УДК 517.984.5

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

А. В. Дербушев

Воронежский государственный университет

В статье получена асимптотика спектра и спектральных проекторов оператора дифференцирования с нелокальным краевым условием.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}x = i\dot{x}, D(\mathcal{A}) = \{x \in W_2^1(0,1) : x(0) = x(1) + \int_0^1 a(s)x(s)ds\},$$
$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

где функция a принадлежит гильбертову пространству $L_2 = L_2(0,1)$, измеримых и суммируемых с квадратом комплексных функций , определенных на отрезке $[0,1]$.

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{A}$ замкнут и его область определения $D(\mathcal{A})$ плотна в $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность функций из $D(\mathcal{A})$ к $x_0 \in L_2$, для которой последовательность ее производных $\{\dot{x}_n\}$ сходится к некоторой функции $y_0 \in L_2$. Тогда $x_0 \in W_2^1(0,1)$, последовательность $\{x_n\}$ сходится равномерно к функции x_0, $\dot{x}_0 = y_0$ (см. [1]). Поскольку $x_n(0) = x_n(1) + \int_0^1 a(s)x_n(s)ds$, $n \geq 1$, то из отмеченных свойств последовательности $\{x_n\}$ следует, что в этих равенствах возможен предельный переход и поэтому $x_0(0) = x_0(1) + \int_0^1 a(s)x_0(s)ds$, т.е. $x_0 \in D(\mathcal{A})$. Следовательно, $\mathcal{A}x_0 = y_0$. Таким образом, замкнутость оператора $\mathcal{A}$ доказана.

Докажем плотность $D(\mathcal{A})$ в $L_2(0,1)$. Поскольку пространство Соболева $W_2^1(0,1)$ плотно в $L_2(0,1)$ (см. [1]) , то достаточно установить , что любая функция $x_0 \in W_2^1(0,1)$ является пределом некоторой последовательности $\{x_n\}$ из $D(\mathcal{A})$. Такую последовательность $\{x_n\}$ построим следующим образом. Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} (1-nt)\alpha_n + nx_0\left(\frac{1}{n}\right)t, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ x_0(t), & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

где числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ выбирается из условия принадлежности функций x_n, $n \geq 1$, области определения $D(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$. Для этого следует положить

$$\alpha_n = \frac{x_0(1) + x_0\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{1}{n}} nsa(s)ds + \int_{\frac{1}{n}}^1 x_0(s)a(s)ds}{1 - \int_0^{\frac{1}{n}}(1-sn)a(s)ds}, \quad n \geq 1.$$

Заметим, что последовательность α_n ограничена . Поэтому имеют место оценки

$$\|x_n - x_0\|^2 =$$
$$= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} |\ \alpha_n + ns(x_0\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha_n) - x_0(s)\ |^2\ ds\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\left(|\ \alpha_n(1 - n\cdot 0)\ | + \sup_{t\in[0,\frac{1}{n}]} |\ ntx_0(\frac{1}{n}) - x_0(t)\ |\right)^2 \to 0,$$
$$n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Для изучения оператора $\mathcal{A}$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset L_2 \to L_2,$$
$$(\mathcal{B}y)(t) = i\dot{y}(t) + i\overline{a(t)}y(0), \ y \in D(\mathcal{B}),$$
$$D(\mathcal{B}) = \{y \in W_2^1(0,1) : y(0) = y(1)\}.$$

Наша дальнейшая цель состоит в доказательстве равенства $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$ и последующего изучения оператора $\mathcal{B}$ методом подобных операторов.

