УДК 515.126.4

О ПРИМЕНЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ К ИЗУЧЕНИЮ СТРУКТУРЫ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ВКЛЮЧЕНИЙ

Е. С. Барановский

Воронежский государственный университет

Настоящая работа посвящена изучению включений вида $A(x) \in G(x)$, где A — деминепрерывный оператор, удовлетворяющий условию α И. В. Скрыпника, G — компактное многозначное отображение аппроксимируемого типа. Эффективным средством решения задач такого рода является использование топологических характеристик. В данной статье исследуются свойства множества решений.

Необходимость изучения включений с различными классами операторов возникает при исследовании многих задач теории дифференциальных уравнений и теории оптимального управления.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются свойства множества решений включений, содержащих операторы класса α (см. [1]) и компактные многозначные отображения аппроксимируемого типа. В работе доказываются некоторые теоремы о разрешимости включений данного типа, а также приводятся условия, при которых множество решений является компактным и связным.

Необходимость изучения включений с различными классами операторов возникает при исследовании многих задач теории дифференциальных уравнений и теории оптимального управления (см., например, [2]). Одним из средств решения задач подобного рода является использование топологических инвариантов типа степени для многозначных возмущений различных классов.

В данной статье используется топологическая степень компактных $\mathcal{CJ}$-возмущений отображений, удовлетворяющих условию α. Конструкция этой характеристики предложена в работе [3].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть X — действительное рефлексивное банахово пространство, X^* — его сопряженное. Обозначим сильную и слабую сходимости соответственно через $\to$ и $\rightharpoonup$. Для произвольных элементов $x \in X$ и $h \in X^*$ через $\langle h, x\rangle$ обозначим действие функционала h на элементе x.

Рассмотрим отображение $A : \bar{D} \to X^*$, где D — произвольное ограниченное открытое множество пространства X, а $\bar{D}$ — его замыкание.

Определение 1. *Оператор A называется деминепрерывным на $\bar{D}$, если для любой последовательности $u_n \in \bar{D}$, сильно сходящейся к $u_0 \in \bar{D}$, имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\langle A(u_n), x\rangle = \langle A(u_0), x\rangle \text{ при всех } x \in X,$$

то есть $A(u_n) \rightharpoonup A(u_0)$.

Определение 2 (см. [1]). *Будем говорить, что оператор A удовлетворяет условию $\alpha(F)$, где $F \subset \bar{D}$, если для произвольной последовательности $\{u_n\} \subset F$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(u_n), u_n - u_0\rangle \le 0 \text{ следует } u_n \to u_0.$$

Рассмотренный в определении 2 класс операторов представляет собой разновидность так называемых обобщенных монотонных отображений. Топологические характеристики для некоторых видов таких отображений (в том числе и для отображений, удовлетворяющих условиям α и α_0) введены и подробно изучены И. В. Скрыпником в монографии [1].

Приведем теперь определение одного класса многозначных отображений, обозначаемого символом $\mathcal{CJ}$. Но сначала напомним некоторые понятия и факты (см. [2, 4, 5]).

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Z}$ — метрические пространства. *Многозначное отображение (мультиотображение)* $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ — это такое соответствие, которое сопоставляет каждой точке $x \in \mathcal{X}$ непустое подмножество $\Sigma(x) \subset \mathcal{Z}$. Если для любого $x \in \mathcal{X}$ множество $\Sigma(x)$ является компактным, то говорят, что Σ имеет компактные значения. В настоящей статье рассматриваются только такие многозначные отображения.

Определение 3. *Многозначное отображение $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ называется полунепрерывным сверху, если для каждого открытого множества $V \subset \mathcal{Z}$ множество $\Sigma_+^{-1}(V) = \{x \in \mathcal{X} : \Sigma(x) \subset V\}$ открыто в $\mathcal{X}$.*

Определение 4. *Непустое компактное подмножество M метрического пространства Z называется асферичным (или ∞-близостно связным), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ, $0 < \delta < \varepsilon$, такое, что для каждого $n = 0,1,\ldots$ любое непрерывное отображение $g : S^n \to O_\delta(M)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{g} : B^{n+1} \to O_\varepsilon(M)$, где S^n, B^{n+1} — единичные сфера и шар в $\mathbb{R}^{n+1}$; $O_\delta(M)$, $O_\varepsilon(M)$ обозначают соответствующие окрестности множества M.*

Определение 5. *Полунепрерывное сверху многозначное отображение $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ называется J-мультиотображением $(\Sigma \in J(\mathcal{X}, \mathcal{Z}))$, если каждое значение $\Sigma(x)$, $x \in \mathcal{X}$, — асферичное множество.*

Наконец, символом $\mathcal{C}J(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$, мы будем обозначать совокупность всех мультиотображений $G : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ вида $G = \varphi \circ \Sigma$, где $\Sigma \in J(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ для некоторого метрического пространства $\mathcal{Z}$, $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}'$ — непрерывное однозначное отображение.

Покажем насколько широк класс $\mathcal{C}J$-мультиотображений. Для этого отметим следующие топологические понятия и факты.

Определение 6. (см. [6]). *Метрическое пространство $\mathcal{Z}$ называется ANR-пространством, если для всякого замкнутого подмножества B произвольного метрического пространства $\mathcal{X}$ любое непрерывное отображение $f : B \to \mathcal{Z}$ допускает непрерывное продолжение $\tilde{f} : U \to \mathcal{Z}$ на некоторую окрестность U множества B в пространстве $\mathcal{X}$.*

Лемма 1. (см. [6]). *Конечномерный компакт является ANR-пространством тогда и только тогда, когда он локально стягиваем.*

Определение 7. *Непустое компактное множество S называется R_δ-множеством, если его можно представить как пересечение убывающей последовательности стягиваемых компактных подмножеств.*

Лемма 2. (см.[5]). *Пусть $\mathcal{Z}$ — ANR-пространство. Тогда полунепрерывное сверху мультиотображение $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ является J-отображением в каждом из следующих случаев:*

для любого $x \in \mathcal{X}$ множество $\Sigma(x)$ является

a) выпуклым множеством;

b) стягиваемым множеством;

c) R_δ-множеством.

В частности, любое непрерывное однозначное отображение $\varrho : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ является J-отображением.

В дальнейшем нам потребуется понятие однозначной непрерывной аппроксимации мультиотображения.

Пусть $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ — многозначное отображение.

