УДК 517

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. М. Басова, В. В. Обуховский*

Воронежский государственный университет

Изучается общая краевая задача для полулинейного функционально-дифференциального включения с бесконечным запаздыванием в банаховом пространстве. Вводится многозначный уплотняющий интегральный оператор, неподвижные точки которого являются ослабленными решениями вышеуказанной задачи. Это позволяет применить к данной задаче теорию топологической степени и получить общую теорему существования. В качестве примеров рассматриваются задача Коши и периодическая задача.

ВВЕДЕНИЕ

Функционально-дифференциальные уравнения и включения различных типов с бесконечным запаздыванием изучались в целом ряде работ (см., например, [1—4] и имеющиеся там ссылки). В настоящей работе мы изучаем общую краевую задачу для полулинейного функционально-дифференциального включения с бесконечным запаздыванием в банаховом пространстве. Предполагается, что распределенное бесконечное запаздывание принадлежит фазовому пространству типа Хейла—Като, которое представляет собой нормированное пространство, удовлетворяющее некоторому набору аксиом (см. [3, 4]). Вводится многозначный интегральный оператор, неподвижные точки которого являются ослабленными решениями вышеуказанной задачи. Изучаются свойства этого мультиоператора, в частности, мы приводим условия, при которых этот мультиоператор является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности специального вида. Это позволяет применить методы теории топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см., например, [5, 6]) и получить общую теорему существования. Рассматриваются некоторые частные случаи, среди которых — задача Коши и периодическая задача. Отметим, что дифференциальные включения различных классов с краевыми условиями, заданными в операторной форме, рассматривались в последние годы в работах [7—14]. В частности, в настоящей работе получено развитие ряда результатов, установленных в работе авторов [7] для функционально-дифференциальных включений с конечным запаздыванием.

* Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00100, 07-01-00137 и грантом ICS(CLG-981757)

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Напомним некоторые понятия (см., например, [5, 6, 15, 16]). Пусть X — метрическое пространство; $\mathcal{E}$ — нормированное пространство; $P(\mathcal{E})$ обозначает набор всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$. Символами $K(\mathcal{E})$ и $Kv(\mathcal{E})$ мы обозначаем совокупности всех непустых компактных и, соответственно, компактных выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 1.1 *Многозначное отображение (мультиотображение)* $\mathcal{F} : X \to K(\mathcal{E})$ называется полунепрерывным сверху (п.н.с.), если малый прообраз $\mathcal{F}_+^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ является открытым подмножеством X для каждого открытого $V \subset \mathcal{E}$. Отметим, что если для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$ открыт его *полный прообраз* $\mathcal{F}_-^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \cap V \neq \varnothing\}$, то мультиотображение $\mathcal{F}$ называется *полунепрерывным снизу*.

Определение 1.2. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(\mathcal{E})$ называется компактным, если его область значений $\mathcal{F}(X)$ является относительно компактным подмножеством $\mathcal{E}$.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{E}$ — нормированное пространство; $(\mathcal{A}, \geq 0)$ — (частично) упорядоченное множество. Функция $\beta : P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (МНК) в $\mathcal{E}$, если

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega)$$

для каждого $\Omega \in P(\mathcal{E})$.

МНК β называется:

a) *монотонной,* если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ влечет $\beta(\Omega_1) \leq \leq \beta(\Omega_2)$;

b) *несингулярной,* если $\beta(\Omega \cup \{a\}) = \beta(\Omega)$ для каждых $a \in \mathcal{E}$, $\Omega \in P(\mathcal{E})$;

c) *инвариантной относительно объединения с компактными множествами,* если $\beta(\Omega \cup K) = \beta(\Omega)$ для каждых $\Omega \in P(\mathcal{E})$ и компактного в $\mathcal{E}$ множества K;

d) *инвариантной относительно симметрии в нуле,* если $\beta(-\Omega) = \beta(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$;

e) *вещественной,* если $\mathcal{A} = [0, +\infty]$ с естественным упорядочением.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

f) *алгебраически полу-аддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для каждых Ω_0, $\Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;

g) *правильной,* если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

В качестве примера МНК, обладающей всеми указанными свойствами, мы можем рассмотреть МНК *Хаусдорфа*:

$$\chi(\Omega) =$$

$$= \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon - \text{сеть}\}.$$

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутый интервал. Примерами вещественных мер некомпактности, определенных на пространстве непрерывных функций $C(I;E)$ со значениям в банаховом пространстве E являются следующие характеристики:

1) *модуль равностепенной непрерывности*:

$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| < \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|_E .$$

2) *модуль послойной некомпактности*:

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in I} \chi_E(\Omega(t)),$$

где $\Omega(t) = \{x(t) : x \in \Omega\}$.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — нормированные пространства с мерами некомпактности β и β' соответственно; $L : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ — непрерывный линейный оператор.

Определение 1.4. Оператор L называется (β, β') — ограниченным, если найдется $C \geq 0$ такое, что

$$\beta'(L\Omega) \leq C\beta(\Omega)$$

для всех ограниченных множеств $\Omega \subset \mathcal{E}$.