Оператор $\mathcal{B}$ представим в виде

$$\mathcal{B} = A - B, \tag{1}$$

где $Ay = i\dot{y}, y \in D(A) = D(\mathcal{B})$ и оператор $B : D(A) \subset L_2 \to L_2$ имеет вид

$$(By)(t) = -i\overline{a(t)}y(0), \ y \in D(A). \tag{2}$$

Отметим, что оператор A является самосопряженным оператором. Его спектр представим в виде

© Дербушев А. В., 2007

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131

$$\sigma(A) = \{2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\},$$

а собственные функции $e_n(t) = e^{i2\pi nt}$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(0,1)$.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественное число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ такое, что*

$$\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Если $\lambda \in \rho(A)$, то для любой функции $y \in L_2(0,1)$ имеет место следующее представление

$$B(A - \lambda I)^{-1} y = -i\overline{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(y, e_n) e_n(0)}{2\pi n - \lambda} =$$

$$= -i\overline{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(y, e_n)}{2\pi n - \lambda},$$

из которого получаем оценки

$$\|B(A - \lambda I)^{-1} y\| \le \|\overline{a}\| \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(y, e_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{|2\pi n - \lambda|^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|\overline{a}\| \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2\pi n - \lambda|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|y\|,\ \ y \in L_2.$$

Следовательно, $\|B(A - \lambda I)^{-1}\| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2\pi n - \lambda|^2} \right)^{1/2} \|\overline{a}\|$.

Из этой оценки получаем существование $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}$ с требуемым свойством. Лемма доказана.

Следствие 1. *Оператор $\mathcal{B}$ имеет непустое резольвентное множество.*

Доказательство. Из леммы 2 следует существование числа $\lambda_0 \in \rho(A)$ такого, что $\|B(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. Оператор $A - (B - \lambda_0 I)$ представим в виде

$$A - B - \lambda_0 I = (I - B(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I)$$

произведения двух обратимых операторов. Следовательно, $\lambda_0 \in \rho(A - B)$. Следствие доказано.

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{B}$ является сопряженным к оператору $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Существование сопряженного к $\mathcal{A}$ оператора следует из равенства $\overline{D(\mathcal{A})} = L_2$. С помощью интегрирования по частям для любых $x \in D(\mathcal{A})$, $y \in D(\mathcal{B})$ получаем равенства

$$(\mathcal{A}x, y) = \int_0^1 i\dot{x}(t)\overline{y(t)}dt = \overline{y(t)}ix(t)\,|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 ix(t)\,\overline{\dot{y}(t)}\,dt = i(\overline{y(1)}x(1) - \overline{y(0)}x(0)) -$$

$$-\int_0^1 ix(t)\,\overline{\dot{y}(t)}\,dt = i(x(1) - x(0))\overline{y(0)} -$$

$$-\int_0^1 a(t)i\overline{y(0)}x(t)dt - \int_0^1 ix(t)\,\overline{\dot{y}(t)}\,dt =$$

$$-\int_0^1 a(t)i\overline{y(0)}x(t)dt - \int_0^1 ix(t)\,\overline{\dot{y}(t)}\,dt = (x, \mathcal{B}y).$$

Из полученных равенств следует, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^*$, т.е. сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A}^*$ является расширением оператора $\mathcal{B}$. Тогда для любого $\lambda \in \rho(\mathcal{B}) \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ (см. следствие 1) имеет место включение $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} - \lambda I \subset \mathcal{A}^* - \lambda I = \mathcal{A}_\lambda^*$ и поскольку оператор $\mathcal{B}_\lambda$ непрерывно обратим, то его образ совпадает со всем пространством L_2. По теореме Банаха—Хаусдорфа [см. 2] из условия равенств образов операторов $\operatorname{Im}\mathcal{A}_\lambda^* = \operatorname{Im}\mathcal{B}_\lambda = L_2$ следует, что $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}_\lambda} = \operatorname{Im}\mathcal{B}_\lambda$, т.е. $\operatorname{Im}\mathcal{A}_\lambda$ — замкнутое подпространство в L_2. Поскольку $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{A}_\lambda^*$, то $\mathcal{A}_\lambda = (\mathcal{A}_\lambda^*)^* \subset \mathcal{B}_\lambda^*$. Так как $D(\mathcal{A}_\lambda) = D(\mathcal{A})$ плотно в L_2 (см. лемму 1) и $\mathcal{B}_\lambda^*$ — обратимый оператор (как сопряженный к обратному), то $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}_\lambda} = \operatorname{Im}\mathcal{B}_\lambda^* = L_2$. Следовательно, $\operatorname{Im}\mathcal{A}_\lambda = L_2$ т.е. $\mathcal{A}_\lambda$ — сюрьективный оператор.