Определение 8. *Непрерывное отображение $\sigma_\varepsilon : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, $\varepsilon > 0$, называется ε-аппроксимацией Σ, если для каждого $x \in \mathcal{X}$ существует $x' \in O_\varepsilon(x)$ такое, что $\sigma_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon(\Sigma(x'))$. Очевидно, что это эквивалентно тому, что $\sigma_\varepsilon(x) \in \in O_\varepsilon(\Sigma(O_\varepsilon(x)))$ или тому, что $\Gamma_{\sigma_\varepsilon} \subset O_\varepsilon(\Gamma_\Sigma)$, где $\Gamma_{\sigma_\varepsilon}$, Γ_Σ обозначают графики σ_ε и Σ соответственно. При этом метрика в $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ определяется естественным путем как $d((x,z),(x',z')) = \max\{d_X(x,x'), d_Z(z,z')\}$.*

Совокупность всех ε-аппроксимаций мультиотображения Σ обозначим символом $a(\Sigma, \varepsilon)$.

Просуммируем необходимые нам свойства ε-аппроксимаций в следующих утверждениях.

Лемма 3.(см. [4]) *Пусть $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ полунепрерывное сверху мультиотображение.*

I) *Пусть $\mathcal{X}_1$ — компактное подмножество $\mathcal{X}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$, то $\sigma|_{\mathcal{X}_1} \in a(\Sigma|_{\mathcal{X}_1}, \varepsilon)$;*

II) *Пусть $\mathcal{X}$ — компакт, $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}'$ — непрерывное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$ следует, что $\varphi \circ \sigma \in a(\varphi \circ \Sigma, \varepsilon)$;*

III) *Пусть $\mathcal{X}$ — компакт, $\Sigma_* : \mathcal{X} \times [0,1] \to \mathcal{Z}$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда для каждого $\lambda \in [0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $\sigma_* \in a(\Sigma_*, \delta)$ следует, что $\sigma_*(\cdot, \lambda) \in a(\Sigma_*(\cdot, \lambda), \varepsilon)$.*

Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ — однозначное отображение, $G : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ — мультиотображение. Множество решений включения $f(x) \in G(x)$ обозначим символом

$$Coin(f, G) = \{x \in X : f(x) \in G(x)\}.$$

Лемма 4 (см. [7]). *Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}'$ — непрерывные отображения, $\Sigma : X \to Z$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Пусть X_1 — компактное подмножество $\mathcal{X}$ такое, что*

$$Coin(f, \varphi \circ \Sigma) \bigcap X_1 = \varnothing.$$

Тогда, если $\varepsilon > 0$ *достаточно малои* $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$, *то*

$$Coin(f, \varphi \circ \sigma_\varepsilon) \bigcap X_1 = \varnothing.$$

Следующее аппроксимационное свойство J-мультиотображений, восходящее к работе А. Д. Мышкиса [4], доказано в статье [8].

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{X}$ *— компактное ANR-пространство,* $\Sigma \in J(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$. *Тогда*

I) *мультиотображение* Σ *аппроксимируемо, т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$;

II) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta_0 > 0$ *такое, что для каждого* δ $(0 < \delta < \delta_0)$ *и для любых двух* δ*-аппроксимаций* σ_δ, $\sigma'_\delta \in a(\Sigma, \delta)$ *найдется непрерывное отображение* $\tilde{\sigma} : \mathcal{X} \times [0,1] \to \mathcal{Z}$ *такое, что*

a) $\tilde{\sigma}(\cdot, 0) = \sigma_\delta$, $\tilde{\sigma}(\cdot, 1) = \sigma'_\delta$;

b) $\tilde{\sigma}(\cdot, \lambda) \in a(\Sigma, \varepsilon)$ *для каждого* $\lambda \in [0,1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СТЕПЕНИ КОМПАКТНЫХ *CJ*-ВОЗМУЩЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ α

Указанная в заголовке топологическая характеристика представляет собой степень включений для так называемых компактных троек с операторами класса α. Опишем кратко схему построения данной степени (подробнее см. [3]).

Пусть X — действительное сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Обозначим через $\mathbb{E}(X)$ множество всех конечномерных подпространств X.

Пусть U — ограниченное открытое подмножество X такое, что для любого $E \in \mathbb{E}(X)$ множество $\overline{U \cap E}$ локально стягиваемо.

Пусть $A : \bar{U} \to X^*$, $G : \bar{U} \to X^*$, где $G = \varphi \circ \Sigma \in \mathcal{C}J(\bar{U}, X^*)$.

Определение 9. *Будем говорить, что* $(A, G, \bar{U})$ *является компактной тройкой с оператором класса* α, *если выполнены следующие условия:*

c1) A *— деминепрерывное отображение, удовлетворяющее условию* $\alpha(\bar{U})$,

c2) $G(\bar{U})$ *относительно компактно в* X^*,

c3) $Coin(A, G) \cap \partial U = \varnothing$.

Далее для краткости будем называть $(A, G, \bar{U})$ просто компактной тройкой.

Пусть E — конечномерное подпространство X с базисом $v_1, \ldots, v_m$. Определим $\pi_E : X^* \to E$ по правилу

$$\pi_E(h) = \sum_{i=1}^{m} \langle h, v_i \rangle v_i \text{ для } h \in X^*.$$

Всюду далее символ D_E, где D — некоторое подмножество X, $E \in \mathbb{E}(X)$, обозначает множество $D \cap E$.

Рассмотрим отображения

$$A_E : \bar{U}_E \to E,\ \varphi_E : Z \to E,\ G_E : \bar{U}_E \to E,$$

где $A_E = \pi_E \circ A,\ \varphi_E = \pi_E \circ \varphi,\ G_E = \varphi_E \circ \Sigma.$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $(A, G, \bar{U})$ *компактная тройка и множество* $P \subset \bar{U}$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

I) P *замкнуто,*

II) $Coin(A, G) \cap P = \varnothing$.

