УДК 517.9

ОЦЕНКИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Ю. Н. Синтяев

Воронежский государственный университет

В статье рассматриваются оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами. Получена оценка нормы обратного к оператору $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + A(t) : W_p^2(\mathbb{R}, H) \subset L_p \to L_p$ в L_∞ через его норму в L_2. Также исследован случай дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + A(t) : W_p^2(\mathbb{R}, H) \subset L_p \to L_p, \qquad (1)$$

действующий в банаховом пространстве $L_p = L_p(\mathbb{R}, H)$, $p \in [1, \infty]$, измеримых по Бохнеру функций, определённых на вещественной оси $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном гильбертовом пространстве H и суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$). Его областью определения является пространство Соболева $W_p^2 = W_p^2(\mathbb{R}, H) = \{x \in L_p : \dot{x} \in L_p, \ddot{x} \in L_p\}$ [1]. Операторнозначная функция $A : \mathbb{R} \to EndH$ считается принадлежащей банахову пространству $C_b(\mathbb{R}, EndH)$, где $EndH$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Символом $\|x\|_p$ обозначается норма функции $x \in L_p$ ($\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p \, dt\right)^{1/p}$, $x \in L_p$; $\|x\|_\infty = vrai\sup_{t \in \mathbb{Z}} \|x(t)\|$, $x \in L_\infty$). Норма ограниченного оператора $B \in EndL_p$ обозначается через $\|B\|_p$. Символом l_p обозначим пространство последовательностей

$$l_p = l_p(\mathbb{R}, H) = \left\{x : \mathbb{Z} \to H \mid \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

$$p \in [1, \infty), \; l_\infty = l_\infty(\mathbb{R}, H) = \left\{x : \mathbb{Z} \to H \mid |x|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < \infty\right\}.$$

Гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}, H)$ интересно тем, что в ряде случаев легко оценить норму $\|\mathcal{L}^{-1}\|_2$ обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в $EndL_2$. Основные результаты работы связаны с оценкой нормы оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в пространстве L_∞ через норму этого оператора в пространстве L_2. Следовательно, такие теоремы дают оценки ограниченных решений уравнения (1).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131.

Лемма 1. Для любых $\gamma > 0$ и $x \in W_2^2(\mathbb{R}, H)$ верна оценка

$$\|x\|_\infty \le \frac{3^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{7}{4}}} \gamma \|x\|_2 + \frac{3^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{7}{4}} \gamma^3} \|\ddot{x}\|_2. \qquad (2)$$

Следствие 1. Имеет место (вытекающая из (2) при $\gamma = (\|\ddot{x}\|_2 \|x\|_2^{-1})^{1/4}$) оценка

$$\|x\|_\infty \le \frac{3^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{3}{4}}} \sqrt[4]{\|\ddot{x}\|_2} \sqrt[4]{\|x\|_2^3}.$$

Следствие 2. Для любого $x \in W_2^2$ верно неравенство:

$$\|x\|_\infty \le 2^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\|x\|_2^2 + \|\ddot{x}\|_2^2}.$$

Лемма 2. Для любых $\beta > 0$ и $x \in W_2^2(\mathbb{R}, H)$ верна оценка

$$\|\dot{x}\|_\infty \le \frac{(e^\pi + 1)\beta^2}{\sqrt{2}(e^\pi - 1)} \|x\|_\infty + \frac{(e^\pi + 2e^{\frac{\pi}{2}} - 1)}{\sqrt{2}\beta^2(e^\pi - 1)} \|\ddot{x}\|_\infty.$$

Далее символом W_p^m обозначается пространство Соболева $W_p^m = W_p^m(\mathbb{R}, H) = \{x \in L_p : x^{(k)} \in L_p, 1 \le k \le m\}$, где $x^{(k)}$ — k-ая производная от функции x, понимаемая в обобщенном смысле.