Допустим, что $\mathcal{B}_\lambda \neq \mathcal{A}_\lambda^*$. Тогда существует ненулевой вектор $\tilde{x} \in D(\mathcal{A}_\lambda^*) \setminus D(\mathcal{B}_\lambda)$ и тогда $(\mathcal{A}_\lambda x, \tilde{x}) = (x, \mathcal{A}_\lambda^* \tilde{x}), x \in D(\mathcal{A}_\lambda)$. Из сюрьективности $\mathcal{B}_\lambda$ следует, что найдется такой вектор $x_0 \in D(\mathcal{B}_\lambda)$, что $\mathcal{B}_\lambda x_0 = \mathcal{A}_\lambda^* \tilde{x}$ и тогда $(\mathcal{A}_\lambda x, x_0) = (x, \mathcal{B}_\lambda x_0) = (x, \mathcal{A}_\lambda^* \tilde{x})$. Вычитая полученные равенства, получаем

$$(\mathcal{A}_\lambda x, x_0 - \tilde{x}) = 0,\ \ x \in D(\mathcal{A}).$$

Поскольку $\operatorname{Im}\mathcal{A}_\lambda = L_2$, то $x_0 - \tilde{x} = 0$. Получено противоречие. Лемма доказана.

Для изучения оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$, представленного в виде (1) будем использовать метод подобных операторов (см. [3]). Его применение будет осуществляться дважды. Вначале $\mathcal{B}$ преобразуем (преобразованием подобия) в оператор вида $A - B_0$, где оператор B_0 принадлежит пространству $\sigma_2(L_2)$ операторов Гильберта—Шмидта, действующих в L_2 с нормой $\|X\|_2 = (tr(XX^*))^{1/2}$, $X \in \sigma_2(L_2)$, где $tr(XX^*)$ обозначает след оператора XX^*. Важно отметить, что $\sigma_2(L_2)$ образует замкнутый двусторонний идеал в алгебре $EndL_2$ линейных ограниченных операторов, действующих в L_2 (см. [4]), причем $\|X\|_2 \le \|X\|$, $X \in \sigma_2(L_2)$. Для преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ с определяемым далее оператором $B_0 \in \sigma_2(L_2)$ рассмотрим полную систему ортопроекторов P_n, $n \in \mathbb{Z}$, построенную по невозмущенному оператору A вида

$$P_n x = (x, e_n)e_n,\ \ n \in \mathbb{Z},\ \ x \in L_2.$$

Ясно, что для любой функции $x \in D(A)$ имеет место равенства

$$P_m BP_n x = (BP_n x, e_m)e_m =$$
$$= (-i\overline{a}(x, e_n)e_n(0), e_m)e_m =$$
$$= -i(x, e_n)(\overline{a}, e_m)e_m, \ \ n, m \in \mathbb{Z}.$$

Введем следующее обозначение $a_m = \int_0^1 \overline{a}(s)e^{-i2\pi ms}ds, \ \ m \in \mathbb{Z}$ — коэффициенты Фурье функции $\overline{a}$. При этом ясно, что

$$\|P_m BP_n\|_2 = \|P_m BP_n\| = |a_m|, \ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

Введем в рассмотрение операторы

$$B_k = \left(\sum_{n=-k}^{k} P_n\right) B \left(\sum_{m=-k}^{k} P_m\right) + \sum_{|j|\geq k+1} P_j BP_j,$$

$$U_k = \sum_{\max\{|m|,|n|\}\geq k+1, m\neq n} \frac{P_m BP_n}{2\pi(m-n)}, \ \ k \geq 0.$$

Далее используется

Лемма 4. [5] *Если линейный оператор* $X : L_2 \to L_2$ *обладает свойством* $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \|P_m XP_n\|^2 < \infty$, *то он принадлежит* $\sigma_2(L_2) \subset EndL_2$ *и* $\|X\|_2^2 = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \|P_m BP_n\|^2$.