Значение $\|L\|^{(\beta,\beta')}$, равное точной нижней грани множества всех таких коэффициентов называется (β, β')-нормой оператора L.

В частности, если $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ и $\beta = \beta'$, то $\|L\|^{(\beta,\beta)}$ будем обозначать как $\|L\|^{(\beta)}$ и называть β-*нормой оператора* L. Для вычисления χ-нормы оператора L мы можем применять формулу

$$\|L\|^{(\chi)} = \chi(LS) = \chi(LB),$$

где S и B — единичные сфера и шар в $\mathcal{E}$, соответственно. Легко видеть, что

$$\|L\|^{(\chi)} \leq \|L\|.$$

Определение 1.5. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно МНК β в $\mathcal{E}$ (или β-уплотняющим), если для каждого $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено

$$\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega).$$

Пусть U — открытое множество в $\mathcal{E}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$ — выпуклое замкнутое множество такое, что $U_{\mathcal{K}} = U \cap \mathcal{K}$ не пусто и ограничено и пусть β — монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{F} : \bar{U}_{\mathcal{K}} \to Kv(\mathcal{K})$ — β-уплотняющее п.н.с. мультиотображение и пусть $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial U_{\mathcal{K}}$, где $\bar{U}_{\mathcal{K}}$ и $\partial U_{\mathcal{K}}$ обозначают, соответственно, замыкание и границу множества $U_{\mathcal{K}}$ в относительной топологии пространства $\mathcal{K}$. В этой ситуации для соответствующего мультиполя $i - \mathcal{F}$ определена характеристика — относительная топологическая степень

$$\deg_{\mathcal{K}}(i - \mathcal{F}, \bar{U}_{\mathcal{K}}),$$

обладающая всеми стандартными свойствами (см. [5]). В частности, отличие этой характеристики от нуля влечет существование по крайней мере одной неподвижной точки $x \in U_{\mathcal{K}}$, $x \in \mathcal{F}(x)$.

Мы будем использовать следующее понятие. Пусть E — банахово пространство; для $T > 0$ символом $L^1([0,T];E)$ мы будем обозначать пространство всех интегрируемых по Бохнеру функций из $[0,T]$ в E.

Определение 1.6. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ называется полукомпактной, если она интегрально ограничена и множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ относительно компактно для п.в. $t \in [0,T]$.

Теорема 1.1. (см., например, [5]). *Каждая полукомпактная последовательность слабо компактна в пространстве* $L^1([0,d];E)$.

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное Дж. Хейлом и Дж. Като (см. [3, 4]). Пространство $\mathcal{B}$ будет рассматриваться как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty,0]$ со значениями в E, наделенное полунормой $\|\cdot\|_B$.

Для любой функции $x:(-\infty;T]\to E$ и каждого $t\in(-\infty;T]$, x_t представляет собой функцию из $(-\infty,0]$ в E, заданную как

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \ \theta\in(-\infty;0].$$

Будет предполагаться, что B удовлетворяет следующим аксиомам.

($\mathcal{B}1$) Если функция $x:(-\infty;T]\to E$ непрерывна на $[0;T]$ и $x_0\in\mathcal{B}$, то для любого $t\in[0;T]$ выполнено

(i) $x_t\in\mathcal{B}$;

(ii) функция $t\mapsto x_t$ непрерывна;

(iii) $\|x_t\|_B\le K(t)\sup\limits_{0\le\tau\le t}\|x(\tau)\|+M(t)\|x_0\|_B$, где функции $K,M:[0;\infty)\to[0;\infty)$ не зависят от x, K строго положительна и непрерывна, а M локально ограничена.

($\mathcal{B}2$) Существует $l>0$ такое, что

$$\|\psi(0)\|_E\le l\|\psi\|_B$$

для всех $\psi\in\mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty,0]$ в E с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ ([4], Предложение 1.2.1). Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие.

($\mathcal{BC}1$) Если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно (т.е. равномерно на каждом компактном подмножестве $(-\infty,0]$), то $\psi\in\mathcal{B}$ и

$$\lim_{n\to+\infty}\|\psi_n-\psi\|_B=0.$$

Из условия ($\mathcal{BC}1$) вытекает, что банахово пространство $BC=BC((-\infty,0];E)$ ограниченных непрерывных функций непрерывно вложено в $\mathcal{B}$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2 *([4], Предложение 7.1.1).*

(i) $BC\subset\overline{C_{00}}$, где $\overline{C_{00}}$ обозначает замыкание C_{00} в $\mathcal{B}$;

(ii) если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}$ в BC сходится к функции ψ компактно на $(-\infty,0]$, то $\psi\in\mathcal{B}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\psi_n-\psi\|_{\mathcal{B}}=0$;

(iii) найдется константа $L>0$ такая, что $\|\psi\|_B\le L\|\psi\|_{BC}$ для всех $\psi\in BC$.

Наконец, будем предполагать выполненным следующее условие.

($\mathcal{BC}2$) Если $\psi\in BC$ и $\|\psi\|_{BC}\ne0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}}\ne0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство BC наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ является нормированным пространством. Мы будем обозначать его $\mathcal{BC}$.