Тогда существует $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ *такое, что для любого* $E \supset E_0$, $E \in \mathbb{E}(X)$ *верно:*

$$Coin(A_E, G_E) \cap P_E = \varnothing. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $Z_{E_0}^{E}$ множество, состоящее из таких элементов $x \in P_E$, для которых найдется $g \in G(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$\langle A(x) - g, x \rangle \le 0 \text{ и } \langle A(x) - g, v \rangle = 0$$

$$\text{для любого } v \in E_0.$$

Покажем сначала, что существует подпространство $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такое, что при $E \supset E_0$, $E \in \mathbb{E}(X)$ множество $Z_{E_0}^{E}$ пусто. Предположим противное, то есть, что для любого $E \in \mathbb{E}(X)$ существует $E_1 \in \mathbb{E}(X)$, $E_1 \supset E$ такое, что $Z_E^{E_1} \neq \varnothing.$

Обозначим $T_E = \bigcup\limits_{E' \supset E} Z_E^{E'}$, $E' \in \mathbb{E}(X)$ и пусть $\bar{T}_E^{\text{сл.}}$ — слабое замыкание T_E.

Тогда система множеств $\{\bar{T}_E^{\text{сл.}}, E \in \mathbb{E}(X)\}$ центрирована. Действительно, возьмем произвольную конечную подсистему: $\bar{T}_{E_1}^{\text{сл.}}, \ldots, \bar{T}_{E_p}^{\text{сл.}}$. Рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_p) \in \mathbb{E}(X)$. По нашему предположению существует $\tilde{E} \in \mathbb{E}(X)$ такое, что $Z_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_p)}^{\tilde{E}} \neq \varnothing.$ Заметим, что $Z_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_p)}^{\tilde{E}} \subset Z_{E_j}^{\tilde{E}}$, $j = 1, \ldots, p.$

Поэтому $\varnothing \neq Z_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_p)}^{\tilde{E}} \subset Z_{E_j}^{\tilde{E}} \subset T_{E_j} \subset \bar{T}_{E_j}^{\text{сл.}}$, $j = 1, \ldots, p.$ Отсюда

$$\bigcap_{j=1}^{p} \bar{T}_{E_j}^{\text{сл.}} \neq \varnothing,$$

что и означает центрированность исходной системы множеств.

С учетом этого факта и рефлексивности пространства X получим (см. [9]) существование некоторого $u_0 \in \bigcap\limits_{E \in \mathbb{E}(X)} \bar{T}_E^{\text{сл.}}$.

Покажем, что $u_0 \in P$ и $A(u_0) \in G(u_0)$. Возьмем $E \in \mathbb{E}(X)$ такое, что $u_0 \in E$. По построению $u_0 \in \bar{T}_E^{\text{сл.}}$. Поэтому существует последовательность $\{u_n\}$, где $u_n \in Z_E^{E_n}$, $E_n \supset E$, $u_n \rightharpoonup u_0$ и

$$\langle A(u_n)-g_n,u_n\rangle \le 0,\ \langle A(u_n)-g_n,u_0\rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle A(u_n)-g_n,w\rangle = 0 \text{ для всех } w\in E \quad (3)$$

где $g_n \in G(u_n)\subset G(\bar{U})$. Так как множество $G(\bar{U})$ относительно компактно, то без ограничения общности будем считать, что $g_n \to g_0$.

Заметим, что имеет место представление

$$\begin{aligned}\langle A(u_n),u_n-u_0\rangle &= \langle A(u_n)-g_n,u_n-u_0\rangle + \\ &+\langle g_n-g_0,u_n-u_0\rangle + \langle g_0,u_n-u_0\rangle.\end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что второе и третье слагаемые в правой части (4) сходятся к нулю. Кроме того, из (2) следует, что $\langle A(u_n)-g_n,u_n-u_0\rangle \le 0$. Поэтому, в силу свойств верхнего предела числовой последовательности, мы имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-u_0\rangle \le 0. \quad (5)$$

Так как оператор A удовлетворяет условию $\alpha(\bar{U})$, $u_n \in P_{E_n}\subset \bar{U}$, $u_n \rightharpoonup u_0$ и выполнено неравенство (5), то мы получим $u_n \to u_0$. Поэтому, в силу замкнутости множества P, имеем $u_0\in P$.

Из условий $u_n\to u_0, g_n\in G(u_n), g_n\to g_0$ и полунепрерывности сверху G вытекает, что $g_0\in G(u_0)$. Действительно, предположив противное, можно найти такое $\varepsilon_0>0$, что $g_0\notin V_{\varepsilon_0}$, где V_{ε_0} обозначает ε_0-окрестность компактного множества $G(u_0)$. Из полунепрерывности сверху мультиотображения G следует (см. определение 3), что множество $G_+^{-1}(V_{\varepsilon_0/2})$ открыто. Так как u_0 принадлежит этому множеству и $u_n\to u_0$, то $u_n\in G_+^{-1}(V_{\varepsilon_0/2})$ при достаточно больших $n\in\mathbb{N}$. Поэтому $g_n\in G(u_n)\subset V_{\varepsilon_0/2}$, а значит $\|g_n-g_0\|_*\ge \varepsilon_0/2$, где $\|\cdot\|_*$ — норма в X^*. Полученное неравенство противоречит сильной сходимости g_n к g_0.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (3), мы получим, что $\langle A(u_0)-g_0,w\rangle=0$ для любого $w\in E$.

Таким образом, для произвольного $E\in\mathbb{E}(X)$ такого, что $u_0\in E$, можно найти $g_0\in G(u_0)$ такое, что $\langle A(u_0)-g_0,w\rangle=0$ для любого $w\in E$.

Так как X — сепарабельное пространство, то существует Q — счетное всюду плотное в X подмножество. Пусть оно имеет вид $Q=\{x_1,x_2,\dots,x_k,\dots\}$. Рассмотрим

$F_1=\mathcal{L}(u_0,x_1), F_2=\mathcal{L}(u_0,x_1,x_2),\dots,F_k=\mathcal{L}(u_0,x_1,\dots,x_k),\dots$, где $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку соответствующих элементов.

Из приведенных выше рассуждений следует, что для $F_k\in\mathbb{E}(X)$ можно выбрать $f_k\in G(u_0)$ так, что

$$\langle A(u_0)-f_k,w\rangle=0 \text{ для любого } w\in F_k. \quad (6)$$

Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $f_k\to f^*\in G(u_0)$ (т.к. $G(u_0)$ — компакт). Покажем, что $\langle A(u_0)-f^*,x\rangle=0$ для любого $x\in X$.

Зафиксируем $x\in X$ и возьмем произвольное $\varepsilon>0$.

