УДК 517.977

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н. Г. Павлова

Российский университет дружбы народов

В статье исследуется управляемая система с импульсными управлениями в окрестности анормальной точки. Вводится понятие 2-нормальности, которое играет большую роль при выводе необходимых условий первого и второго порядка для задачи оптимального управления. В статье приводятся достаточные условия 2-нормальности. Получены достаточные условия экстремума для 2-нормальных траекторий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу оптимального импульсного управления

$$J = J(x_1, u, \mu) = W_0(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x(t), u(t), t)dt + \int_{[t_1,t_2]} g^0(t)d\mu(t) \to \min, \tag{1}$$

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t)dt + G(t)d\mu(t), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{2}$$

$$x(t_1) = x_1, \ x(t_2) = x_2, \tag{3}$$

$$W(x_1, x_2) = 0, \ \mu \in \mathbb{K}. \tag{4}$$

Здесь $t \in [t_1, t_2]$ — время, $t_1 < t_2$ заданы, x — фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — управление, f — n-мерная, g^0 — k-мерная, G — $n \times k$-мерная, а W — w-мерная вектор-функции (k, n, m, w — натуральные числа), W_0 и f^0 — скалярные функции. Функции W_0 и W предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, функции f^0 и f — дважды дифференцируемыми по x и u для п.в. $t \in [t_1, t_2]$, а функции g^0 и G — непрерывными.

Положим

$$\mathbb{K} = \Big\{\mu \in \mathbb{C}^*([t_1, t_2]; \mathbb{R}^k) : \int_B \varphi(t)d\mu \geq 0 \ \ \forall \text{ борел. } B \subset [t_1, t_2], \ \ \forall \ \varphi \in \mathbb{C}[t_1, t_2] \mid \varphi(t) \in K^0 \forall t\},$$

где $K \subseteq \mathbb{R}^k$ — заданный острый[1] выпуклый замкнутый конус, K^0 — его полярный. Другими словами, μ — k-мерная мера Бореля, такая, что $\mu(B) \subset K$ для любого борелевского множества B.

В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u, \mu) : \mu \in \mathbb{K}$, $u \in L^m_\infty[t_1, t_2]$.

Тройка $(x(t), u(t), \mu(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, называется допустимым процессом, если $(u(\cdot), \mu(\cdot))$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующее ему решение уравнения (2), удовлетворяющее концевым ограничениям (3), (4):

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + \int_{[t_1,t]} G(\tau)d\mu(\tau) \ \forall \ t \in [t_1, t_2].$$

Определение 1. Допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ называется конечномерным минимумом, если для любого содержащего точку $\hat{u}$ конечномерного подпространства $R \subset L^m_\infty[t_1, t_2]$ процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является локальным минимумом в задаче (1)—(4) с дополнительным ограничением $u(\cdot) \in R$.

Определим на множествах $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{1+w}$ гамильтониан и малый лагранжиан по формулам

$$H(x, u, t, \psi, \lambda^0) = \langle f(x, u, t), \psi \rangle - \lambda^0 f^0(x, u, t),$$

$$l(x_1, x_2, \lambda) = \lambda^0 W_0(x_1, x_2) + \langle \lambda^1, W(x_1, x_2) \rangle, \ \lambda = (\lambda^0, \lambda^1).$$

Здесь $\lambda^0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^w$, а ψ — n-мерный вектор-столбец. Пусть $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ — заданный допустимый процесс.

Определение 2. Процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа, если существует такой вектор $\lambda \neq 0$, что $\lambda^0 \geq 0$ и для

[1] Выпуклый конус называется острым, если он не содержит ненулевых подпространств. Пустое множество также условимся считать острым конусом.

вектор-функции ψ, являющейся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t)) / \partial x,$$
$$\psi(t_1) = \partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda) / \partial x_1, \tag{5}$$

имеет место

$$\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t), \lambda^0) / \partial u = 0$$
$$\text{для п.в.} \in [t_1, t_2],$$
$$\psi(t_2) = -\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda) / \partial x_2,$$
$$\langle \psi(t), G(t)v \rangle - \lambda^0 \langle g^0(t), v \rangle \leq \tag{6}$$
$$\leq 0 \forall v \in K, \forall t \in [t_1, t_2],$$
$$\langle \psi(t), G(t)\hat{v}(t) \rangle - \lambda^0 \langle g^0(t), \hat{v}(t) \rangle = 0$$
$$\text{для } \mu - \text{п.в. } t \in [t_1, t_2].$$

Здесь $\hat{v}(t) = \dfrac{d\hat{\mu}}{d|\hat{\mu}|}(t)$ — производная Радона—Никодима, $\hat{x}_1 = \hat{x}(t_1)$, $\hat{x}_2 = \hat{x}(t_2)$.

