17. С. 3—14.

11. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996—2010.

12. *Povoas M.* On some singular hyperbolic evolution equations. J. Math. Pures et. Appl. 1981. Vol. 60. P. 133—192.

Поступила в редакцию 22.12.06