Пусть C — константа, такая, что $\|A(u_0)\|_*<C, \|f_k\|_*<C$ для любого $k=1,2,\dots$

Так как множество Q — всюду плотно в X, то существует $x_m\in Q$ такое, что $\|x-x_m\|<\varepsilon/4C$, где $\|\cdot\|$ — норма в X.

Возьмем $k\in\mathbb{N}$ настолько большим, что $|\langle f_k-f^*,x\rangle|<\varepsilon/4$ и $k\ge m$ (это можно сделать, так как $f_k\to f^*$ и x — фиксировано).

Заметим, что $x_m\in F_m\subset F_k$. Поэтому из равенства (6) имеем $\langle A(u_0)-f_k,x_m\rangle=0$.

С учетом всех последних соотношений нетрудно видеть, что справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\left|\langle A(u_0)-f^*,x\rangle\right| &\le \left|\langle A(u_0)-f_k,x_m\rangle\right| + \\ &+\left|\langle A(u_0)-f_k,x-x_m\rangle\right| + \\ &+\left|\langle f_k-f^*,x\rangle\right| \le \|A(u_0)\|_*\cdot\|x-x_m\| + \\ &+\|f_k\|_*\cdot\|x-x_m\| + \left|\langle f_k-f^*,x\rangle\right| \le \\ &\le C\cdot(\varepsilon/4C)+C\cdot(\varepsilon/4C)+\varepsilon/4 = 3\varepsilon/4<\varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\langle A(u_0)-f^*,x\rangle=0$. В силу произвольности $x\in X$ можно заключить, что $A(u_0)=f^*\in G(u_0)$, а значит $u_0\in Coin(A,G)$.

Вспоминая, что $u_0\in P$ получим: $u_0\in Coin(A,G)\cap P$. А это противоречит условию (II). Таким образом, доказано существование пространства $E_0\in\mathbb{E}(X)$ такого, что при $E\supset E_0, E\in\mathbb{E}(X)$, пусто множество $Z_{E_0}^E$.

Теперь докажем утверждение теоремы. Покажем, что выбранное нами $E_0\in\mathbb{E}(X)$ удовлетворяет условиям теоремы. Предположим противное. Тогда существует такое $E_1\supset E_0, E_1\in\mathbb{E}(X)$, что

$$Coin(A_{E_1},G_{E_1})\cap P_{E_1}\ne\varnothing. \quad (7)$$

Пусть u_1 принадлежит пересечению из (7). Тогда существует $g_1\in G(u_1)$ для которого верно

$$A_{E_1}(u_1)=\pi_{E_1}(g_1). \quad (8)$$

Выберем базис в E_1 в виде $v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_{m_1}$, где $v_1,\dots,v_m$ — базис в E_0. Тогда равенство (8) эквивалентно записи:

$$\langle A(u_1)-g_1,v_i\rangle=0,\ i=1,\dots,m_1. \quad (9)$$

Покажем, что $u_1 \in Z_{E_0}^{E_1}$. Это даст противоречие с тем, что $Z_{E_0}^{E_1} = \varnothing$.

Так как $u_1 \in E_1$, то имеет место соотношение $u_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \xi_i v_i,\ \xi_i \in \mathbb{R}$. С помощью этого представления и равенства (9) получим

$$\langle A(u_1) - g_1, u_1 \rangle = \langle A(u_1) - g_1, \sum_{i=1}^{m_1} \xi_i v_i \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{m_1} \xi_i \langle A(u_1) - g_1, v_i \rangle = 0.$$

Аналогично $\langle A(u_1) - g_1, v \rangle = 0$ для любого $v \in E_0$. Таким образом, $u_1 \in Z_{E_0}^{E_1} = \varnothing$. Мы получили противоречие. Теорема доказана. □

Для того, чтобы ввести определение степени включений компактной тройки $(A, G, \bar{U})$, заметим следующее.

Для множества $P = \partial U$ выполнены условия теоремы 1. Зафиксируем подпространство $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такое, что верно

$$Coin(A_{E_0}, G_{E_0}) \cap \partial U_{E_0} = \varnothing. \qquad (10)$$

Из свойств множества $\bar{U}$ вытекает, что $\bar{U}_{E_0} = \overline{U \cap E_0}$ локально стягиваемо. Поэтому из леммы 1 получаем, что $\bar{U}_{E_0}$ является ANR-пространством.

Для отображения $\Sigma|_{\bar{U}_{E_0}}$ выполнены все условия леммы 5, а значит для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-аппроксимация $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{U}_{E_0}}, \varepsilon)$.

Из равенства (10) и леммы 4 следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$(A_{E_0} - \varphi_{E_0} \circ \sigma_\varepsilon)(x) \neq 0 \quad \text{для любого} \quad x \in \partial U_{E_0}.$$

Теперь можно дать следующее определение.

Определение 10. *Степень включений для компактной тройки $(A, G, \bar{U})$ определяется равенством:*

$$Deg(A, G, \bar{U}) = deg(A_{E_0} - \varphi_{E_0} \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_{E_0}, 0),$$

где $\deg(A_{E_0} - \varphi_{E_0} \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_{E_0}, 0)$ — степень конечномерного отображения $A_{E_0} - \varphi_{E_0} \circ \sigma_\varepsilon : \bar{U}_{E_0} \to E_0$ относительно точки 0.

Предложенное определение корректно, то есть степень не зависит ни от выбора подпространства E_0, ни от выбора ε-аппроксимации σ_ε (см. [3]).

Нам потребуются некоторые свойства введенной выше характеристики. Это стандартные свойства в теории степени, но для данных классов отображений они нигде ранее не были изложены, поэтому приведем их здесь.

Теорема 2. *(Аддитивная зависимость степени от области). Пусть U' и U'' — непересекающиеся открытые подмножества U и $(A, G, \bar{U})$ — компактная тройка такая, что*

$$Coin(A, G) \bigcap (\bar{U} \setminus (U' \cup U'')) = \varnothing.$$

Тогда

$$Deg(A, G, \bar{U}) =$$
$$= Deg(A, G, \bar{U}') + Deg(A, G, \bar{U}'').$$

Доказательство. Для множества $P = \bar{U} \setminus (U' \cup U'')$ выполнены условия теоремы 1. Поэтому существует конечномерное подпространство $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такое, что для любого $E \supset E_0$, $E \in \mathbb{E}(X)$ верно:

$$Coin(A_E, G_E) \cap (\bar{U}_E \setminus (U'_E \cup U''_E)) = \varnothing,$$

где U'_E, U''_E обозначают как обычно области $U' \cap E$ и $U'' \cap E$ в конечномерном подпространстве E.