Рассмотрим следующие примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеуказанным условиям.

(1) Для $\gamma>0$ пусть $B=C_\gamma$ — пространство непрерывных функций $\varphi:(-\infty;0]\to E$, имеющих предел $\lim\limits_{\theta\to-\infty}e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)$ и

$$\|\varphi\|_B=\sup_{-\infty<\theta\le0}e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\|.$$

(9) (Пространства с «затухающей памятью»). Пусть $\mathcal{B}=C_\rho$ — пространство функций $\varphi:(-\infty;0]\to E$ таких, что

a) φ непрерывна на $[-r;0]$, $r>0$;

b) φ измерима по Лебегу на $(-\infty;r)$ и найдется положительная интегрируемая по Лебегу функция $\rho:(-\infty;-r)\to\mathbb{R}^+$ такая, что функция $\rho\varphi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty;r)$; более того, найдется локально ограниченная функция $P:(-\infty;0]\to\mathbb{R}^+$ такая, что для всех $\xi\le0$, $\rho(\xi+\theta)\le P(\xi)\rho(\theta)$ для п.в. $\theta\in(-\infty;-r)$. Тогда

$$\|\varphi\|_B=\sup_{-r\le\theta\le0}\|\varphi(\theta)\|+\int_{-\infty}^{-r}\rho(\theta)\|\varphi(\theta)\|d\theta.$$

Простой пример такого пространства получается, если положить $\rho(\theta)=e^{\mu\theta},\ \mu\in\mathbb{R}$.

2. ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{B}$ — фазовое пространство и $T>0$.

Рассмотрим следующую общую граничную задачу для полулинейного функционально-дифференциального включения с бесконечным запаздыванием:

$$x'(t)\in Ax(t)+F(t,x_t),\ \ t\ge0, \tag{1}$$

$$\mathcal{Q}x\in\mathcal{S}x, \tag{2}$$

при следующих предположениях.

(A) Линейный оператор $A:D(A)\subseteq E\to E$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы ограниченных линейных операторов $\exp\{tA\}$.

Мультиотображение $F:[0,T]\times\mathcal{B}\to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) для любого $\psi\in\mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot,\psi):[0;T]\to Kv(E)$ обладает измеримым сечением;

(F2) для п.в. $t\in[0;T]$ мультиотображение $F(t,\cdot):\mathcal{BC}\to Kv(E)$ п.н.с.;

(F5) для любого непустого ограниченного множества $\Omega\subset\mathcal{BC}$ найдется функция $\alpha_\Omega\in L^1_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,\psi)\|_E := \sup\{\|z\|_E : z \in F(t,\psi)\} \le \alpha_\Omega(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\psi \in \Omega$;

(F4) существует функция $k \in L^1_+[0,T]$ такая, что для каждого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{BC}$ выполнено

$$\chi(F(t,\Omega)) \le k(t)\varphi(\Omega)$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где χ — МНК Хаусдорфа в E и $\varphi(\Omega)$ — модуль послойной некомпактности множества Ω.

Обозначим символом $C((-\infty;T];E)$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x:(-\infty;T] \to E$, наделенное нормой

$$\|x\|_C = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \|x\,|_{[0;T]}\|_C,$$

где последняя норма — обычная $\sup$-норма пространства $C([0;T];E)$.

Для операторов из граничного условия (2) мы будем предполагать выполненными следующие требования:

($\mathcal{Q}$) $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to \mathcal{BC}$ — линейный ограниченный оператор;

($\mathcal{S}$) мультиотображение $\mathcal{S}$: $\mathcal{C}((-\infty;T];E) \to Cv(\mathcal{BC})$ вполне непрерывно, т.е. является п.н.с. и переводит ограниченные множества в относительно компактные.

Из условий (F1)—(F3) и ($\mathcal{B}$1) вытекает, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to P(L^1([0,T];E))$, заданный как

$$\mathcal{P}_F(x) = \{f \in L^1([1,T];E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ п.в. } t \in [0,T]\}$$

корректно определен (см., например, [15], [5]).

Определение 2.1. Функция $x \in C((-\infty;T];E)$ называется ослабленным решением задачи (1)—(2) (ср. [17]), если

$$\mathcal{Q}x \in \mathcal{S}x;$$

$$x(t) = \exp\{tA\}x(0) + \int_0^t \exp\{(t-s)A\}f(s)ds,$$

$$t \in [0;T], \text{ где } f \in \mathcal{P}_F(x).$$

Определение 2.2. Линейный оператор $G : L^1([0,T];E) \to C((-\infty;T];E)$, заданный как

$$Gf(t) = \begin{cases} \int_0^t \exp\{(t-s)A\}f(s)ds, & t \in [0;T]; \\ 0, \ t \in (-\infty;0] \end{cases}$$

называется оператором Коши.

Следуя [5], можно убедиться в том, что оператор Коши обладает следующими свойствами.

