УДК 517.988.6

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ

А. Б. Гельман, Б. Д. Гельман*

Воронежский государственный университет

В работах Ю. Г. Борисовича был введен и изучен топологический инвариант — относительное вращение (степень) вполне непрерывных векторных полей. Это понятие нашло широкие применения при построении топологической степени уплотняющих и фундаментально сужаемых векторных полей, в теории положительных операторов и других разделах современной математики. В настоящей статье предлагается новый подход к построению относительной степени вполне непрерывных векторных полей. Этот подход охватывает как частный случай конструкцию Ю. Г. Борисовича и развивает идеи, предложенные в монографии М. А. Красносельского и П. П. Забрейко.

ВВЕДЕНИЕ

В работах Ю. Г. Борисовича [1, 2] был введен и изучен топологический инвариант — относительное вращение (степень) вполне непрерывных векторных полей. Это понятие нашло применения при построении топологической степени уплотняющих и предельно компактных векторных полей (см., например, [3]), в теории положительных операторов (см., например, [4]) и других разделах современной математики. В монографии [4] были рассмотрены некоторые идеи построения различных обобщений этого понятия.

В настоящей статье предлагается новый подход к построению относительной степени вполне непрерывных векторных полей. Этот подход охватывает как частный случай конструкцию Ю. Г. Борисовича и, в некотором смысле, развивает идеи, предложенные в [4]. Основными в работе являются понятия K-неподвижной точки и понятия (f,K)-подчиненных отображения. Другие результаты, связанные с K-неподвижными точками, содержатся в работах [5], [6].

1. О (f,K)-ПОДЧИНЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Пусть X — метрическое пространство, E — нормированное пространство, K — замкнутое выпуклое подмножество в E, $f: X \to E$ — непрерывное компактное отображение, т.е. множество $\overline{f(X)}$ является компактом.

1.1. Определение. Непрерывное компактное отображение $g: X \to E$ называется (f,K)-подчиненным, если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $g(x) - f(x) \in K$.

Отметим некоторые свойства (f,K)-подчиненных отображений.

1.2. Предложение. Пусть A — замкнутое подмножество в X, $g: A \to E$ — непрерывное компактное (f,K)-подчиненное отображение. Тогда существует непрерывное компактное (f,K)-подчиненное отображение $\tilde{g}: X \to E$, которое является непрерывным продолжением отображения g, т.е. $g(x) = \tilde{g}(x)$ для любого $x \in A$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное компактное отображение $\varphi: A \to T \subset E$, определенное условием $\varphi(x) = g(x) - f(x)$. По теореме Дугунжи (см., например, [7]) существует непрерывное отображение $\tilde{\varphi}: X \to \overline{co}(\varphi(A)) \subset T$ такое, что $\tilde{\varphi}|_A = \varphi$. Так как множество $\overline{co}(\varphi(A))$ является компактным, то отображение $\tilde{\varphi}$ является компактным отображением. Рассмотрим теперь отображение $\tilde{g}: X \to E$, $\tilde{g}(x) = f(x) + \varphi(x)$. Очевидно, что это отображение удовлетворяет сделанным предположениям.

1.3. Предложение. Пусть $g_1, g_2: X \to E$ — непрерывные компактные (f,K)-подчиненные отображения, тогда для любого числа $\tau \in [0,1]$ отображение $g_\tau = (1-\tau)g_1 + \tau g_2$ также является (f,K)-подчиненным отображением.

Доказательство этого утверждения вытекает из выпуклости множества K.

1.4. Пример. Пусть K — выпуклое замкнутое подмножество нормированного пространства E, $f: X \to E$ — нулевое отображение, т.е. $f(x) = 0$ для любого $x \in X$. Очевидно, что отоб-

* Исследование поддержано РФФИ грант № 05-01-00100.

ражение g является (f,K)-подчиненным, тогда и только тогда, когда $g(x)\in K$ для любой точки $x\in X$.

1.5. Пример. Пусть E — нормированное пространство, $a:E\to E$ — линейный вполне непрерывный оператор. Пусть $K\subset E$ — замкнутый конус в пространстве E. Пусть X — подмножество в E, $g=a+\varphi:X\to E$. Выясним условия, при которых отображение g будет (a,K)-подчиненным отображением. В силу определения 1.1, это будет выполнено, если $\varphi(x)\in K$ для любого $x\in X$.

1.6. Предложение. Пусть $g:X\subset E\to E$ — непрерывное компактное (f,K)-подчиненное отображение. Если точка x_* является неподвижной точкой отображения g, то $x_*\in f(x_*)+K$.