Обозначим через $\Lambda(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ множество векторов λ, которые отвечают заданной экстремали $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ в силу уравнений Эйлера—Лагранжа.

Если конус Λ не содержит элемент вида $(0, \lambda^1)$ (т.е. элемент с $\lambda^0 = 0$), то задача называется нормальной. В противном случае задачу называют анормальной и для нее необходимые условия первого порядка выполняются тривиально.

Для формулировки условий второго порядка для произвольного минимизируемого функционала процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ введем в рассмотрение систему уравнений в вариациях

$$d(\delta x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta x dt +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta u(t) dt + G(t) d(\delta\mu)(t). \tag{7}$$

Здесь $\delta u \in L_\infty^m[t_1, t_2]$, $\delta\mu \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})$, а решение уравнения в вариациях должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\delta x(t_1) = 0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\delta x(t_2) = 0. \tag{8}$$

Пусть $\lambda \in \Lambda(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$. На пространстве $X = \mathbb{R}^n \times L_\infty^m[t_1, t_2] \times \mathbb{C}^*$ троек $(\zeta, \delta u, \delta\mu)$ определим квадратичную форму Ω_λ формулой

$$\Omega_\lambda(\zeta, \delta u, \delta\mu) = \frac{\partial^2 l}{\partial (x_1, x_2)^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda) \times$$
$$\times [(\delta x(t_1), \delta x(t_2)), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))] -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial (x, u)^2}(\hat{x}, \hat{u}, t, \psi) \times$$
$$\times [(\delta x(t), \delta u(t)), (\delta x(t), \delta u(t))] dt.$$

Здесь и далее δx — соответствующее $(\delta u, \delta\mu)$ решение системы уравнений в вариациях (7) с начальным условием $\delta x(t_1) = \zeta$.

Через $\tilde{X}$ обозначим линейное подпространство X, состоящее из всех тех $(\zeta, \delta u, \delta\mu)$, что решение системы (7) δx удовлетворяет граничным условиям (8). Для произвольного целого неотрицательного числа r через $\Lambda_r = \Lambda_r(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ обозначим множество тех $\lambda \in \Lambda(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$, для которых индекс сужения формы Ω_λ на подпространство $\tilde{X}$ не превышает r.

Пусть Φ — фундаментальная матрица системы уравнений в вариациях (7), т.е. Φ является решением однородной системы

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\Phi, \ \Phi(t_1) = I,$$

где I — единичная матрица. Обозначим через d размерность ядра блочной матрицы $(Z_1^* Z_2^*)$, где

$$Z_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \Phi(t_2)\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2),$$
$$Z_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)^* \Phi(t_2)^* \times$$
$$\times \int_{t_1}^{t_2} \Phi^{-1}(t)^* \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)^* \frac{\partial f}{\partial u} \times$$
$$\times (\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\Phi^{-1}(t) dt \Phi(t_2)\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2).$$

Следующая теорема дает необходимые условия минимума второго порядка.

Теорема 1. (см. [1]). Пусть допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является конечномерным минимумом в задаче (1)—(4). Тогда $\Lambda_d \neq \varnothing$ и для любых $(\zeta, \delta u, \delta\mu) \in \tilde{X}$, таких, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \delta x(t), \frac{\partial f^0}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle \delta u(t), \frac{\partial f^0}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) \right\rangle dt \right] + \int_{[t_1, t_2]} \langle g^0(t), \delta\hat{\mu} \rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial W_0}{\partial (x_1, x_2)}(\hat{x}_1, \hat{x}_2), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))^T \right\rangle \leq 0,$$

имеет место

$$\max_{\lambda \in \Lambda_d, |\lambda|=1} \Omega_\lambda(\zeta, \delta u, \delta\mu) \geq 0. \qquad (9)$$

Отметим, что если экстремаль $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ анормальна (т.е. $d > 0$) и конус $conv\Lambda_d$ не является острым, то условие (9) содержательной информации не несет.

2. 2-НОРМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Для управляемой системы (2)—(4) определим гамильтониан и малый лагранжиан по формулам

$$\tilde{H}(x, u, t, \psi) =< \psi, f(x, u, t) >,$$

$$\tilde{l}(x_1, x_2, \lambda^1) =< \lambda^1, W(x_1, x_2) > .$$

Для допустимого процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ обозначим через $\mathcal{F}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}) = F$ множество тех $\lambda^1 \in \mathbb{R}^w$, $\lambda^1 \neq 0$, для которых существует абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi = \psi_{\lambda^1}(\cdot)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\partial \tilde{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t)) / \partial x, \\ \psi(t_1) &= \partial \tilde{l}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda^1) / \partial \sigma, \end{aligned} \qquad (10)$$

такая, что

$$\psi(t_2) = -\partial \tilde{l}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda^1) / \partial x_2,$$

$$\partial \tilde{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t), \lambda^0) / \partial u = 0 \ 4; \text{О?.2.} \in [t_1, t_2],$$

$$< \psi(t), G(t)v > \leq 0 \forall v \in K, \ \forall t \in [t_1, t_2],$$

$$< \psi(t), G(t)\hat{v}(t) >= 0 \ 4; \text{О}\hat{\mu} - \text{?.2.} \ t \in [t_1, t_2].$$

Здесь $\hat{v}(t) = \dfrac{d\hat{\mu}}{d|\hat{\mu}|}(t)$ — производная Радона—Никодима, $\hat{x}_1 = \hat{x}(t_1)$, $\hat{x}_2 = \hat{x}(t_2)$.