Теорема 2.1. *Для любой полукомпактной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $L^1([0,T];E)$ последовательность $\{Gf_n\}_{n=1}^\infty$ относительно компактна в пространстве $\mathcal{C}((-\infty,T];E)$.*

Теорема 2.2. *Композиция $G \circ \mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to Kv(\mathcal{C}((-\infty,T];E))$ — п.н.с. мультиотображение с выпуклыми компактными значениями.*

Обозначим $\mathcal{C}_0$ подпространство $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$, состоящее из функций вида

$$x(t) = \exp\{tA\}x(0), \ t \in [0,T]$$

и обозначим $\mathcal{Q}_0$ сужение $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{C}_0$.

Основным требованием на граничные операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ будет следующее условие.

($\mathcal{QS}$) Существует непрерывный линейный оператор $\Lambda : \mathcal{BC} \to \mathcal{C}_0$ такой, что $(I - \mathcal{Q}_0\Lambda)(y - \mathcal{Q}Gf) = 0$ для каждых $x \in \mathcal{C}((-\infty,T];E)$, $y \in \mathcal{S}(x)$ и $f \in \mathcal{P}_F(x)$.

Для того, чтобы привести пример выполнения условия ($\mathcal{QS}$), рассмотрим линейный оператор $r : \mathcal{BC} \to \mathcal{C}_0$, определенный следующим образом:

$$(r\psi)(t) = \begin{cases} \psi(t), \ t \in (-\infty,0]; \\ \exp\{tA\}\psi(0), \ t \in [0;T]. \end{cases}$$

Отметим, что из условия ($\mathcal{B}$2) вытекает, что оператор r непрерывен.

Предположим, что

($\tilde{\mathcal{Q}}$) Линейный непрерывный оператор $\tilde{\mathcal{Q}} : \mathcal{BC} \to \mathcal{BC}$, определенный как $\tilde{\mathcal{Q}}\psi = \mathcal{Q}(r\psi)$, обладает непрерывным обратным $\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}$.

Нетрудно видеть, что при условии ($\tilde{\mathcal{Q}}$) оператор Λ может быть задан следующим образом:

$$\Lambda\psi = r[\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}(\psi)]. \tag{3}$$

В предположении, что выполнено условие ($\mathcal{QS}$), рассмотрим мультиоператор

$$\Gamma : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to Kv(\mathcal{C}((-\infty;T];E)),$$

заданный следующим образом:

$$\Gamma(x) = \Lambda\mathcal{S}(x) + (I - \Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}_F(x).$$

Из теоремы 2.2 и условий, наложенных на операторы $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$ и Λ вытекает, что мультиоператор Γ п.н.с. и имеет выпуклые компактные значения. Нетрудно проверить, что мультиоператор Γ ограничен, т.е. переводит ограниченные множества в ограниченные. Опишем его дальнейшие свойства.

Теорема 2.3. *Неподвижные точки мультиоператора* Γ *являются ослабленными решениями задачи* (1)—(2).

Доказательство: Пусть $x \in \Gamma(x)$. Это означает, что найдутся $y \in \mathcal{S}(x)$, $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такие, что $x = \Lambda y + (I - \Lambda \mathcal{Q})Gf$.

Поскольку функция x может быть представлена в виде

$$x = \Lambda(y - \mathcal{Q}Gf) + Gf,$$

мы получаем, что x удовлетворяет интегральному уравнению из определения 2.1.

Проверим выполнение граничного условия. Используя условие $(\mathcal{QS})$, получаем

$$\mathcal{Q}x = \mathcal{Q}_0\Lambda y + \mathcal{Q}(I - \Lambda\mathcal{Q})Gf =$$

$$= y - (y - \mathcal{Q}_0\Lambda y) + \mathcal{Q}Gf + \mathcal{Q}_0\Lambda\mathcal{Q}Gf =$$

$$= y - (I - \mathcal{Q}_0\Lambda)(y - \mathcal{Q}Gf) = y \in \mathcal{S}x.$$

■

Рассмотрим МНК ν на пространстве $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$:

$$\nu(\Omega) = (\varphi_C(\Omega), \mathrm{mod}_C(\Omega)),$$

где φ_C — модуль послойной некомпактности в пространстве $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$.

Отметим, что

$$\varphi_C(\Omega) = \sup_{0\le t\le T}\varphi_{BC}(\Omega_t),$$

где $\Omega_t \subset BC$, $\Omega_t = \{x_t : x \in \Omega\}$ и для $t \in [0,T]$:

$$\varphi_{BC}(\Omega_t) = \sup_{-\infty\le\tau\le 0}\chi(\Omega_t(\tau)) =$$

$$= \sup_{-\infty\le\tau\le 0}\chi(\Omega(t+\tau)) = \sup_{-\infty\le\tau\le t}\chi(\Omega(\tau)),$$

где χ — МНК Хаусдорфа в E.

