УДК 517.9

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БОРА—ФАВАРА*

А. Г. Баскаков, К. А. Синтяева

Воронежский государственный университет

Получены оценки резольвенты генератора изометрической группы операторов. В частности, приводятся неулучшаемые оценки интеграла от голоморфных в полуплоскости функций, ограниченных на всей вещественной оси. Получены приложения к теории возмущений линейных операторов.

ВВЕДЕНИЕ

В 1935 году Г. Бором [1] было доказано следующее знаменитое неравенство (оценка интеграла)

$$\sup_{-\pi\le t\le\pi}\left|\sum_{|k|\ge n}\frac{1}{ik}a_k e^{ikt}\right| \le \frac{\pi}{2n}\sup_{-\pi\le t\le\pi}\left|\sum_{|k|\ge n}a_k e^{ikt}\right| \qquad (1)$$

для любого тригонометрического полинома вида $x(t)=\sum_{|k|=n}^{m}a_k e^{ikt}$. Затем эта оценка была распространена Ж. Фаваром [2] и Б. М. Левитаном [3] на почти периодические и ограниченные функции. В этих же работах было обобщено и неравенство С. Н. Бернштейна для целых функций, ограниченных на вещественной оси $\mathbb{R}$.

Пусть X — комплексное банахово пространство, $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X, и $T:\mathbb{R}\to EndX$ — сильно непрерывное изометрическое представление (изометрическая группа операторов). Пусть $iA: D(A)\subset X\to X$ есть её генератор. Тогда спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественный [4], и поэтому его резольвентное множество $\rho(A)$ содержит $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. В частности, если $X=C_u(\mathbb{R})$ — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ комплексных функций с "supremum" нормой, то группа операторов $S(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $(S(t)x)(\tau)=x(\tau+t)$, $\tau,t\in\mathbb{R}$, сдвигов функций сильно непрерывна и изометрична, а её генератором является оператор $\frac{d}{dt}=D$. Следовательно, $\sigma(D)\subset i\mathbb{R}$. Поскольку $De_\lambda=i\lambda e_\lambda$, для $e_\lambda(t)=exp(i\lambda t)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$, то $\sigma(A)=\mathbb{R}$, где $A=i^{-1}D$. При сужении группы операторов S на инвариантные подпространства спектр оператора A может уже не заполнять $\mathbb{R}$ и, в частности, может случиться так, что $0\notin\sigma(A)$. Так обстоит дело с подпространством $X_0=C_{2\pi,0}(\mathbb{R})$ непрерывных периодических периода 2π функций, имеющих нулевое среднее, т. е. в этом случае $0\notin\sigma(A\mid X_0)$. Следовательно, обратим оператор $A\mid X_0$, который является оператором интегрирования периодических функций. Значит, классические оценки Фавара можно интерпретировать как оценку нормы оператора $(A\mid X_n)^{-1}$ на подпространстве X_n периодических функций, имеющих ряд Фурье вида $a(t)\sim\sum_{|k|\ge n}a_k e^{ikt}$.

Таким образом, более общей постановкой задачи является оценка величины $\|A^{-1}\|$ для генератора iA произвольной изометрической группы операторов $T:\mathbb{R}\to EndX$ при условии, что $o\in\rho(A)$. Используя результаты из статей [2], [3], можно доказать (это не является целью данной статьи), что верна оценка $\|A^{-1}\|\le\frac{\pi}{2dist(0,\sigma(A))}$, и эта оценка неулучшаема в классе всех изометрических представлений. Разумеется, если X — гильбертово пространство, то A — самосопряженный оператор и в этом случае $\|A^{-1}\|=(dist(0,\sigma(a)))^{-1}$. Цель данной работы — установить это равенство, не делая ограничений на банахово пространство X, а лишь предполагая, что $\sigma(A)\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)$, либо $\sigma(A)\subset\mathbb{R}_-=(-\infty,0)$.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $L_1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра всех суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со свёрткой функций в качестве умножения и с нормой $\|f\|_1=\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt$.