Лемма 5. *Операторы* $B_k, U_k, k \geq 0$, *являются операторами Гильберта—Шмидта, причем* $\lim_{k\to\infty} \|U_k\|_2 = 0$.

Доказательство. Из полученных представлений операторов $P_m BP_n, \ m, n \in \mathbb{Z}$, следует, что $P_j BP_j = a_j P_j, \ j \in \mathbb{Z}$, и поэтому $\sum_{|j|\geq k+1} P_j BP_j = \sum_{|j|\geq k+1} a_j P_j$ — оператор Гильберта—Шмидта. Следовательно, такими является и операторы $B_k, k \geq 0$.

Для нормы Гильберта—Шмидта операторов $U_k, k \geq 0$, имеют место оценки (при этом используется неравенство Бесселя, тождество Парсеваля и равенства $\|P_m BP_n\| = |a_m|, \ m, n \in \mathbb{Z}$)

$$\|U_k\|_2^2 = \sum_{\max(|m|,|n|)\geq k+1, m\neq n} \frac{\|P_m BP_n\|^2}{|\lambda_m - \lambda_n|^2} \leq$$
$$\leq \sum_{\max(|m|,|n|)\geq k+1, m\neq n} \frac{|a_m|^2}{4\pi^2(m-n)^2}.$$

Будем производить суммирование по диагоналям вида: $m - n = p$, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и при $p \in [-k, k]$ в диагоналях отсуствуют элементы такие, что $\max\{|m|, |n|\} \leq k$. Продолжая оценки, получаем

$$\|U_k\|_2^2 \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{m-n=j} \frac{|a_m|^2}{4\pi^2(m-n)^2} +$$
$$+ \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \sum_{m-n=-j} \frac{|a_m|^2}{4\pi^2(m-n)^2} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{m-n=j;|m|\geq k+1} \frac{|a_m|^2}{4\pi^2(m-n)^2} +$$
$$+ \sum_{j=-k}^{-k-1} \sum_{m-n=-j;|m|\geq k+1} \frac{|a_m|^2}{4\pi^2(m-n)^2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \|a\|^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \sum_{m-n=j;|m|\geq k+1} |a_m|^2 \leq$$
$$\leq \frac{\|a\|^2}{2\pi^2 k} + \frac{1}{12} \sum_{|m|\geq k+1} |a_m|^2 \to 0, \ \ k \to \infty.$$

Лемма доказана.

Далее воспользуемся преобразованием подобия из работы [3, § 19]. При этом ,используя лемму 5, выберем $k \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $\|U_k\| \leq \|U_k\|_2 \leq \leq 1/2$. Тогда получаем равенства

$$(A - B)(I + U_k) = (I + U_k) \times$$
$$\times (A - B_k + (I + U_k)^{-1}(BU_k B - (U_k)B_k)).$$

Следовательно,

$$(A - B)(I + U_k) = (I + U_k)(A - \tilde{B}_k),$$

где $\tilde{B}_k = B_k - (I + U_k)^{-1}(BU_k B - (U_k)B_k)$ есть оператор Гилберта—Шмидта (использовалось отмеченное ранее свойство , что оператоы Гильберта—Шмидта образуют двусторонний идеал в алгебре $EndL_2$.) Поскольку подобные операторы имеют одинаковый спектр (см. [1]), то доказана

Лемма 6. *Оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - \tilde{B}$, *где* $\tilde{B}$ *— оператор Гильберта—Шмидта и* $\sigma(A - B) = \sigma(A - \tilde{B})$. *При этом оператор преобразования* $\mathcal{U}$ *оператора* $A - B$ *в оператор* $A - \tilde{B}$ *имеет вид* $\mathcal{U} = I + U$, *где* U *— оператор Гильберта—Шмидта.*