Обозначим $\tilde{\mathcal{C}}$ подпространство $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$, состоящее из функций, равных нулю на $(-\infty;0]$. Ясно, что $\tilde{\mathcal{C}}$ изоморфно пространству $\mathcal{C}([0,T];E)$.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(H1) найдется $b \ge 0$ *такое, что для любого ограниченного множества* $\Omega \subset \tilde{\mathcal{C}}$ *выполнено*

$$\varphi_{BC}(\mathcal{Q}\Omega) \le b\varphi_C(\Omega);$$

(H2) для любой относительно компактной последовательности $\{y_n\} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ *последовательность* $\{\Lambda\mathcal{Q}y_n\}$ *равностепенно непрерывна;*

(H3) найдется функция $h \in L^1_+([0,T])$ *такая, что*

$$\|\exp\{tA\}\|^{(\chi)} \le h(t);$$

(H4) $(1 + \|\Lambda\|^{(\varphi_{BC},\varphi_C)}\, b)\sup_{0\le t\le T}\int_0^t h(t-s)k(s)ds = \mu < 1,$

где $k(\cdot)$ *— функция из условия (F4).*

Тогда мультиоператор Γ *является* ν*-уплотняющим на ограниченных подмножествах пространства* $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$.

Доказательство. Пусть Ω — ограниченное подмножество $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$, для которого выполнено

$$\nu(\Gamma\Omega) \ge \nu(\Omega).$$

Покажем, что множество Ω относительно компактно.

Из вышеуказанного неравенства вытекает, что

$$\varphi_C(\Gamma\Omega) \ge \varphi_C(\Omega).$$

Возьмем произвольные $t \in [0;T]$ и $\tau \in [-\infty, t]$ и оценим $\chi(\Gamma\Omega(\tau))$. Поскольку множество $\Lambda\mathcal{S}(\Omega)$ относительно компактно, достаточно оценить величину

$$\chi((I - \Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}_F(\Omega)(\tau)).$$

Получаем

$$\chi(\Lambda\mathcal{Q}G\mathcal{P}_F(\Omega)(\tau)) \le \varphi_C(\Lambda\mathcal{Q}G\mathcal{P}_F(\Omega)) \le$$

$$\le \|\Lambda\|^{(\varphi_{BC},\varphi_C)}\,\varphi_{BC}(\mathcal{Q}G\mathcal{P}_F(\Omega)) \le$$

$$\le \|\Lambda\|^{(\varphi_{BC},\varphi_C)}\, b\varphi_C(G\mathcal{P}_F(\Omega)) =$$

$$= \|\Lambda\|^{(\varphi_{BC},\varphi_C)}\, b\sup_{0\le t\le T}\chi(G\mathcal{P}_F(\Omega)(t)).$$

Для оценки $\chi(GP_F(\Omega)(t))$ отметим, что для $0 \le s \le t$ имеем

$$\chi(\exp\{(t-s)A\}F(s,\Omega_s)) \le$$

$$\le \|\exp\{(t-s)A\}\|^{(\chi)}\,\chi(F(s,\Omega_s)) \le$$

$$\le h(t-s)k(s)\varphi_{BC}(\Omega_s) \le h(t-s)k(s)\varphi_C(\Omega).$$

Тогда по теореме о χ-оценке многозначного интеграла (см. [5], Теорема 4.2.3) получаем

$$\chi(G\mathcal{P}_F(\Omega)(t)) \le \int_0^t h(t-s)k(s)ds\cdot\varphi_C(\Omega).$$

Применив теперь свойство алгебраической полуаддитивности МНК χ, имеем

$$\chi((I - \Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}_F\Omega(\tau)) \le (1 + \|\Lambda\|^{(\varphi_{BC},\varphi_C)}\, b)\times$$

$$\times\sup_{0\le t\le T}\int_0^t h(t-s)k(s)ds\cdot\varphi_C(\Omega) = \mu\cdot\varphi_C(\Omega).$$

Тогда

$$\varphi_C(\Gamma\Omega) = \sup_{0\le t\le T}\sup_{-\infty\le\tau\le t}\chi(\Gamma\Omega(\tau)) \le \mu\cdot\varphi_C(\Omega).$$

Мы получаем

$$\varphi_C(\Omega) \le \varphi_C(\Gamma\Omega) \le \mu\cdot\varphi_C(\Omega),$$

откуда

$$\varphi_C(\Omega) = 0. \qquad (4)$$

Покажем теперь, что множество Ω равностепенно непрерывно. Заметим, что из соотношения

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) \le \mathrm{mod}_C(\Gamma\Omega)$$

вытекает, что достаточно доказать равностепенную непрерывность множества $\Gamma\Omega$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что каждая последовательность

$$\{g_n\} \subset (I - \Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}_F(\Omega)$$

равностепенно непрерывна. Для произвольной такой последовательности $\{g_n\}$ рассмотрим последовательности $\{x_n\} \subset \Omega$ и $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{P}_F(x_n)$ такие, что

$$g_n = (I - \Lambda\mathcal{Q})Gf_n, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Из условия (F3) следует, что последовательность функций $\{f_n\}$ интегрально ограничена. Из (4) вытекает, что для последовательности $\{x_n\}$ выполнено соотношение

$$\chi(\{x_n(t)\}) = 0, \ \ \forall t \in [0, T]$$

и тогда из условия $(F4)$ получаем, что

$$\chi(\{f_n(t)\}) = 0 \text{ п.в. } t \in [0, T],$$

т.е. последовательность $\{f_n\}$ полукомпактна. Из теоремы 2.1 следует, что последовательность $\{Gf_n\} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ относительно компактна и, следовательно, равностепенно непрерывна. Применяя условие (H2), получаем, что последовательность $\{g_n\}$ равностепенно непрерывна.