Наличие изометрического представления $T:\mathbb{R}\to EndX$ позволяет задать на банаховом пространстве X структуру банахова $L_1(\mathbb{R})$ — модуля с помощью формулы

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131

$$fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt,\ f \in L_1(\mathbb{R}),\ x \in X. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что корректно определён оператор $\tilde{T}(f) \in EndX$, $\tilde{T}(f)x = fx$, $x \in X$, $f \in L_1(\mathbb{R})$ и верна оценка

$$\left\|\hat{T}(f)\right\| \leq \|f\|_1 . \quad (3)$$

Таким образом, построен гомоморфизм $\tilde{T} : L_1(\mathbb{R}) \to EndX$ и $\left\|\tilde{T}\right\| \leq 1$. Гомоморфизм $\tilde{T}$ можно и часто полезно рассматривать как функциональное исчисление для оператора A (iA — генератор группы $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$), полагая

$$\hat{f}(A) = \tilde{T}(f),\ f \in L_1(\mathbb{R}), \quad (4)$$

где $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — преобразование Фурье для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$. Естественность такого исчисления объясняется формулой

$$R(\lambda_0, A)x = (A - \lambda_0 I)^{-1} x = \tilde{T}(f_0)x,\ \ x \in X, \ (5)$$

где $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$, $f_0(t) = exp(i\alpha - \beta)t$, $t \geq 0$, $f_0(t) = 0$, $t < 0$, $\hat{f}_0(t) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Важным является следующее понятие

Определение 1. Спектром Бёрлинга вектора $x \in X$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in R :$ существует функция $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat{f}_0(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$.

Имеет место следующие две леммы (см. [4, гл. 1])

Лемма 1. Имеют место следующие свойства:

1. $\Lambda(x) = \varnothing \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\Lambda(Bx + Cy) \subset \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$, $x, y \in X$ для любых операторов $B, C \in EndX$, перестановочных с операторами $\tilde{T}(f)$, $f \in L_1(\mathbb{R})$;
3. $\Lambda(fx) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(x)$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in X$;
4. $fx = 0$, если $\operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(x) = \varnothing$;
5. $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$;
6. функция $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R} \to X$ для x с компактным $\Lambda(x)$ допускает расширение до целой функции.

Если Δ — замкнутое подмножество из X, то подпространство $X(\Delta) = \{x \in X : \Lambda(x) \subset \Delta\}$ замкнуто; оно называется спектральным подпространством из X. Из свойства 2 леммы 1 следует, что $X(\Delta)$ является инвариантным для оператора $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и, следовательно, относительно оператора A. Следовательно, $X(\Delta)$ — подмодуль из X.

Лемма 2. Для любого замкнутого множества Δ из $\mathbb{R}$ имеют место включения

$$\sigma(A \mid X(\Delta)) \subset \Delta \subset \sigma(A)$$

и равенство

$$\sigma(T(f)) = \hat{f}(\Lambda(X)) = \{\hat{f}(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Из свойства 4 леммы 1 следует, что каждый из операторов $\tilde{T}(f_0) = \hat{f}_0(A)$, где $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$, совпадает с операторами $\tilde{T}(f)$, где $f \in L_1(\mathbb{R})$ такова, что $\hat{f} = \hat{f}_0$ в некоторой окрестности множества $\sigma(A)$. Следовательно, задача оценки нормы оператора $\tilde{T}(f_0)$ сводится к оценке

$$\left\|\tilde{T}(f_0)\right\| \leq \inf \left\|\tilde{T}(f)\right\|,$$

где inf берётся по всем функциям $f \in L_1(\mathbb{R})$ со свойством $\hat{f} = \hat{f}_0$ в некоторой окрестности множества $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Такой подход к оценкам норм операторов был высказан в статье [5] (см. также [6], где для этой цели использовать положительно определённые функции; эта идея ещё ранее высказывалась М. Г. Крейном).