Доказательство. Пусть $x_*=g(x_*)$, тогда

$$x_*-f(x_*)=g(x_*)-f(x_*)\in K,$$

что и доказывает утверждение.

2. K-НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Пусть E — нормированное пространство, X — подмножество в E, $f:X\to E$ — непрерывное отображение. Пусть K — фиксированное подмножество в E.

2.1. Определение. Точка $x_*\in X$ называется K-неподвижной точкой отображения f, если $x_*\in f(x_*)+K$.

Очевидно, что неподвижные точки отображения f являются K-неподвижными точками. Обозначим $Fix(f,K)$ множество K-неподвижных точек отображения f. Нас будет интересовать случай, когда f является компактным отображением, а множество K выпуклым и замкнутым.

Имеет место следующее утверждение.

2.2. Теорема. *Пусть U — ограниченное открытое подмножество банахова пространства E, $f:\overline{U}\to E$ — непрерывное компактное отображение. Если существует такое открытое множество $V\subset\overline{V}\subset U$, что для любого $x\in\overline{U}$ пересечение $(f(x)+K)\bigcap V\neq\varnothing$, то множество $Fix(f,K)\neq\varnothing$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

2.3. Лемма. *Пусть в пространстве E заданы: B — замкнутое подмножество, K — замкнутое выпуклое подмножество, U — открытое выпуклое подмножество. Если для любой точки $x\in B$ пересечение $(x+K)\bigcap U\neq\varnothing$, то существует непрерывное отображение $\alpha:B\to K$ такое, что $x+\alpha(x)\in U$.*

Доказательство. Рассмотрим два многозначных отображения:

$$F:B\to Cv(E),\ \ F(x)=K \ \text{ для любого } x\in B,$$

и

$$G:B\to V(E),\ \ G(x)=U-x.$$

Очевидно, что многозначное отображение F непрерывно, следовательно, полунепрерывно снизу, а многозначное отображение G является U-отображением. Так как $F(x)\bigcap G(x)\neq\varnothing$ по условию, то существует непрерывное отображение $\alpha:B\to E$ такое, что $\alpha(x)\in(F(x)\bigcap G(x))$, т.е. $\alpha(x)\in K$ и $x+\alpha(x)\in U$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $B=f(\overline{U})$, тогда для любой точки $\overline{y}\in f(\overline{U})$ существует точка $x\in\overline{U}$ такая, что $\overline{y}=f(x)$. Следовательно, $(\overline{y}+K)\cap V\neq\varnothing$. Тогда,

$$\varnothing\neq(y+K)\cap\overline{V}\subset(y+K)\cap U$$

для любой точки $y\in B$.

В силу леммы 2.3 существует непрерывное отображение $\alpha:B\to K$ такое, что $y+\alpha(y)\in U$. Рассмотрим отображение $\varphi:\overline{U}\to U$ определенное по правилу:

$$\varphi(x)=f(x)+\alpha(f(x)).$$

Так как f является компактным отображением, то отображение φ также компактно. Тогда по теореме Шаудера отображение φ имеет неподвижную точку x_*, т.е. $x_*=f(x_*)+\alpha(f(x_*))\in f(x_*)+K$. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые свойства множества $Fix_K(f)$.

2.4. Предложение. 1) Множество $Fix(f,K)$ является замкнутым.

2) Если $f:E\to E$ — непрерывное линейное отображение, то $Fix_K(f)$ является выпуклым замкнутым множеством.

3) Если X является ограниченным множеством, а K — выпуклый компакт, то $Fix_K(f)$ является компактным множеством.

Доказательство этих свойств очевидно.

2.5. Пример. Пусть $a:E\to E$ — линейный вполне непрерывный оператор и единица не является его собственным значением, тогда определен непрерывный оператор $(i-a)^{-1}:E\to E$. Пусть K — выпуклое замкнутое множество в E. Покажем, что

$$Fix(a,K)=(i-a)^{-1}(K).$$

Действительно, если $x\in Fix(a,K)$, то $x-a(x)\in K$ и $x\in(i-a)^{-1}(K)$.

Обратно, пусть $x\in(i-a)^{-1}(K)$, тогда $x-a(x)\in K$, т.е. x является K-неподвижной точкой отображения a.