Из теоремы Арцела—Асколи (см., например, [18]) вытекает, что множество Ω относительно компактно в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах $(-\infty; 0]$. Но тогда из теоремы 1.2 следует, что множество Ω относительно компактно и в пространстве $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$. ■

Установленные свойства мультиоператора Γ дают возможность применять для его исследования теорию топологической степени. Мы можем сформулировать следующий общий принцип существования ослабленных решений задачи (1)—(2).

Теорема 2.5 *При указанных выше условиях, пусть ограниченное множество* $\Omega \subset \mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ *не имеет ослабленных решений задачи* (1)—(2) *на своей границе* $\partial\Omega$ *и пусть* $\deg(i - \Gamma, \overline{\Omega}) \ne 0$. *Тогда множество ослабленных решений задачи* (1)—(2), *содержащихся в* Ω, *не пусто.*

В качестве примера применения этого принципа рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 2.6 *При указанных выше условиях предположим дополнительно, что*

(H5) найдется последовательность функций $\omega_n \in L^1_+[0; T]$, $n = 1, 2, \ldots$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^T \omega_n(t)dt = 0;$$

и

$$\sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \le n} \|F(t, \varphi)\| \le \omega_n(t) \ \ 4; \mathrm{O?.2.} \ \ t \in [0; T],$$

(H6) выполнено следующее асимптотическое условие

$$\liminf_{\|x\|_{\mathcal{C}} \to \infty} \frac{\|\mathcal{S}(x)\|_{\mathcal{B}}}{\|x\|_{\mathcal{C}}} = 0.$$

Тогда множество ослабленных решений задачи (1)—(2) не пусто.

Доказательство. Покажем, что найдется замкнутый шар $B_r \subset \mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ такой, что $\Gamma(B_r) \subseteq B_r$.

В предположении противного, используя ограниченность мультиоператора Γ, мы можем найти последовательность натуральных чисел $q_n \to \infty$ и последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ в $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ такие, что $y_n \in \Gamma(x_n)$, $\|x_n\|_{\mathcal{C}} \le q_n$, $\|y_n\|_{\mathcal{C}} > q_n$ и $\|x_n\|_{\mathcal{C}} \to \infty$.

Тогда мы получаем

$$\|y_n\|_C \le \|\Lambda\mathcal{S}x_n\|_{\mathcal{C}} + \|Gf_n\|_{\mathcal{C}} + \|\Lambda\mathcal{Q}Gf_n\|_{\mathcal{C}} \le$$

$$\le \|\Lambda\| \|\mathcal{S}x_n\|_{\mathcal{B}} + (1 + \|\Lambda\mathcal{Q}\|) \|Gf_n\|_{\mathcal{C}([0,T]; E)},$$

где $f_n \in \mathcal{P}_F(x_n)$. Поскольку $\exp\{tA\}$ — сильно непрерывная полугруппа, мы имеем оценку

$$\|\exp\{tA\}\| \le Me^{\gamma t}, \ \ t \ge 0$$

для некоторых констант $M \ge 1$, $\gamma \ge 0$.

Тогда

$$\|y_n\|_{\mathcal{C}} \le \|\Lambda\| \|\mathcal{S}x_n\|_{\mathcal{B}} + Me^{\gamma T}(1 + \|\Lambda\mathcal{S}\|) \int_0^T \|f_n(s)\| ds.$$

Отсюда получаем

$$1 < \frac{\|y_n\|_{\mathcal{C}}}{q_n} \le \|\Lambda\| \frac{\|\mathcal{S}x_n\|_{B}}{q_n} +$$

$$+ Me^{wT}(1 + \|\Lambda\mathcal{S}\|) \frac{1}{q_n} \int_0^T \|f_n(s)\| ds \le$$

$$\le \|\Lambda\| \frac{\|\mathcal{S}x_n\|_{\mathcal{B}}}{\|x_n\|_{\mathcal{C}}} + Me^{wT}(1 + \|\Lambda\mathcal{S}\|) \frac{1}{q_n} \int_0^T \|f_n(s)\| ds,$$

что противоречит предположениям (H5) и (H6).

Нам остается лишь применить теорему о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, Теорему 1.2.70 [6] или следствие 3.3.1 [5]). ■

3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

1. Случай выполнения условия $(\tilde{\mathcal{Q}})$**.** Нетрудно видеть, что $(\varphi_{\mathcal{BC}},\varphi_{\mathcal{C}})$-норма оператора r допускает следующую оценку:

$$\|r\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}},\varphi_{\mathcal{C}})} \le R = \max\{1, \sup_{0\le t\le T} h(t)\}.$$

Тогда для $(\varphi_{\mathcal{BC}},\varphi_{\mathcal{C}})$-нормы оператора Λ получаем оценку

$$\|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}},\varphi_{\mathcal{C}})} \le R\left\|\tilde{\mathcal{B}}^{-1}\right\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}})}.$$