Из последнего равенства и леммы 4 следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$(A_E - \varphi_E \circ \sigma_\varepsilon)(x) \neq 0$$

$$\text{для любого} \quad x \in \bar{U}_E \setminus (U'_E \cup U''_E),$$

где $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{U}_E}, \varepsilon)$.

По свойствам конечномерной степени имеем:

$$\deg(A_E - \varphi_E \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_E, 0) =$$
$$= \deg(A_E - \varphi_E \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}'_E, 0) + \deg(A_E - \varphi_E \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}''_E, 0).$$

С другой стороны, из конструкции определения степени компактных троек вытекает, что степень, стоящую в левой части последнего равенства, можно использовать для вычисления $Deg(A, G, \bar{U})$, а степени из правой части — для определения $Deg(A, G, \bar{U}')$ и $Deg(A, G, \bar{U}'')$ соответственно. Отсюда и следует требуемое равенство. □

Покажем теперь, что рассмотренная нами характеристика является топологическим инвариантом.

Определение 11. *Две компактные тройки*

$$(A_0, G_0 = \varphi_0 \circ \Sigma_0, \bar{U}) \text{ и } (A_1, G_1 = \varphi_1 \circ \Sigma_1, \bar{U})$$

называются гомотопными, если выполнены следующие условия:

h1) *существует отображение $\tilde{A} : \bar{U} \times [0,1] \to X^*$, удовлетворяющее условию $\alpha^{(t)}(\partial U)$ (это означает, что для любых последовательностей $u_n \in \partial U, t_n \in [0,1]$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle \tilde{A}(u_n, t_n), u_n - u_0 \rangle \le 0$ следует $u_n \to u_0$), причем*

$$\tilde{A}(\cdot,0) = A_0,\ \tilde{A}(\cdot,1) = A_1,$$

и для любых последовательностей $t_n \in [0,1]$, $u_n \in \bar{U}$ *из* $u_n \to u_0,\ t_n \to t_0$ *следует* $\tilde{A}(u_n,t_n) \rightharpoonup \tilde{A}(u_0,t_0)$.

h2) *Существует многозначное отображение* $\tilde{\Sigma} \in J(\bar{U}\times[0,1], Z)$ *такое, что*

$$\tilde{\Sigma}(\cdot,0) = \Sigma_0,\ \tilde{\Sigma}(\cdot,1) = \Sigma_1,$$

и однозначное непрерывное $\tilde{\varphi} : Z\times[0,1] \to X^*$ *такое, что*

$$\tilde{\varphi}(\cdot,0) = \varphi_0,\ \tilde{\varphi}(\cdot,1) = \varphi_1,$$

h3) *для многозначного отображения* $\tilde{G} : \bar{U}\times[0,1] \to K(X^*)$ *заданного по правилу*

$$\tilde{G}(x,t) = \tilde{\varphi}(\tilde{\Sigma}(x,t),t),\ (x,t) \in \bar{U}\times[0,1],$$

множество $\tilde{G}(\bar{U}\times[0,1])$ *относительно компактно,*

h4) *множество* $Coin(\tilde{A},\tilde{G}) \cap (\partial U \times [0,1])$ *пусто, где*

$$Coin(\tilde{A},\tilde{G}) = \{(x,t) \in \bar{U}\times[0,1] : \tilde{A}(x,t) \in \tilde{G}(x,t)\}.$$

Гомотопность троек мы будем обозначать $(A_0,G_0,\bar{U}) \sim (A_1,G_1,\bar{U})$.

Теорема 3. *Пусть* $(A_0,G_0,\bar{U}) \sim (A_1,G_1,\bar{U})$. *Тогда*

$$Deg(A_0,G_0,\bar{U}) = Deg(A_1,G_1,\bar{U}).$$

Доказательство. Гомотопность компактных троек означает, что выполняются условия h1)—h4) из определения 11. На основе условия h4) аналогично теореме 1 доказывается существование такого $E_0 \in \mathbb{E}(X)$, что для любого $E \supset E_0$, $E \in \mathbb{E}(X)$ верно:

$$Coin(\tilde{A}_E,\tilde{G}_E)\bigcap(\partial U_E \times [0,1]) = \varnothing, \qquad (11)$$

где $\tilde{A}_E = \pi_E \circ \tilde{A},\ \tilde{G}_E = \pi_E \circ \tilde{G}$ и $\tilde{A},\tilde{G}$ определены в h1) и h3) соответственно.

Заметим, что для мультиотображения $\tilde{\Sigma}|_{\bar{U}_E\times[0,1]}$ определенного в h2) выполнены все условия леммы 5, а значит для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\tilde{\sigma}_\varepsilon \in a(\tilde{\Sigma}|_{\bar{U}_E\times[0,1]},\varepsilon)$.

Обозначим $\sigma_{i\varepsilon} = \tilde{\sigma}_\varepsilon(\cdot,i),\ i = 0,1$ и отметим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ эти отображения можно использовать в качестве непрерывных аппроксимаций мультиотображений $\tilde{\Sigma}|_{\bar{U}_E\times[0,1]}(\cdot,i) = \Sigma_i|_{\bar{U}_E}$ (см. лемма 3 (III)) в определении $Deg(A_i,G_i,\bar{U}),\ i = 0,1$, а значит

$$Deg(A_i,G_i,\bar{U}) = \deg(A_{iE} - \varphi_{iE}\circ\sigma_{i\varepsilon},\bar{U}_E,0),$$

где $A_{iE} = \pi_E \circ A_i,\ \varphi_{iE} = \pi_E \circ \varphi_i,\ i = 0,1.$

Поэтому, для того чтобы доказать теорему, достаточно установить,что

$$\begin{aligned}&\deg(A_{0E} - \varphi_{0E}\circ\sigma_{0\varepsilon},\bar{U}_E,0) =\\ &= \deg(A_{1E} - \varphi_{1E}\circ\sigma_{1\varepsilon},\bar{U}_E,0).\end{aligned} \qquad (12)$$

Рассмотрим семейство отображений $\tilde{H}_{tE} : \bar{U}_E \to E$,

$$\tilde{H}_{tE}(x) = \tilde{A}_E(x,t) - \tilde{\varphi}_E(\tilde{\sigma}_\varepsilon(x,t),t),$$

$$(x,t) \in \bar{U}_E \times [0,1],$$

где $\tilde{A},\tilde{\varphi}$ определены в условиях h1), h2).