3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ

Пусть E — банахово пространство, $f : E \to E$ — вполне непрерывное отображение. Пусть K — выпуклое замкнутое подмножество в E, $Fix(f, K)$ — множество K-неподвижных точек отображения f. Будем предполагать, что множество $Fix(f, K) \neq \varnothing$. Обозначим $X = \overline{co}(Fix(f, K))$. Пусть U_X — непустое ограниченное открытое в индуцированной топологии подмножеств X (относительно открытое подмножество). Замыкание и границу множества U_X в индуцированной топологии пространства X обозначим $\bar{U}_X$ и ∂U_X соответственно.

3.1. Лемма. *Пусть U_X — непустое относительно открытое подмножество X, тогда существует открытое в E множество U такое, что*

а) $U_X = U \bigcap X$;

б) $\partial U_X = \partial U \bigcap X$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$d : U_X \to R_+,\ \ d(x) = \rho(x, X \setminus U_X).$$

Теперь множество U определим по следующему правилу:

$$U = \bigcup_{x \in U_X} U_{d(x)}(x),$$

где $U_{d(x)}(x)$ является $d(x)$ окрестностью точки x.

Проверим, что открытое множество U удовлетворяет условиям леммы.

Проверим выполнение условия (а). Очевидно, что $U_X \subset (U \bigcap X)$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in (U \bigcap X)$, тогда точка $x \in X$ и существует точка $x_0 \in U_X$ такая, что $\| x - x_0 \| < d(x_0)$. Следовательно, точка $x \in U_X$.

Проверим теперь выполнение условия (б). Очевидно, что $\partial U_X \subset (\partial U \bigcap X)$. Докажем обратное включение. Пусть точка $x_0 \in (\partial U \bigcap X)$, тогда в любой ее окрестности есть точки из U и точки из $E \setminus U$. Нетрудно видеть, что точка $x_0 \in X$ и существует точка x_1 из U_X такая, что $\| x_0 - x_1 \| = \rho(x_1, K \setminus U_X)$. Рассмотрим точки

$$x_\lambda = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_0,$$

где $\lambda \in [0,1]$. В силу выпуклости множества X точки $x_\lambda \in X$. Заметим также, что $\|x_1 - x_\lambda\| = \lambda \|x_0 - x_1\|$. Следовательно, при $\lambda \in [0,1)$ справедливо неравенство $\| x_1 - x_\lambda \| < d(x_1)$. Это означает, что точка $x_\lambda \in (U \bigcap X) = U_X$. Таким образом, в каждой окрестности точки x_0 содержатся точки из U_X и точки из $E \setminus U$. Следовательно, точка $x_0 \in \partial U_X$. Лемма доказана.

Пусть $g : \partial U_X \to E$ — непрерывное компактное (f, K)-подчиненное отображение без неподвижных точек. Пусть $U \subset E$ ограниченное открытое в E множество такое, что $U_X = U \bigcap X$ и $\partial U_X = \partial U \bigcap X$. Тогда, в силу предложения 1.2, существует вполне непрерывное отображение $\tilde{g} : \bar{U} \to E$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) отображение $\tilde{g}$ является (f, K)-подчиненным отображением;

б) $\tilde{g}(x) = g(x)$ для любого $x \in \partial U_X$.

3.2. Предложение. Отображение $\tilde{g}$ не имеет неподвижных точек на множестве ∂U.

Доказательство. Если точка $x \in \partial U_X$, то она не является неподвижной по предположению. Пусть $x \in \partial U$, но $x \notin \partial U_X$. Тогда $x \notin X$, следовательно, $x \notin f(x) + K$. Тогда, в силу леммы 1.6, x не может быть неподвижной точкой отображения $\tilde{g}$. Утверждение доказано.

Рассмотрим вполне непрерывное векторное поле $\tilde{\varphi} = i - \tilde{g} : \partial U \to E$, $\tilde{\varphi}(x) = x - \tilde{g}(x)$. Так как это поле не имеет неподвижных точек на ∂U, то определена топологическая степень $\deg(\tilde{\varphi}, \partial U)$.

3.3. Определение. Относительной топологической степенью поля $\varphi = i - g : \partial U_X \to E$ относительно множества K и отображения f будем называть степень $\deg(\tilde{\varphi}, \partial U)$, вычисленная по продолжению $\tilde{g}$. Обозначать эту степень будем $\deg_{(f,K)}(\varphi, \partial U_X)$.

3.4. Предложение. Определение $\deg_{(f,K)}(\varphi, \partial U_X)$ корректно, т.е. не зависит от выбора продолжения $\tilde{g}$ и выбора окрестности U.