Это означает, что в данном случае условие (H4) имеет вид

$$(\mathrm{H4}')\ \left(1+R\left\|\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}\right\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}})} b\right)\sup_{0\le t\le T}\int_0^t h(t-s)k(s)ds < 1.$$

2. Задача Коши. В этом случае граничное условие может быть записано в следующем виде:

$$\mathcal{Q}x = u, \tag{5}$$

где $\mathcal{Q}x = x_0$, $u \in \mathcal{BC}$ — заданная функция. Тогда, очевидно, $\mathcal{S}x \equiv u$, $b = 0$. Для любой последовательности $\{y_n\} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ последовательность $\{\Lambda\mathcal{Q}y_n\}$ постоянна и равна нулю, так что условие (H2) выполнено. Далее, оператор $\tilde{\mathcal{Q}}$ — тождественный и условие (H4) приобретает следующий вид:

$$(\mathrm{H4}'')\qquad \sup_{0\le t\le T}\int_0^t h(t-s)k(s)ds < 1.$$

Из теоремы 2.6 мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1 *При условиях* (A), (F1), (F2), (F4), (H3), (H4″) *и* (H5) *существует ослабленное решение задачи Коши* (1), (5).

2. Периодическая задача. Рассмотрим граничное условие

$$\mathcal{Q}x = 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{Q}x = x_T - x_0$. Заметим, что из условия $(\mathcal{B}1(iii))$ вытекает, что $\mathcal{Q}$ — непрерывный линейный оператор.

Будем предполагать выполненным следующее условие:

(A1) линейный оператор $\exp\{TA\} - I$ обратим.

В данной задаче, учитывая, что $\mathcal{S}x \equiv 0$, достаточно построить оператор Λ на подпространстве $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{BC}$ исходя из формулы (3). Заметим, что подпространство $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$ в нашем случае состоит из непрерывных функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$, равных нулю на $(-\infty, -T]$. Достаточно естественно предполагать, что $(\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}})$ любое множество $\Psi \subset \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$, ограниченное относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, равномерно ограничено.

Пусть теперь $\psi \in \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$ — заданная функция, найдем функцию $\xi \in \mathcal{BC}$ такую, что $\tilde{\mathcal{Q}}\xi = \psi$, где, как и прежде, $\tilde{\mathcal{Q}}\xi = \mathcal{Q}(r\xi)$. Имеем

$$(r\xi)_T - (r\xi)_0 = (r\xi)_T - \xi = \psi, \tag{7}$$

откуда

$$\xi(0) = (\exp\{TA\} - I)^{-1}\psi(0),$$

и далее для $\theta \in [-T, 0]$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \exp\{(T+\theta)A\}\xi(0) - \psi(\theta) = \\ &= \exp\{(T+\theta)A\}(\exp\{TA\} - I)^{-1}\psi(0) - \psi(\theta). \end{aligned} \tag{8}$$

Если же теперь $\theta < -T$, то из (7) получаем

$$(r\xi)_T(\theta) - \xi(\theta) = \xi(T+\theta) - \xi(\theta) = 0,$$

то есть функция ξ является T-периодической на $(-\infty, 0]$ и ее значения полностью определяются формулой (8). Таким образом мы построили оператор, обратный к $\tilde{\mathcal{Q}}$ на $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$.

Далее, пусть некоторое множество функций $\Psi \subset \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$ ограничено относительно $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Тогда, применяя свойство $(\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}})$, мы видим из формулы (8), что соответствующее семейство функций $\Xi = \{\xi = \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}\psi : \psi \in \Psi\}$ равномерно ограничено на $(-\infty, 0]$, а значит, по теореме 1.2 (iii) ограничено и в пространстве $\mathcal{BC}$. Это означает, что оператор $\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}$ непрерывен на $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$.

Оператор Λ на $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$ может быть задан в явном виде:

$$(\Lambda\psi)(t) = \begin{cases} [\exp\{(T+t)A\}(\exp\{TA\} - I)^{-1}\psi(0) - \psi(t)]_T, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in [-\infty, 0]; \\ \exp\{tA\}(\exp\{TA\} - I)^{-1}\psi(0), \quad t \in [0; T], \end{cases}$$

где $[\cdot]_T$ обозначает T-периодическое продолжение на $[-\infty, 0]$ функции, заданной на $[-T, 0]$.

Нетрудно видеть, что условие (H1) в нашем случае выполнено с константой $b = 1$.

Пусть, далее, $\{y_n\} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ — относительно компактная последовательность, тогда последовательность $\{\psi_n\} \subset \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$, $\psi_n = \mathcal{Q}y_n = (y_n)_T$, равностепенно непрерывна и $\{\psi_n(0)\}$ — относительно компактное подмножество E. Но тогда из задания оператора Λ видно, что и последовательность $\{\Lambda\psi_n\}$ равностепенно непрерывна, что означает выполнение условия (H2).