Легко заметить, что

$$\tilde{H}_{iE}(x) = A_{iE}(x) - \varphi_{iE}\circ\sigma_{i\varepsilon}(x),\ i = 0,1. \quad (13)$$

Кроме того, из равенства (11) и леммы 4 следует, что

$$Coin(\tilde{A}_E,\tilde{\varphi}_E\circ\tilde{\sigma}_\varepsilon)\bigcap(\partial\bar{U}_E\times[0,1]) = \varnothing,$$

а значит $\tilde{H}_{tE}(x) \ne 0$ для всех $x \in \partial\bar{U}_E, t\in[0,1]$.

По свойствам конечномерной степени

$$deg(\tilde{H}_{0E},\bar{U}_E,0) = deg(\tilde{H}_{1E},\bar{U}_E,0). \qquad (14)$$

Подставляя в равенство (14) выражения для $\tilde{H}_{iE}$ из равенств (13), мы убедимся в справедливости (12), что и доказывает теорему. □

Одно из важнейших свойств степени включений сформулировано в следующей теореме.

Теорема 4. *Если* $(A,G,\bar{U})$ — *компактная тройка и* $Coin(A,G) = \varnothing$, то

$$Deg(A,G,\bar{U}) = 0.$$

Доказательство. Для множества $P = \bar{U}$ выполнены все условия теоремы 1. Поэтому существует пространство $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такое, что для любого $E \supset E_0, E \in \mathbb{E}(X)$ верно

$$Coin(A_E,G_E) \cap \bar{U}_E = \varnothing.$$

Применив лемму 4 к нашему случаю, получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$(A_E - \varphi_E\circ\sigma_\varepsilon)(x) \ne 0 \ \text{ для любого } \ x \in \bar{U}_E,$$

где $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{\Sigma}_E},\varepsilon)$.

Из свойств конечномерной степени и определения 10 имеем

$$Deg(A,G,\bar{U}) = \deg(A_E - \varphi_E\circ\sigma_\varepsilon,\bar{U}_E,0) = 0.$$

Теорема доказана. □

Из последней теоремы вытекает признак разрешимости включения $A(x) \in G(x)$.

Теорема 5. *Пусть* $(A,G,\bar{U})$ — *компактная тройка и* $Deg(A,G,\bar{U}) \ne 0$. *Тогда множество* $Coin(A,G)$ *непусто.*

В качестве примера применения теорем 3 и 5 приведем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* $A : X \to X^*$ *нечетный деминепрерывный оператор. Пусть* A *удовлетворяет условию* α *на каждом ограниченном подмножест-*

ве пространства X. Предположим также, что $G = \varphi \circ \Sigma \in CJ(X, X^*)$, множество $G(\bar{\Omega})$ относительно компактно для любого ограниченного $\Omega \subset X$ и множество решений однопараметрического семейства операторных включений:

$$A(x) \in \lambda G(x),\ \ \lambda \in [0,1]$$

априори ограничено. Тогда $Coin(A, G) \neq \varnothing$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует шар $\mathcal{B} \subset X$ с центром в нуле, граница которого $\partial\mathcal{B}$ не содержит решений включения $A(x) \in \lambda G(x)$.

Рассмотрим мультиотображение $\hat{G} : \bar{\mathcal{B}} \times [0,1] \to X^*$, заданное с помощью равенств:

$$\hat{G}(x,t) = \hat{\varphi}(\Sigma(x), t),$$

$$\hat{\varphi}(z,t) = t\varphi(z),\ \ (z,t) \in \bar{\mathcal{B}} \times [0,1].$$

Нетрудно видеть, что эти отображения удовлетворяют условиям определения 11, а значит компактные тройки $(A, G, \bar{\mathcal{B}})$ и $(A, 0, \bar{\mathcal{B}})$ гомотопны. Из теоремы 3 вытекает, что

$$Deg(A, G, \bar{\mathcal{B}}) = Deg(A, 0, \bar{\mathcal{B}}).$$

Вычисление степени тройки $(A, 0, \bar{\mathcal{B}})$ сводится к вычислению степени нечетного отображения A множества $\bar{\mathcal{B}}$ относительно $0 \in X^*$ (в смысле определения степени отображений класса α, см. [1]). В этом случае степень равна нечетному числу (см. [1], теорема 4.5).

Из нечетности $Deg(A, 0, \bar{\mathcal{B}})$ и равенства $Deg(A, G, \bar{\mathcal{B}}) = Deg(A, 0, \bar{\mathcal{B}})$ вытекает, что $Deg(A, G, \bar{\mathcal{B}}) \neq 0$.

Применив теорему 5 к нашей ситуации, можно сделать вывод о том, что множество $Coin(A, G)$ непусто. Теорема доказана. □

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

Теорема 7. *Пусть $(A, G, \bar{U})$ — компактная тройка. Тогда множество $Q = Coin(A, G)$ компактно.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть D — открытое ограниченное подмножество рефлексивного банахова пространства X. Пусть $A : \bar{D} \to X^*$ деминепрерывно и удовлетворяет условию $\alpha(\bar{D})$. Тогда A является собственным отображением, то есть для любого компакта $K \subset X^*$ множество $A^{-1}(K) = \{x \in \bar{D} : A(x) \in K\}$ компактно в X.*

Доказательство. Пусть $K \subset X^*$ — компактное множество. Покажем, что $A^{-1}(K)$ компактно в X.

Возьмем произвольную последовательность $v_n \in A^{-1}(K)$. Это означает, что $A(v_n) \in K$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $A(v_n)$ сходится к некоторому $k \in K : A(v_n) \to k$ при $n \to \infty$.

Известно, что в случае рефлексивного банахова пространства из любой последовательности элементов ограниченного множества можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность (см. [10]). Поэтому, переходя (если это нужно) к подпоследовательности будем считать, что $v_n \rightharpoonup v_0$ при $n \to \infty$.