Реализацией этой идеи может служить получение неравенства Бернштейна для непрерывного в равномерной операторной топологии представления T. В этом случае $A \in EndX$, и неравентсво Бернштейна получается из равенства $\|A\| = r(A)$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

Лемма 3. Если $0 \in \rho(A)$, то оператор A^{-1} представим в виде

$$A^{-1}x = \tilde{T}(f)x = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt,\ x \in X, \quad (6)$$

где f — любая функция из $L_1(\mathbb{R})$, для которой $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$ в некоторой окрестности множества $\sigma(A)$.

Доказательство. Пусть (f_n) — любая аппроксимативная единица из $L_1(\mathbb{R})$, для которой $\operatorname{supp} \hat{f}_n$ — компакт для любого $n \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} f_n x = x$, $x \in X$, а из свойства 3 леммы 1 получаем, что векторы $x_n = f_n x$, $n \geq 1$, имеют компактный спектр Берлинга. Следовательно, равенства (6) достаточно установить для векторов $x \in X$ с компактным $\Lambda(x)$. Тогда из свойства 6 леммы 1 следует, что функция $t \mapsto T(-t)x : \mathbb{R} \to X$ бесконечно дифференцируема. Далее, из свойства 4 леммы 1 получаем, что равенство (6) достаточно установить для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$, для $\hat{f}(\lambda) = \lambda^{-1}$ в некоторой окрестности компакта $\Lambda(x)$ и её носитель $\operatorname{supp} \hat{f}$ является компактным множеством. Последнее свойство ведёт к бесконечной дифференцируемости функции f и множество $\Lambda(fx) \subset \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(x)$ является компактным. Следовательно, векторы x, fx принадлежат $D(A)$. Имеют место равенства:

$$A\tilde{T}(f)x = \tilde{T}(f)Ax = \int_{\mathbb{R}} f(t)AT(-t)xdt =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} if'(t)T(-t)xdt = \int_{\mathbb{R}} g(t)T(-t)xdt = \tilde{T}(g)x,$$

где использовалось интегрирование по частям, $g \in L_1(\mathbb{R})$ и $\hat{g}(\lambda) = \lambda\hat{f}(\lambda) = 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$. Поэтому из свойства 5 леммы 1 получаем равенство

$$A\tilde{T}(f)x = \tilde{T}(f)Ax = x,$$

из которых следует доказываемое представление (6). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\sigma(A) \subset [\alpha, \infty)$, где $\alpha > 0$ (либо $\sigma(A) \subset (-\infty, -\alpha]$). Тогда

$$\|A^{-1}\| = r(A^{-1}) = \frac{1}{\alpha}, \qquad (7)$$

где $r(A^{-1})$ — спектральный радиус оператора A^{-1}.

Таким образом, из условий теоремы следует, что $\Lambda(x) \subset [\alpha, \infty)$ для любого $x \in X$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ вида

$$\hat{f}_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1}, \lambda \in [\alpha, \infty), \\ (|\lambda - \alpha| + \alpha)^{-1}, \lambda \in (-\infty, \alpha). \end{cases}$$

Эта функция является сдвигом (на α) функции

$$\hat{g}_\alpha(\lambda) = (|\lambda| + \alpha)^{-1}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

которая является четной, выпуклой (вниз) функцией и $\lim_{|\lambda| \to \infty} \hat{g}_\alpha(\lambda) = 0$. Тогда из критерия Пойа (см. [7, теорема 4.3.1]) следует, что функция $\hat{g}_\alpha$ положительно определена и является преобразованием Фурье суммируемой неотрицательной функции $g_\alpha \in L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, $\|g_\alpha\|_1 = \hat{g}_\alpha(0) = \alpha^{-1}$. Поэтому $\|f_\alpha\|_1 = \|g_\alpha\| = \alpha^{-1}$.