Исследование дифференциального оператора (1) можно свести к исследованию дифференциального оператора (см. [2, с.137])

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{d}{dt} - \mathcal{A}(t) : W_p^2(\mathbb{R}, H) \times \times W_p^1(\mathbb{R}, H) \to L_p(\mathbb{R}, H \times H), \qquad (3)$$

введя замену переменных $y = x_1$, $\frac{dy}{dt} = x_2$. При этом оператор $\mathcal{A}(t)$ определяется формулой

$$\mathcal{A}(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$(x_1, x_2) \in W_p^2 \times W_p^1.$$

Лемма 3. Из обратимости оператора $\mathcal{L}$ следует, что $W_p^1 \times L_p \subset \operatorname{Im}\hat{\mathcal{L}}$, причём $Ker\hat{\mathcal{L}} = \{0\}$.

Доказательство. Очевидно, что равенство $Ker\hat{\mathcal{L}} = \{0\}$ следует из обратимости оператора $\mathcal{L}$. Для доказательства включения $W_p^1 \times L_p \subset \operatorname{Im}\hat{\mathcal{L}}$ рассмотрим $\tilde{f} = (f_1, f_2)$, где (f_1, f_2) — любая пара из $W_p^1 \times L_p$, и рассмотрим уравнение $\hat{\mathcal{L}}x = \tilde{f}$, то есть систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = f_1, \\ \dot{x}_2 + A(t)x_1 = f_2, \end{cases}$$

которая в свою очередь сводится к дифференциальному уравнению второго порядка $\ddot{x}_1 + A(t)x_1 = \dot{f}_1 + f_2$, однозначно разрешимое по условию леммы.

Для однородного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t)$ обозначим семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to EndH$, $\mathcal{U}(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$, где $U(t)$ — оператор Коши(см. [2]). Эволюционное семейство обладает следующими свойствами :

1) $\mathcal{U}(t,t) = I$,
2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$,
3) $\mathcal{U}(t,\tau) = (\mathcal{U}(\tau,t))^{-1}$,
4) $\|\mathcal{U}(t,\tau)\| \le exp\left[\int_\tau^t \|A(\tau)\| d\tau\right]$, $(\tau \le t)$.

Нетрудно убедиться в том, что существует такое число $K > 0$, что

$$\sup_{0 \le t-s \le 1} \|\mathcal{U}(t,s)\| = K < \infty.$$

Лемма 4. Из обратимости оператора

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + A(t) : W_p^2(\mathbb{R}, H) \subset L_p(\mathbb{R}, H) \to \\ \to L_p(\mathbb{R}, H)$$

следует обратимость разностного оператора

$$D : l_p(\mathbb{Z}, H \times H) \to l_p(\mathbb{Z}, H \times H), p \in [1, \infty],$$

определённого равенством:

$$(Dx)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1),$$

$$x \in l_p(\mathbb{Z}, H \times H), n \in \mathbb{Z},$$

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{L}$ обратим. Тогда, согласно лемме 3, $W_p^1 \times L_p \subset Im\hat{\mathcal{L}}$ и $Ker\hat{\mathcal{L}} = \{0\}$. Докажем, что и оператор D обратим, причём обратный имеет вид:

$$D^{-1}x = \tilde{y} + x, x \in L_p(\mathbb{Z}, H \times H),$$

где через $\tilde{y}$ обозначено сужение функции $y = \hat{\mathcal{L}}^{-1}Bx \in W_p^2(\mathbb{R}, H) \times W_p^1(\mathbb{R}, H)$ на $\mathbb{Z}$ и линейный оператор $B : l_p(\mathbb{Z}, H \times H) \to W_p^1(\mathbb{R}, H) \times \times L_p(\mathbb{R}, H)$ определён равенствами:

$$(Bx)(s) = \varphi(s)U(s, n-1)x(n-1),$$

$$x \in l_p(\mathbb{Z}, H \times H), n \in \mathbb{Z}, s \in [n-1, n].$$

Здесь $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая периода 1 функция, причём $\varphi(s) = 30(s^4 - 2s^3 + s^2)$, $s \in [0,1]$. Оператор B корректно определён, так как функция φ — ограничена и непрерывно дифференцируема, семейство $\mathcal{U}(s, n-1)$ удовлетворяет соотношению $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{U}(s, n-1)\| = K < \infty$, для всех $s \in [n-1, n]$ и дифференцируемо по первому аргументу, функция A ограничена, и $x \in l_p(\mathbb{Z}, H \times H)$. Далее, оператор B ограничен, и $\|B\| \le \frac{15}{8} K$.

Доказательство инъективности проводится аналогично доказательству инъективности в лемме 2 статьи [3].