Далее вычислим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle A(v_n), v_n - v_0 \rangle$. Нетрудно видеть, что имеет место представление:

$$\langle A(v_n), v_n - v_0 \rangle = \langle A(v_n) - k, v_n - v_0 \rangle + \langle k, v_n - v_0 \rangle.$$

При этом оба слагаемых в правой части равенства сходятся к нулю: первое — из-за сходимости $A(v_n)$ к k, а второе — из-за слабой сходимости v_n к v_0. Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(v_n), v_n - v_0 \rangle = 0.$$

Вспоминая, что отображение A удовлетворяет условию $\alpha(\bar{D})$, мы получим, что

$$v_n \to v_0 \in \bar{D} \ \text{ где } \ n \to \infty.$$

Таким образом, из произвольной последовательности элементов $A^{-1}(K)$ мы выделили сходящуюся подпоследовательность. Остается только показать, что предел этой подпоследовательности v_0 принадлежит $A^{-1}(K)$.

Действительно, из деминепрерывности отображения A и сходимости $v_n \to v_0$ следует, что $A(v_n) \rightharpoonup A(v_0)$. С другой стороны $A(v_n) \to k \in K$, а значит в силу единственности предела имеем $A(v_0) = k$. Поэтому $v_0 \in A^{-1}(K)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 7. Множество $K = \overline{G(\bar{U})}$ компактно. Из леммы 6 и включения $Q \subset A^{-1}(K)$ следует относительная компактность множества Q.

Теперь для доказательства теоремы достаточно установить замкнутость Q. Пусть $x_0 \in \bar{Q}$. Тогда найдется последовательность $x_n \in Q$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Поскольку $A(x_n) \in G(x_n) \subset K$, то без ограничения общности можно считать, что $A(x_n) \to y_0 \in X^*$. С другой стороны, из деминепрерывности оператора A вытекает, что $A(x_n) \rightharpoonup A(x_0)$. Поэтому, в силу единственности предела, $y_0 = A(x_0)$.

Из условий $x_n \to x_0$, $A(x_n) \to A(x_0)$, $A(x_n) \in G(x_n)$ и полунепрерывности сверху мультиотображения G следует (см. [2], теоремы 1.2.24; 1.2.29), что $A(x_0) \in G(x_0)$, то есть $x_0 \in Q$. Теорема доказана. □

При изучении структуры множества решений различных классов уравнений важную роль играет принцип связности, доказанный М. А. Красносельским и А. И. Перовым для однозначных вполне непрерывных отображений (см. [11]). Обобщение этого принципа на случай многозначных отображений доказано в работе [12].

В следующей теореме предлагаются, условия при которых множество решений включений вида $A(x) \in G(x)$ обладает свойством связности.

Теорема 8. *Пусть* $(A, G = \varphi \circ \Sigma, \bar{U})$ *— компактная тройка и* $Deg(A, G, \bar{U}) \neq 0$. *Пусть для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой точки* $x_1 \in Q = Coin(A, G)$ *существует компактная тройка* $(A_{\varepsilon,x_1}, \varphi \circ \rho_{\varepsilon,x_1}, \bar{U})$, *где* $\rho_{\varepsilon,x_1} : \bar{U} \to Z$ *непрерывное однозначное отображение, такая, что выполнены следующие условия:*

d1) *множество* $Q_{\varepsilon,x_1} = Coin(A_{\varepsilon,x_1}, \varphi \circ \rho_{\varepsilon,x_1})$ *связно,*

d2) *существует точка* $y \in Q_{\varepsilon,x_1}$, *для которой* $\|y - x_1\| < \varepsilon$
и для отображений $\tilde{A}_{\varepsilon,x_1}$, *и* $\tilde{G}_{\varepsilon,x_1}$, *заданных формулами*

$$\tilde{A}_{\varepsilon,x_1}(x,t) = (1-t)A(x) + tA_{\varepsilon,x_1}(x),$$

$$\tilde{G}_{\varepsilon,x_1}(x,t) = \varphi((1-t)\Sigma(x) + t\rho_{\varepsilon,x_1}(x)),$$

справедливы свойства:

d3) *множество* $\tilde{G}_{\varepsilon,x_1}(\bar{U} \times [0,1])$ *относительно компактно,*

d4) *множество* $S_{\varepsilon,x_1} = \{x \in \bar{U} : \tilde{A}_{\varepsilon,x_1}(x,t) \in \tilde{G}_{\varepsilon,x_1}(x,t), t \in [0,1]\}$ *лежит в* ε*-окрестности множества* Q.

Тогда множество $Q = Coin(A, G)$ *непусто, компактно и связно.*

Доказательство. Непустота и компактность множества Q вытекают из теорем 5 и 7 соответственно. Докажем связность этого множества. Для этого предположим противное. Тогда Q можно представить в виде $Q = P_0 \cup P_1$, где P_0, P_1 непустые замкнутые множества и $P_0 \cap P_1 = \varnothing$.

Пусть $\varepsilon > 0$ такое число, что

$$\overline{U_\varepsilon(P_0)} \cap \overline{U_\varepsilon(P_1)} = \varnothing, \; U \supset \overline{U_\varepsilon(P_0)} \cup \overline{U_\varepsilon(P_1)},$$

где $U_\varepsilon(P_0), U_\varepsilon(P_1)$ обозначают ε-окрестности множеств P_0 и P_1 соответственно.

В силу теоремы 2 справедливо равенство

$$Deg(A, G, \bar{U}) = $$
$$= Deg(A, G, \overline{U_\varepsilon(P_0)}) + Deg(A, G, \overline{U_\varepsilon(P_1)}).$$

Следовательно, хотя бы одно из слагаемых в правой части равенства отлично от нуля. Для определенности пусть $Deg(A, G, \overline{U_\varepsilon(P_0)}) \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in P_1$ и отображения A_{ε,x_1} и ρ_{ε,x_1}, удовлетворяющие условиям теоремы. Из условий d3), d4) вытекает, что компактные тройки $(A, G, \overline{U_\varepsilon(P_0)})$ и $(A_{\varepsilon,x_1}, \varphi \circ \rho_{\varepsilon,x_1}, \overline{U_\varepsilon(P_0)})$ гомотопны. Тогда

$$Deg(A, G, \overline{U_\varepsilon(P_0)}) = Deg(A_{\varepsilon,x_1}, \varphi \circ \rho_{\varepsilon x_1}, \overline{U_\varepsilon(P_0)}) \neq 0.$$