Докажем, что оператор A^{-1} допускает представление

$$A^{-1} = \tilde{T}(f_\alpha).$$

Поскольку $\hat{f}_\alpha$ совпадает с функцией $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ на множестве $\sigma(A)$, а не в его окрестности, то мы не можем воспользоваться леммой 3. Однако, необходимым свойством обладают функции $f_{\alpha-\varepsilon}, \varepsilon \in (0, \alpha)$, причем $\|f_{\alpha-\varepsilon}\|_1 = (\alpha - \varepsilon)^{-1}$, $\|f_{\alpha-\varepsilon} - f\|_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\tilde{T}(f_\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{T}(f_{\alpha-\varepsilon}) = A^{-1}.$$

Из этого представления и полученного равенства $\|f_\alpha\|_1 = \alpha^{-1}$ получаем

$$\|A^{-1}\| = \|\tilde{T}(f_\alpha)\| = \alpha^{-1} = r(A^{-1}).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Оператор A обратим на спектральных подпространствах $X_\alpha = X([\alpha, \infty))$, $\alpha > 0$ и $\|(A \mid X_\alpha)^{-1}\| \le \alpha^{-1}$.

Следствие 2. Пусть $\varphi \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ имеет ряд Фурье вида

$$\varphi(t) \sim \sum_{k \ge n} \varphi_k e^{ikt}.$$

Тогда она имеет ограниченный интеграл $\psi \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ и $\|\psi\| = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\psi(t)| \le n^{-1}\|\varphi\|$.

Определение 2. Банахово пространство локально суммируемых измеримых функций $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ назовём *однородным пространством функций*, если выполнены условия:

1) сдвиг $(S(t)\varphi)(s) = \varphi(t+s)$, $s, t \in \mathbb{R}$, любой функции $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ принадлежит $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ и $\|S(h)\varphi\| = \|\varphi\|$;

2) функция $t \mapsto S(t)\varphi : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ непрерывна.

Таким образом, в каждом однородном пространстве функций $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ действует сильно непрерывная группа изометрических операторв $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ является банаховым $L_1(\mathbb{R})$-модулем, и поэтому можно говорить о спектре Берлинга функций из $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Поскольку полученные результаты относятся к банаховым модулям с положительным спектром Берлинга для векторов из этих модулей, то полезна следующая полученная в статье [4, лемма 8.2] характеризация функций из однородного пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$.

Для того,чтобы $\Lambda(\varphi) \subset \mathbb{R} = (0, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ допускала ограниченное голоморфное продолжение в полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Из этого критерия и теоремы 1 следует, что любая функция $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ с $\Lambda(\varphi) \subset \mathbb{R}_+$ обладает интегралом $\psi \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ и

$$\|\psi\| \le dist(0, \Lambda(\varphi))^{-1} \|\varphi\|. \qquad (8)$$

Отметим, что примерами однородных пространств являются пространства Лебега $L_p(\mathbb{R}), p \in [1, \infty)$, банахово пространство $C_u(\mathbb{R})$ равномерно непрерывных и ограниченный на $\mathbb{R}$ функций, подпространство функций из пространства Степанова $S_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$, в котором операция сдвигов функции непрерывна по норме из $S_p(\mathbb{R})$.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Наличие изометрического представления $T:\mathbb{R}\to EndX$ позволяет в банаховой алгебре $EndX$ ввести структуру банахова $L_1(\mathbb{R})$-модуля, положив

$$(fB)x=\int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)BT(t)xdt, \qquad f\in L_1(\mathbb{R}), B\in EndX. \tag{9}$$

Таким образом, эта структура определяется с помощью представления $T_{ad}:\mathbb{R}\to End(EndX)$ вида

$$T_{ad}(t)B=T(t)BT(-t),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ B\in EndX.$$

Следовательно, можно говорить о спектре Берлинга любого оператора $B\in EndX$. Хотя представление T_{ad} не является непрерывным в равномерной операторной топологии, оно является непрерывным в сильной операторной топологии, и это позволяет получить все отмеченные выше результаты.

Определение 3. [4]. Оператор $B\in EndX$ называется *каузальным* (причинным), если $\Lambda(B)\subset\overline{\mathbb{R}}_+$, и — *равномерно каузальным*, если $\Lambda(B)\subset\mathbb{R}_+$.