Используя терминологию из [3], построим допустимую для невозмущенного оператора A тройку $(\sigma_2(L_2), J_m, \Gamma_m)$, где пространство операторов Гильберта—Шмидта $\sigma_2(L_2)$ играет роль пространства допустимых возмущений, а трансформаторы (операторы в пространстве линейных операторов)

$$\Gamma_m, J_m : \sigma_2(L_2) \to \sigma_2(L_2), \ \ m \in \mathbb{Z}$$

имеют вид

$$J_m X = \tilde{P}_m X\tilde{P}_m + \sum_{|j|\geq m+1} P_j XP_j, \ \ X \in \sigma_2(L_2),$$

$$\Gamma_m X = \sum_{\max|m|,|n|\geq k+1, m\neq n} \frac{P_m XP_n}{2\pi(m-n)}, \ \ X \in \sigma_2(L_2),$$

где $\tilde{P}_m = \sum_{j=-m}^{m} P_j$.

Оценим нормы трансформаторов J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{N}$.

$$\|J_m X\|_2^2 \le \sum_{i,j=-m}^{m} \|P_i X P_j\|^2 + $$

$$+ \sum_{j \ge m+1} \|P_j X P_j\|^2 \le \|X\|_2^2,\ X \in \sigma_2(L_2),$$

$$\|\Gamma_m X\|_2^2 \le \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n \ne m; m,n \in \mathbb{Z}} \|P_m X P_n\|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2} \|X\|_2^2,\ X \in \sigma_2(L_2).$$

Таким образом, $\|J_m\|_2 \le 1$, $\|\Gamma_m\|_2 \le (2\pi)^{-1}$. В следующей теореме, вытекающей из [3, теорема 27.1], используется компактность операторов из $\sigma_2(L_2)$.

Теорема 1. *Существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что оператор $\mathcal{A}^* = A - B$ подобен оператору вида $A - J_m X_0$, где X_0 — некоторый оператор из $\sigma_2(L_2)$ и преобразование оператора $A - B$ в $A - J_m X_0$ осуществляет оператор вида $I + U_m$, где U_m — некоторый оператор из $\sigma_2(L_2)$.*

Доказательство. Вначале, используя лемму 6 , преобразуем оператор $A - B$ в оператор $A - \tilde{B}$, где $\tilde{B} \in \sigma_2(L_2)$ оператором преобразования $U = I + \tilde{U}$, где $\tilde{U} \in \sigma_2(L_2)$ и $\|\tilde{U}\|_2 \le 1/4$. Для оператора $A - \tilde{B}$ выполнено условие 3 из теоремы 27.1 работы [3] (рассматривается построенная допустимая тройка $(\sigma_2(L_2), J_m, \Gamma_m)$) и поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что оператор $A - \tilde{B}$ подобен оператору вида

$$A - J_m X_0,$$

где X_0 — некоторый оператор из $\sigma_2(L_2)$, а преобразование подобия осуществляет оператор $I + \Gamma_m X_0$, где $\Gamma_m X_0 \in \sigma_2(L_2), \|\Gamma_m X_0\|_2 \le 1/2$. Следовательно, оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_m X_0$, а их подобие осуществляет оператор $I + U_m = (I + \Gamma_m X_0)(I + \tilde{U}) = I + \tilde{U} + \Gamma_m X_0 + (\Gamma_m X_0)\tilde{U}$, т.е. $U_m \in \sigma_2(L_2)$ и $\|U_m\|_2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < 1$ теорема доказана.

Применив к полученному при доказательстве теоремы 1 равенству $(A - B)(I + U_m) = (I + U_m)(A - J_m X_0)$ операцию сопряжения, получим равенства (используются простые свойства сопряженных операторов; см. [2, теорема 3,1.6] и [3, лемма 10.2])

$$(I + U_m^*)\mathcal{A} = (I + U_m^*)(A - B^*) =$$

$$= (A - J_m X_0^*)(I + U_m^*),$$

из котороых получаем

$$\mathcal{A}(I + U_m^*)^{-1} = (I + U_m^*)^{-1}(A - J_m X_0^*),$$

т.е. исследуемый оператор $\mathcal{A}$ подобен оператору $A - J_m X_0^*$. Поскольку $\|U_m^*\|_2 = \|U_m\|_2 < 1$, то оператор $(I + U_m^*)^{-1} = I + V_m$, где $V_m \in \sigma_2(L_2)$. Отметим также, что $X_0^* \in \sigma_2(L_2)$ и поэтому $X_m = J_m X_0^* \in \sigma_2(L_2)$. Итак, $\mathcal{A}(I + V_m) = (I + V_m)(A - X_m)$.