Из теоремы 5 следует, что

$$Q_{\varepsilon,x_1} \cap U_\varepsilon(P_0) \neq \varnothing.$$

С другой стороны, по условию $d2$) мы имеем, что

$$Q_{\varepsilon,x_1} \cap U_\varepsilon(P_1) \neq \varnothing.$$

Кроме того, так как

$$Q_{\varepsilon,x_1} \subset S_{\varepsilon,x_1} \subset U_\varepsilon(Q), U_\varepsilon(Q) = U_\varepsilon(P_0) \cup U_\varepsilon(P_1),$$

то получаем, что множество Q_{ε,x_1} является несвязным. Полученное противоречие (см. условие d1)) и доказывает теорему. □

Следствие. *Пусть* $(A, G = \varphi \circ \Sigma, \bar{U})$ *— компактная тройка и*

$$Deg(A, G, \bar{U}) \neq 0.$$

Предположим, что для всякого $x \in \bar{U}$ *множество* $\Sigma(x)$ *выпукло и отображение* $\varphi : Z \to X^*$ *компактно, то есть образ* $\varphi(Z)$ *относительно компактен в* X^*. *Если для любого* $\delta > 0$ *и любой точки* $x_1 \in Q = Coin(A, G)$ *существует отображение* $\sigma_{\delta,x_1} \in a(\Sigma, \delta)$ *такое, что*

s1) *множество* $Q_{\delta,x_1} = Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\delta,x_1})$ *связно,*

s2) *существует точка* $y \in Q_{\delta,x_1}$, *для которой* $\|y - x\|_1 < \delta$,
тогда множество $Q = Coin(A, G)$ *непусто, компактно и связно.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $x_1 \in Q$. Покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ для компактной тройки $(A, \varphi \circ \sigma_{\delta,x_1}, \bar{U})$ выполнены все условия предыдущей теоремы. Справедливость условий $d1) - d3)$ очевидна. Поэтому для доказательства утверждения достаточно установить, что множество

$$S_{\delta,x_1} = \{x \in \bar{U} : A(x) \in \varphi((1-t)\Sigma(x) +$$
$$+ t\sigma_{\delta,x_1}(x)), t \in [0,1]\}$$

лежит в ε-окрестности множества Q, если $\delta > 0$ достаточно мало.

Предположив противное, мы будем иметь последовательности $\sigma_{\delta_n,x_1} \in a(\Sigma, \delta_n)$, $\delta_n > 0$,

$\delta_n \to 0;\quad x_n \in \bar{U},\quad y_n \in \Sigma(x_n),\quad t_n \to t_0 \in [0,1]$, $n = 2, 3, \ldots$ такие, что

$$A(x_n) = \varphi((1-t_n)y_n + t_n\sigma_{\delta_n,x_1}(x_n)), \qquad (15)$$

$$x_n \notin O_\varepsilon(Q). \qquad (16)$$

Рассмотрим множества

$$X_1 = \bigcup_n x_n,\ \ Y_1 = \bigcup_n A(x_n),\ \ Y_2 = \bigcup_n y_n.$$

Нетрудно видеть, что

$$X_1 \subset A^{-1}(Y_1),\ \ Y_1 \subset \varphi(Z),\ \ Y_2 \subset \Sigma(X_1).$$

Из этих вложений и условия относительной компактности множества $\varphi(Z)$, из леммы 6 и теоремы о компактности образа полунепрерывного сверху мультиотображения (см. [2], теорема 1.2.35) следует, что множества X_1 и Y_2 относительно компактны. Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Кроме того, $y_n \in \Sigma(x_n)$, а значит $y_0 \in \Sigma(x_0)$ (см. [2], теоремы 1.2.24; 1.2.29).

Из леммы 3, I) следует, что отображения $\sigma_{\delta_n,x_1}|_{\bar{X}_1}$ определяют последовательность γ_n — аппроксимаций отображения $\Sigma|_{\bar{X}_1}$ с $\gamma_n \to 0$. Следовательно,

$$(x_n, \sigma_{\delta_n,x_1}(x_n)) \in O_{\gamma_n}(\Gamma_{\Sigma|_{\bar{X}_1}}).$$

График полунепрерывного сверху отображения $\varphi \circ \Sigma|_{\bar{X}_1}$ есть компактное множество (см. [2]). Поэтому мы можем предположить без ограничения общности, что

$$(x_n, \sigma_{\delta_n,x_1}(x_n)) \to (x_*, y_*) \in \Gamma_{\Sigma|_{\bar{X}_1}} \text{ где } n \to \infty,$$

В силу единственности предела $x_* = x_0$, а значит $y_* \in \Sigma(x_*) = \Sigma(x_0)$.

Переходя в равенстве (15) к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$A(x_0) = \varphi((1-t_0)y_0 + t_0 y_*).$$

Вспоминая, что $y_0, y_* \in \Sigma(x_0)$ и $\Sigma(x_0)$ — выпуклое множество, мы получим $(1-t_0)y_0 + t_0 y_* \in \Sigma(x_0)$ и $A(x_0) \in \varphi \circ \Sigma(x_0)$, то есть $x_0 \in Q$. Это включение вместе с сходимостью x_n и x_0 противоречит соотношению (16). Полученное противоречие и доказывает следствие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.

2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М: КомКнига. 2005., — 216 с.

3. *Барановский Е.С., Звягин В.Г.* Конструкция степени одного класса многозначных возмущений операторов, удовлетворяющих условию альфа // Нелинейные граничные задачи, 2006, вып. 16, С. 107—117.

4. *Мышкис А.Д.* Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. // Матем. сборник. 1954. Т. 34. № 3. С. 525—540.

5. *Gorniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Dordrecht—Boston—London: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 399 p.

6. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир. 1971.

7. *Дзекка П., Звягин В.Г., Обуховский В.В.* Об ориентированном индексе совпадений для нелинейных фредгольмовых включений // Доклады РАН, 2006, Т. 406, № 4.

8. *Gorniewicz L. Granas A., Kryszewski W.* On the homotopy method in the fixed point index theory for multi-mappings of compact ANR's. //J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 161.2. P. 457—473.

9. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. — М.: ИЛ. 1962.

10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит. 2002.

11. *Красносельский М.А., Перов А.И.* О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 1. С. 15—18.

12. *Гельман Б.Д.* Топологические с войства множества неподвижных точек многозначных отображений // Математ. сборник, Т. 188, 1997. № 12, С. 33—56.

Поступила в редакцию 16.11.2006