Пример. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_1,e_2,\ldots$ и (λ_k) — неубывающая последовательность вещественных чисел. Рассмотрим изометрическое представление $T:\mathbb{R}\to EndX$ вида:

$$T(t)x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x_n,e_n)e^{i\lambda_n t},\ \ x\in X.$$

Пусть $B\in EndX$ и $\mathcal{B}=(b_{ij})$ его матрица, т. е. $(b_{ij})=(Be_j,e_i)$, $i,j\in\mathbb{Z}$. Тогда из формулы (9) следует, что оператор $fB\in EndX$, где $f\in L_1(\mathbb{R})$, имеет матрицу $\mathcal{B}_f$ вида $\mathcal{B}_f=(\hat f(\lambda_i-\lambda_j)b_{ij})$. Отсюда следует, что оператор B каузален тогда и только тогда, когда $b_{ij}=0$ при $j>i$ и B равномерно каузален тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha>0$, что $b_{ij}=0$ для $\lambda_i-\lambda_j<\alpha$. В этом случае $\Lambda(B)\subset[\alpha,\infty)$. Отметим, что $\Lambda(B)$ совпадает с замыканием множества $\{\lambda_i-\lambda_j:b_{ij}\neq 0\}$. При этом если функция $f\in L_1(\mathbb{R})$ такова, что $f(\lambda)=\lambda^{-1}$ при $\lambda\geq\alpha$, то оператор fB имеет матрицу вида $\left(\dfrac{1}{\lambda_i-\lambda_j}b_{ij}\right)$. И, более того, $\|fB\|\leq\alpha^{-1}\|B\|$.

Пусть $A:D(A)\subset X\to X$ — самосопряженный оператор, X — гильбертово пространство. Тогда оператор iA — генератор группы $\{T(t),t\in\mathbb{R}\}$ унитарных операторов и, следовательно, X является банаховым $L_1(\mathbb{R})$-модулем. Пусть $\alpha>0$ и через $End_\alpha X$ обозначим подпространство равномерно каузальных операторов со спектром Берлинга из множества $[\alpha,\infty)$. Из статьи [4] следует, что $End_\alpha X$ — замкнутая подалгебра из $EndX$, причем $\Lambda(B_1,B_2)\subset\subset\Lambda(B_1)+\Lambda(B_2)$ для любых $B_1,B_2\in End_\alpha X$.

Пусть функция $f\in L_1(\mathbb{R})$ обладает свойством $\hat f(\lambda)=\lambda^{-1}$, $\lambda\geq\alpha$. Рассмотрим трансформатор (оператор в пространстве операторов)

$$\Gamma: EndX\to EndX,$$

$$\Gamma B=T_{ad}(f)B=\int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)BT(t)dt,\ \ B\in EndX.$$

Из полученных результатов следуют оценки

$$\|\Gamma B\|\leq\alpha^{-1},\ \ \|\Gamma(B_1,\ldots B_n)\|\leq(\alpha n)^{-1},$$

где $B,B_1,\ldots,B_n\in EndX$. Именно из этих оценок, используя метод подобных операторов [9, гл. 2] получаем следующий результат.

Теорема 2. Каждый из операторов $A-B$, $B\in End_\alpha X$ подобен оператору A. В частности, $\sigma(A-B)=\sigma(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bohr H.* Ein allgemeinerung Satz uber die Integration eines trigonometrischen Polynomials — Prace Math. Fiz. — 1935. — 43. — S. 273—288.
2. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Eulerá la démonsration de quclques propertietés extré males des inté grales des fonctions pé eriodiques on presque-pé riodiques. — Mat. Tidskr. 1936. P. 81—95.
3. *Левитан Б.М.* Об одном обобщении неравенств С. Н. Бернштейна и Н. Bohr'a. — ДАН СССР. 1937. Т. 15.
4. *Баскаков А.Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. — Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. Москва. С. 3—151.
5. *Баскаков А.Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе. — Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942—952.
6. *Горин Е.А.* Неравентсва Бернштейна с точки зрения операторов. Вестник Харьковского университета. 1980. Т. 45. С. 77—105.
7. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука. 1979.
8. *Баскаков А.Г., Криштал И.А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем. 2005. Т. 69, № 3, С. 3—54.
9. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж. ВГУ. 1987.

Поступила в редакцию 15.12.2006