Докажем сюръективность оператора D. Пусть $g \in l_p(\mathbb{Z}, H \times H)$. Тогда (см. лемму 3) $f = Bg \in W_p^1(\mathbb{R}, H) \times L_p(\mathbb{R}, H)$ и $x \in \mathcal{L}^{-1}f \in W_p^2(\mathbb{R}, H) \times \times W_p^1(\mathbb{R}, H)$. Отсюда имеем

$$x(n) = \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1) + \\ + \int_{n-1}^{n} \varphi(s)\mathcal{U}(n,s)\mathcal{U}(s, n-1)g(n-1)ds = \\ = \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1) + \mathcal{U}(n, n-1)g(n-1), \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $D(\tilde{x} + g) = g$, если только будет установлено, что $\tilde{x} \in l_p(\mathbb{Z}, H \times H)$. Имеют место следующие оценки:

$$\|\tilde{x}(n)\| = \|x(n)\| \le \frac{15}{8} K(\|x(s)\| + \|g(n-1)\|), \\ s \in [n-1, n], \;\; n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Поэтому $\tilde{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, H \times H)$, если $p = \infty$. Из формулы (4) получаем

$$\|\tilde{x}(n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\| \le \frac{15}{8} K(\|x\|_\infty + \|g\|_\infty). \tag{5}$$

Пусть теперь $1 \le p < \infty$. Поскольку $(a+b)^p \le \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ для любых $a, b \ge 0$, то, интегрируя по отрезку $[n-1, n]$ обе части неравенства (4), возведённые в степень p, получаем неравенства

$$\|x(n)\|^p \le \frac{1}{2^{2p+1}} (15K)^p (\int_{n-1}^{n} \|x(s)\|^p ds + \\ + \|g(n-1)\|^p), \;\; n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Поэтому при $1 \le p < \infty$ имеет место оценка

$$\|\tilde{x}\| \le 3K(\|x\|_p + \|g\|_p). \tag{7}$$

Таким образом из оценок (4)—(7) получаем, что при любом $p \in [1, \infty]$ функция $\tilde{x}$ принадлежит пространству $l_p(\mathbb{Z}, H\times H)$. Следовательно, оператор D обратим и $\tilde{x}+g=D^{-1}g$. Лемма доказана.

Теорема 1. Обратимость оператора (1) эквивалентна обратимости оператора

$$\hat{\mathcal{L}}=\frac{d}{dt}-\mathcal{A}(t):W_p^1\times W_p^1\to L_p\times L_p, \qquad (8)$$

причём обратимость $\mathcal{L}$ в одном из пространств L_{p_0}, $p_0\in[1,\infty]$ влечёт его обратимость во всех остальных пространствах L_p, $p\in[1,\infty]$.

Доказательство. Из обратимости оператора (1) следует обратимость оператора D, а значит (см лемму 3 статьи [3]) и обратимость оператора (8). Обратно, из обратимости оператора (8) следует обратимость оператора (3), а значит и обратимость (1). Далее, пусть оператор $\mathcal{L}$ обратим в одном из пространств L_{p_0}, $p_0\in[1,\infty]$. Тогда обратим оператор $D:l_{p_0}(\mathbb{Z},H\times H)\to$ $\to l_{p_0}(\mathbb{Z},H\times H)$. Из результатов статьи [3] следует, что оператор D обратим в l_p, $p\in[1,\infty]$. А значит обратим оператор (8), $p\in[1,\infty]$, откуда обратим оператор (3), $p\in[1,\infty]$. Наконец, обратим оператор $\mathcal{L}$ для всех $p\in[1,\infty]$.

Теорема 2. Пусть оператор $\mathcal{L}=\dfrac{d^2}{dt^2}+$ $+A(t):W_2^2\subset L_2\to L_2$ обратим. Тогда он обратим в пространстве L_∞ и имеет место оценка

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}\right\|_\infty\le 3(1+\|A\|_\infty\left\|\mathcal{L}^{-1}\right\|_2)^{\frac{1}{3}}\left\|\mathcal{L}^{-1}\right\|_2. \qquad (9)$$