Доказательство. Покажем, сначала, независимость от выбора продолжения $\tilde{g}$. Действительно, рассмотрим два вполне непрерывных отображения $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : \bar{U} \to E$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) отображения $\tilde{g}_i$, $i = 1,2$, являются (f, K)-подчиненными;

б) $\tilde{g}_i(x) = g(x)$ для любого $x \in \partial U_X$.

Рассмотрим вполне непрерывное отображение

$$h : [0,1] \times \bar{U} \to E,$$

$$h(\lambda, x) = (1 - \lambda)\tilde{g}_1(x) + \lambda \tilde{g}_2(x).$$

Покажем что это отображение порождает невырожденную гомотопию $\Psi(\lambda, x) = x - h(\lambda, x)$ на ∂U.

Действительно, если существует точка x_0 и число $\lambda_0 \in [0,1]$ такие, что

$$x_0 = (1 - \lambda_0)\tilde{g}_1(x_0) + \lambda_0 \tilde{g}_2(x_0),$$

то

$x_0 - f(x_0) = (1-\lambda_0)(\tilde{g}_1(x_0) - f(x_0)) + \lambda_0(\tilde{g}_2(x_0) - f(x_0)).$

Так как $\tilde{g}_i(x_0) - f(x_0) \in K$, $i = 1,2$, и множество K выпукло, то $x_0 - f(x_0) \in K$. Следовательно, точка $x_0 \in f(x_0) + K$, т.е. $x_0 \in \partial U_X$. По построению, $\tilde{g}_i(x) = g(x)$ для любого $x \in \partial U_X$. Следовательно, $x_0 = g(x_0)$, а это противоречит предположению. Таким образом, поля $\tilde{\varphi}_i(x) = x - \tilde{g}_i(x)$, $i = 1,2$, гомотопны на ∂U, т.е. $\deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U) = \deg(\tilde{\varphi}_2, \partial U)$.

Покажем теперь независимость от выбора окрестности U.

Пусть U_1, U_2 — открытые множества в E такие, что $U_i \bigcap E = U_X$ и $\partial U_X = \partial U \bigcap X$ для $i = 1,2$. Пусть $U = U_1 \bigcap U_2$. Очевидно, что множество U является открытым в E и $U \bigcap E = U_X$ и $\partial U_X = \partial U \bigcap X.$ Пусть вполне непрерывное отображение $\tilde{g}_1 : \bar{U}_1 \to E$, удовлетворяет следующим условиям:

а) $\tilde{g}_1$ является (f,K)-подчиненными отображением;

б) $\tilde{g}_1(x) = g(x)$ для любого $x \in \partial U_X$.

Пусть векторное поле $\tilde{\varphi}_1 = i - \tilde{g}_1$. Аналогично предложению 3.2 можно показать, что отображение g_1 не имеет неподвижных точек на множестве $\bar{U}_1 \setminus U$. Тогда в силу свойства аддитивности топологической степени $\deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U) = \deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U_1)$.

Пусть вполне непрерывное отображение $\tilde{g}_2 : \bar{U}_2 \to E$, удовлетворяет следующим условиям:

а) $\tilde{g}_2$ является (f,K)-подчиненными отображением;

б) $\tilde{g}_2(x) = g(x)$ для любого $x \in \partial U_X$.

Пусть векторное поле $\tilde{\varphi}_2 = i - \tilde{g}_2$. Аналогично можно заметить, что $\deg(\tilde{\varphi}_2, \partial U) = \deg(\tilde{\varphi}_2, \partial U_2)$.. Так как в силу уже доказанного $\deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U) = \deg(\tilde{\varphi}_2, \partial U)$, то $\deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U_1) = \deg(\tilde{\varphi}_2, \partial U_2)$. Корректность доказана.

Изучим свойства введенной топологической степени.

Пусть $g_0, g_1 : \partial U_X \to E$ — вполне непрерывные (f,K)-подчиненные отображения без неподвижных точек. Пусть векторные поля $\tilde{\varphi}_0 = i - \tilde{g}_0$ и $\tilde{\varphi}_1 = i - \tilde{g}_1$ порождены этими отображениями.