Это равенство может служить основой для исследования спектральных свойств оператора $\mathcal{A}$. Так как подобные операторы имеют одинаковый спектр и потому выполнено равенство

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A - X_m).$$

Далее, из вида оператора $X_m = J_m X_0^*$ следует, что подпространства $\operatorname{Im} \tilde{P}_m, \operatorname{Im} P_k,\ k \ge m+1$, являются инвариантными для оператора $A - X_m$ (более подробно см. [3]) и, следовательно,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A - X_m) =$$

$$= \sigma(A_m) \cup \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-m, \ldots, m\}\},$$

где A_m — сужение оператора $A - X_m$ на конечномерное (размерности $2m+1$) подпространство $\operatorname{Im} \tilde{P}_m$, а числа $\lambda_n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-m, \ldots, m\}$ допускают представление вида

$$\lambda_n = i2\pi n + \alpha_n, |\, n \,| \ge m+1,$$

где каждое число α_n однозначно определяется из представления $P_n X_m P_n = \alpha_n P_n$ (учитывается одномерность проектора P_n). Кроме того, из доказанного включения $X_m \in \sigma_2(L_2)$ следует , что $\sum_{|n| \ge m+1} |\, \alpha_n \,|^2 < \infty$. Таким образом, установлена

Теорема 2. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ представим в виде двустороний последовательности чисел $\{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}\}$, для которой выполнено свойство*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\, \lambda_n - 2\pi n \,|^2 < \infty.$$

Через $\tilde{P}_n,\ n \in \mathbb{Z}$ обозначим проектор Рисса, отвечающий собственному значению λ_n оператора $\mathcal{A}$. Тогда (см. [3, стр. 145]) имеют место равенства

$$\tilde{P}_n - P_n = (V_m P_n - P_n V_m)(I + V_m)^{-1},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Из этих равенств получаем оценки (учитывается, что $V_m \in \sigma_2(L_2)$)

$$\|\tilde{P}_n - P_n\| \le \|\tilde{P}_n - P_n\|_2^2 \le \|V_m P_n - P_n V_m\| \times$$

$$\times \|(I + V_m)^{-1}\| \le \left(\|V_m P_n\|_2 + \|P_n V_m\|_2\right) \times$$

$$\times \|(I + V_m)^{-1}\|,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Непосредственно, из формулы $\|V_m\|_2^2 \le \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \|P_i V_m P_j\|^2$ следует, что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|V_m P_n\|_2^2 +$

$+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\|P_n V_m\|_2^2 \le 2\|V_m\|_2^2$. Следовательно, установлена

Теорема 3. *Для систем проекторов* $\{P_n, \tilde{P}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *имеет место свойство*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|\tilde{P}_n - P_n\right\|^2 < \infty.$$

Таким образом, система проекторов $\{\tilde{P}_n\}$ является квадратично близкой к системе проекторов $\{P_n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Либ Э.* Анализ. — Новосибирск.: Научная книга. — 1998. — 258 с.

2. *Cross R.* Moltivalued Linear Operators / R. Cross — New York: M. Dekker, 1998.

3. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во Воронеж. университета ,1987. — 164 с.

4. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 543 с.

5. *Пыркова М.С.* Метод подобных операторов в спектральном анализе возмущенных линейных операторов и некоторых классов дифференциальных операторов: дисс... канд. физ.-мат. наук / М. С. Пыркова. — Воронеж, 2006. — 110 с.

Поступила в редакцию 19.12.2006