Далее расматриваются оценки ограниченных решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Полученные в теореме 2 оценки, представляют интерес даже для дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами $A(t)\equiv A_0\in EndH$. Рассмотрим задачу об оценке ограниченного решения дифференциального уравнения:

$$\ddot{x}(t)+A_0x(t)=f(t), f\in L_\infty(\mathbb{R},H),$$

при условии, что

$$\sigma(A_0)\cap\mathbb{R}_+=\varnothing, \qquad (10)$$

где $\mathbb{R}_+=t\in\mathbb{R}, t\ge 0$. Из тождества Планшереля в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R},H)$ легко получить оценки нормы обратного оператора к дифференциальному оператору

$$\mathcal{L}=\frac{d^2}{dt^2}+A_0:W_2^2\subset L_2\to L_2.$$

Имеет место

Лемма 5. Если выполнено условие (10), то оператор $\mathcal{L}$ обратим и $\left\|\mathcal{L}^{-1}\right\|_2=\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|R(\lambda^2,A_0)\right\|$, где $R(\mu,A_0)=(A_0-\mu I)^{-1}$ — резольвента оператора A_0 (I — тождественный оператор). В частности, если A_0 нормальный оператор, то

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}\right\|_2=dist(\mathbb{R}_+,\sigma(A_0))^{-1},$$

где $dist(\mathbb{R}_+,\sigma(A_0))$ — расстояние от спектра $\sigma(A_0)$ оператора A_0 до вещественной полуоси $\mathbb{R}_+$.

Для любых пространств L_p, $p\in[1,\infty]$, оператор $\mathcal{L}_0$ также является обратимым и обратный к нему определяется формулой (см [2]).

$$(\mathcal{L}_0^{-1}f)(t)=(G_{A_0}*f)(t)=$$
$$=\int_{\mathbb{R}}G_{A_0}(t-s)f(s)ds,\ t\in\mathbb{R},$$

где $G_{A_0}(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}((-A_0)^{1/2})^{-1}e^{((-A_0)^{1/2})t}, t<0,\\ -\dfrac{1}{2}((-A_0)^{1/2})^{-1}e^{-((-A_0)^{1/2})t}, t\ge 0.\end{cases}$

Ясно, что норма $\mathcal{L}_0^{-1}$ в любом из пространств L_p оценивается следующим образом:

$$\left\|\mathcal{L}_0^{-1}\right\|_p\le\left\|G_{A_0}\right\|_1=\int_{\mathbb{R}}\left\|G_{A_0}(t)\right\|dt.$$

Отметим сложность оценки величины $\left\|G_{A_0}\right\|_1$, требующую вычисления операторных экспонент. Оказалось, что величину $\left\|\mathcal{L}_0^{-1}\right\|_{EndL_\infty}$ можно оценить, используя норму резольвенты оператора A_0. А именно, из леммы 5 и теоремы 2 следует

Теорема 3. При выполнении условия (10) оператор $\mathcal{L}_0=\dfrac{d^2}{dt^2}+A_0$ обратим в $L_\infty(\mathbb{R},H)$ и имеет место оценка

$$\left\|\mathcal{L}_0^{-1}\right\|_\infty\le 3\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|R(\lambda^2,A_0)\right\|\times$$
$$\times(1+\left\|A_0\right\|_\infty\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|R(\lambda^2,A_0)\right\|)^{\frac{1}{3}}.$$

В частности, если A_0 нормальный оператор из $EndH$,

$$\left\|\mathcal{L}_0^{-1}\right\|_\infty\le 3dist(\mathbb{R}_+,\sigma(A_0))^{-1}\times$$
$$\times(1+\left\|A_0\right\|_\infty dist(\mathbb{R}_+,\sigma(A_0))^{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

2. *Далецкий Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.

3. *Баскаков А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифферен-

циальных операторов // Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — Т. 30. — № 3. — С. 1—11.

4. *Баскаков А.Г.* Оценки оганиченных решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 3. — С. 413—415.

5. *Тюрин В.М.* Об обратимости оператора $\frac{d}{dt} - A(t)$ в некоторых функциональных пространствах // Мат. заметки. — 1979. — Т. 25. — № 4. — С. 585—590.

6. *Чернышов М.К.* Об условиях обратимости некоторых классов линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами : автореф. дис. ... канд. мат. наук. — Воронеж, 1997. — 197 с.

Поступила в редакцию 11.12.2006