3.6. Определение. Будем говорить, что поля φ_0 и φ_1 являются (f,K)-гомотопными ($\varphi_0 \sim \varphi_1$), если существует компактное отображение $g : \partial U_X \times [0,1] \to E$ такое, что

1) $g(\cdot,0) = f_0$, $g(\cdot,1) = f_1$;

2) $g(x,\lambda) - f(x) \in K$ для всех $x \in \partial U_X$, $\lambda \in [0,1]$;

3) $x \neq g(x,\lambda)$ для всех $x \in \partial U_X$, $\lambda \in [0,1]$;

3.7. Теорема (Гомотопическая инвариантность). *Пусть компактные поля $\varphi_0 = i - g_0$ и $\varphi_1 = i - g_1$ являются (f,K)-гомотопными, тогда $\deg_{(f,K)}(\varphi_0, \partial U_X) = \deg_{(f,K)}(\varphi_1, \partial U_X)$.*

Доказательство. Пусть $U \subset E$ ограниченное открытое множество такое, что выполнены условия леммы 3.1. Тогда, в силу предложения 1.2, существует вполне непрерывное отображение $\tilde{g} : \bar{U} \times [0,1] \to E$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\tilde{g}(x,\lambda) - f(x) \in K$ для всех $x \in \partial U$, $\lambda \in [0,1]$;

б) $\tilde{g}(x,\lambda) = g(x,\lambda)$ для любого $x \in \partial U_X$ и $\lambda \in [0,1]$.

Аналогично предложению 3.2 можно показать, что $x \neq \tilde{g}(x,\lambda)$ для всех $x \in \partial U$, $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим поля $\tilde{\varphi}_0(x) = x - \tilde{g}(x,0)$, $\tilde{\varphi}_1(x) = x - \tilde{g}(x,1)$. По построению эти поля соединены гомотопией $\Phi(x,\lambda) = x - \tilde{g}(x,\lambda)$. Тогда $\deg(\tilde{\varphi}_0, \partial U) = \deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U)$.

С другой стороны, в силу данного определения, $\deg(\tilde{\varphi}_0, \partial U) = \deg_{(f,K)}(\varphi_0, \partial U_X)$, а $\deg(\tilde{\varphi}_1, \partial U) = \deg_{(f,K)}(\varphi_1, \partial U_X)$. Это и доказывает теорему.

Пусть $K_1 \subset K$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество E. Обозначим $X_1 = \overline{co}(Fix(f, K_1))$. Очевидно, что $X_1 \subset X$. Пусть U_X — непустое ограниченное относительно открытое подмножество X, а $U_{X_1} = U_X \cap X_1$. Пусть $\partial U_{X_1} = \partial(U_X \cap X_1) \neq \varnothing$.

3.7. Теорема (принцип сужения отображения). *Если непрерывное компактное отображение $g : \partial U_X \to E$ является (f, K_1)-подчиненным отображением и не имеет неподвижных точек, то*

$$\deg_{(f,K)}(i - g, \partial U_X) = \deg_{(f,K_1)}(i - g, \partial U_{X_1}).$$

Доказательство. Пусть $U \subset E$ ограниченное открытое множество такое, что $U_X = U \bigcap X$. Следовательно, $U_{X_1} = U \bigcap X_1$. Тогда, в силу предложения 1.2, существует вполне непрерывное отображение $\tilde{g} : \bar{U} \to E$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\tilde{g}(x) - f(x) \in K_1$ для всех $x \in \partial U$;

б) $\tilde{g}(x) = g(x)$ для любого $x \in \partial U_X$.

Тогда в силу определения относительной топологической степени имеем:

$$\deg(i - \tilde{g}, \partial U) = \deg_{(f,K)}(i - g, \partial U_X) = \\ = \deg_{(f,K_1)}(i - g, \partial U_{X_1}).$$

Аналогично свойствам обычной топологической степени имеет место теорема о существовании неподвижной точки.

3.8. Теорема. *Пусть $g : \bar{U}_X \to E$ — компактное непрерывное (f,K)-подчиненное отображение. Если*

$$deg_{(f,K)}(i-g,\partial U_X)\neq 0,$$

то отображение g имеет в U_X неподвижную точку.

Доказательство. Пусть $U \subset E$ ограниченное открытое множество такое, что выполнены условия леммы 3.1. Тогда, в силу предложения 1.2, существует вполне непрерывное отображение $\tilde{g}:\overline{U}\to E$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) отображение $\tilde{g}$ является компактным непрерывным (f,K)-подчиненным отображением;

б) $\tilde{g}(x)=g(x)$ для любого $x\in\overline{U}_X$.

В силу определения относительной степени имеем:

$$\deg(i-\tilde{g},\partial U)=\deg_{(f,K)}(i-g,\partial U_X)\neq 0.$$

Следовательно, отображение $\tilde{g}$ имеет в U неподвижную точку x_0.