Отметим теперь, что $(\varphi_{\mathcal{BC}})$-норма оператора $\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}$ на $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$ может быть оценена следующим образом:

$$\left\|\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}\right\|^{(\varphi_{BC})} \le \sup_{0\le t\le T} h(t)\cdot\left\|(\exp\{TA\}-I)^{-1}\right\|^{(\chi)}+1.$$

Тогда условие (H4′) может быть записано в виде

$$(\mathrm{H4}''')\quad \left[1+R\left(\sup_{0\le t\le T} h(t)\cdot\left\|(\exp\{TA\}-I)^{-1}\right\|^{(\chi)}+1\right)\right]\times \times\sup_{0\le t\le T}\int_0^t h(t-s)k(s)ds<1.$$

Мультиоператор Γ в случае периодической задачи имеет вид

$$\Gamma(x)=(I-\Lambda\mathcal{Q})GP_F(x).$$

Для его задания в явном виде заметим, что для $f\in P_F(x)$ имеем

$$(\mathcal{Q}Gf)(t)=\int_0^{T+t}\exp\{(T+t-s)A\}f(s)ds,$$

$$t\in[-T,0].$$

Таким образом $\Gamma(x)$ состоит из всех функций $y\in\mathcal{C}((-\infty;T];E)$, которые для $f\in\mathcal{P}_F(x)$ при $t\in[-\infty,0]$ имеют вид

$$y(t)=\left[\int_0^{T+t}\exp\{(T+t-s)A\}f(s)ds-\right.$$
$$-\exp\{(T+t)A\}(\exp\{TA\}-I)^{-1}\times$$
$$\left.\times\int_0^T\exp\{(T-s)A\}f(s)ds\right]_T,$$

а при $t\in[0,T]$:

$$y(t)=\int_0^t\exp\{(t-s)A\}f(s)ds-\exp\{tA\}\times$$
$$\times(\exp\{TA\}-I)^{-1}\int_0^T\exp\{(T-s)A\}f(s)ds$$

(ср. [19, 5]).

Применение теоремы 2.6 дает следующее утверждение.

Теорема 3.2. *При выполнении условий* (A), (A1), (F1), (F2), (F4), (H3), (H4′′′), (H5) *и* ($\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{C}}$) *периодическая задача* (1), (6) *имеет ослабленное решение.*

В заключение заметим, что применение техники непрерывных сечений интегрального мультиоператора (см., например, [15, 5]) позволяет получить аналогичные результаты для случая когда многозначная нелинейность $F:[0,T]\times B\to K(E)$ (с невыпуклыми значениями) удовлетворяет вместо условий (F1), (F2) условию почти полунепрерывности снизу

(F_L) существует последовательность непересекающихся компактных подмножеств $\{I_n\}$, $I_n\subset[0,T]$ такая, что: а) множество $[0,T]\setminus\cup_n I_n$ имеет нулевую меру Лебега и б) сужение F на каждое множество $J_n=I_n\times\mathcal{B}$ полунепрерывно снизу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gori C., Obukhovskii V., Ragni M., Rubbioni P.* Existence and continuous dependence results for semilinear functional differential inclutions with infinite delay, Nonlinear Anal. 51 (2002), P. 765—782.

2. *Gori C., Obukhovskii V., Ragni M., Rubbioni P.* On some properties of semilinear functional differential inclusions in abstract spaces. J. Concr. Appl. Math. 4 (2006), № 2, P. 183—214.

3. *Hale J.K., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay, Funkc. Ekvac. 21 (1978), P. 11—41.

4. *Hito Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

5. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

6. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений, Успехи мат. наук 35 (1980), Вып. 1, С. 59—126.

7. *Басова М.М., Обуховский В.В.* О некоторых краевых задачах для функционально-дифференциальных включений в банаховых пространствах. Соврем. математика. Фундаментальные направления, 15 (2006), С. 36—44.

8. *Ding Z., Kartsatos A.G.* Nonresonance problems for differential inclusions in separable Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), P. 2357—2365.

9. *Kravvaritis D., Papageorgiou N.S.* A boundary value problem for a class of evolution inclusions. Comment. Math. Univ. St. Paul. 40 (1991), P. 29—37.

10. *Marino G.* Nonlinear boundary value problems for multivalued differential equations in Banach spaces. Nonlinear Anal. 14 (1990), P. 545—558.

11. *Obukhovskii V., Zecca P.* On boundary value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces, Abstract and Appl. Anal. 13 (2003), P. 769—784.

12. *Papageorgiou N.S.* Boundary value problems for evolution inclusions. Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), P. 355—363.

13. *Papageorgiou N.S.* Boundary value problems and periodic solutions for semilinear evolution inclusions. Comment. Math. Univ. Carolin. 35 (1994), P. 325—336.

14. *Zecca P., Zezza P.L.* Nonlinear boundary value problems in Banach spaces for multivalue differential

equations on a noncompact interval. Nonlinear Anal. 3 (1979), P. 347—352.

15. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, КомКнига, Москва, 2005.

16. *Садовский Б.Н.* Предельно компактные и уплотняющие операторы, Успехи мат. наук 27(1972), Вып. 1, С. 81—146.

17. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Наука, М., 1967.

18. *Келли Дж.* Общая топология, 2-е изд., Наука, М., 1981.

19. *Kamenskii M., Obukhovskii V.* Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces, Nonlinear Anal. 20 (1993), P. 781—792.

Поступила в редакцию 20.11.2006