Покажем, что $x_0\in U_X$. Предположим противное, пусть $x_0=\tilde{g}(x_0)$ и $x_0\notin X$, т.е. $x\notin f(x)+K$. Тогда, в силу леммы 1.6, $x_0\neq\tilde{g}(x_0)$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Приведем пример вычисления относительной топологической степени.

Пусть выпуклое замкнутое множество K содержит нуль пространства E, $f:E\to E$ — вполне непрерывное отображение, $Fix(f)$ — множество неподвижных точек отображения f. Очевидно, что $Fix(f)\subset Fix(f,K)\subset X$. Так как K содержит нуль пространства E, то f является (f,K)-подчиненным отображением. Пусть U_X — непустое ограниченное относительно открытое подмножество X такое, что отображение f не имеет неподвижных точек на ∂U_X.

3.9. Теорема. *Пусть $g:\partial U_X\to E$ является (f,K)-подчиненным отображением. Если*

$$||\,x-f(x)\,||>||\,f(x)-g(x)\,||$$

для любой точки $x\in\partial U_X$, то

$$\deg_{(f,K)}(i-g,\partial U_X)=\deg_{(f,K)}(i-f,\partial U_X).$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения покажем, что поля $\psi_0(x)=x-f(x)$ и $\psi_1(x)=x-g(x)$ являются (f,K)-гомотопными на множестве ∂U_X. Рассмотрим компактное отображение

$$\varphi(x,\lambda)=(1-\lambda)f(x)+\lambda g(x),$$

тогда разность $\varphi(x,\lambda)-f(x)=\lambda(g(x)-f(x))$. Так как $g(x)-f(x)\in K$ и $0\in K$, то $\varphi(x,\lambda)-f(x)\in K$ для любых $x\in\partial U_X$ и $\lambda\in[0,1]$.

Покажем теперь, что $\varphi(x,\lambda)\neq x$ для любых $x\in\partial U_X$ и $\lambda\in[0,1]$. Предположим противное, тогда существуют $x_0\in\partial U_X$ и $\lambda_0\in[0,1]$ такие, что

$$x_0=(1-\lambda_0)f(x_0)+\lambda_0 g(x_0).$$

Следовательно, $x_0-f(x_0)=\lambda(g(x_0-f(x_0))$, т.е.

$$\|x_0-f(x_0)\|=\lambda\|g(x_0-f(x_0)\|\leq\|g(x_0-f(x_0)\|,$$

что противоречит предположению. Это и доказывает (f,K)-гомотопность полей $\psi_0(x)=$ $=x-f(x)$ и $\psi_1(x)=x-g(x)$. Теорема доказана.

3.10. Пример (относительное вращение). Пусть E — банахово пространство, $f:E\to E$ — нулевой оператор, т.е. $f(x)=0$ для любого $x\in E$. Пусть K — выпуклое замкнутое подмножество в E. Тогда $X=Fix(f,K)=K$. Пусть U_K — непустое ограниченное относительно открытое подмножество K. Пусть $g:\partial U_K\to E$ — вполне непрерывное (f,K)-подчиненное отображение не имеющее неподвижных точек. В этом случае условие (f,K)-подчиненности эквивалентно тому, что $g:\partial U_K\to K$. В этом случае естественно определена относительная топологическая степень.

В работах Ю. Г. Борисовича [1], [2] была введена и изучено относительное вращение (топологическая степень) векторного поля $\varphi=i-g:\partial U_K\to E$ в случае, когда K является выпуклым замкнутым множеством и $g:\partial U_K\to K$. Нетрудно видеть, что относительное вращение, изученное Ю. Г. Борисовичем, совпадает с этим частным случаем топологической степени, введенной в настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович Ю.Г.* Об одном применении понятия вращения векторного поля // Докл. АН СССР. 153 (1963), № 1, С. 12—15.

2. *Борисович Ю.Г.* Об относительном вращении компактных векторных полей в линейных пространствах // Тр. семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т. № 12, 1969, С. 3—27.

3. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа / М: Наука. — 1975. — 510 с.

5. *Гельман А.Г.* Об одной проблеме Улама // Труды матем. ф-та. Воронеж. ун-т. № 9, 2005, С. 32—39.

6. *Гельман А.Г.* О неравенствах в банаховом пространстве // Труды матем. ф-та. Воронеж. ун-т. № 10, 2006, С. 42—48.

7. *Борсук К.* Теория ретрактов / М: Мир. — 1971. — 291 с.

Поступила в редакцию 26.11.2006