Предположим, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Для $\lambda^1 \in F$ определим на $\tilde{X}$ квадратичную форму формулой

$$\tilde{\Omega}_{\lambda^1}(\zeta, \delta u, \delta\mu) = \frac{\partial^2 \tilde{l}}{\partial (x_1, x_2)^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda) \times$$
$$\times [(\delta x(t_1), \delta x(t_2)), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))] -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial (x, u)^2}(\hat{x}, \hat{u}, t, \psi_{\lambda^1}) \times$$
$$\times [(\delta x(t), \delta u(t)), (\delta x(t), \delta u(t))] dt.$$

Для натурального числа r через $\mathcal{F}_{2,r}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}) = \mathcal{F}_{2,r}$ обозначим множество тех $\lambda^1 \in \mathcal{F}$, для которых индекс сужения формы $\tilde{\Omega}_{\lambda^1}$ на подпространство $\tilde{X}$ не превышает r.

Определение 3. Допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ называется 2-нормальным, если конус $conv\mathcal{F}_{2,r}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является острым.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ 2-НОРМАЛЬНОСТИ

Предположим, что рассматриваемое управление $\hat{u}(t)$ является кусочно-гладким, т.е. имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ конечное число p точек разрыва $\tau_1, \ldots, \tau_p$, и на каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ оно бесконечно дифференцируемо.

Определим векторные поля $\tilde{f}(x, t)$ и $\tilde{f}_{u_i}(x, t)$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ формулами:

$$\tilde{f} = col(f(x, \hat{u}(t), t), 1),$$

$$\tilde{f}_{u_i} = col(\partial f(x, \hat{u}(t), t) / \partial u_i, 0).$$

Положим $b_s^i(t) = (ad^s(\tilde{f})\tilde{f}_{u_i})(\hat{x}(t))$, $i = \overline{1, m}$, где

$$ad^0(\tilde{f})\tilde{f}_{u_i} = \tilde{f}_{u_i},$$

$$ad^s(\tilde{f})\tilde{f}_{u_i} = \frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial x} ad^{s-1}\tilde{f} - \frac{\partial ad^{s-1}\tilde{f}}{\partial x} \tilde{f}_{u_i}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_s(t)$ $(n \times m)$-матрицу со столбцами, полученными из b_s^i удалением $(n+1)$-й координаты. Для целого $s \geq 0$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} d(\delta x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta x dt + \\ &+ (-1)^s \mathfrak{B}_s(t)\delta u(t) dt + G(t) d(\delta\mu)(t). \end{aligned} \qquad (11)$$

Через $\tilde{X}_s$ обозначим линейное подпространство X, состоящее из всех тех $(\zeta, \delta u, \delta\mu)$, что решение системы (11) δx удовлетворяет граничным условиям (8). Для целого $s \geq 0$ на пространстве $\tilde{X}_s$ определим квадратичную форму

$$\tilde{\Omega}^{(s)}_{\lambda^1}(\zeta, \delta u, \delta\mu) = \frac{\partial^2 \tilde{l}}{\partial (x_1, x_2)^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda) \times$$
$$\times \left[(\delta x(t_1), \delta x(t_2)), (\delta x(t_1), \delta x(t_2)) \right] -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{u}, t, \psi_{\lambda^1}) \left[\delta x, \delta x \right] + (-1)^{s+1} \times \right.$$
$$\left. \times 2 < \frac{\partial}{\partial x} \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi_{\lambda^1})^* \delta x, \delta u > \right) dt.$$

Положим

$$\begin{aligned} \gamma(s) = &\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{p} ind \Delta \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} \right)^* \mathfrak{B}_{j-1} \right)_{\tau_i} + \\ &+ ind \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(t_2)^* \mathfrak{B}_{j-1}(t_2) \right). \end{aligned} \qquad (12)$$

Здесь $\Delta M_\tau = M(\tau + 0) - M(\tau - 0)$ — скачок матрицы M в точке τ, а через $indQ$ обозначен индекс квадратичной формы, определяемой симметричной матрицей Q. Отметим, что все матрицы, входящие в (12), симметричны.

Теорема 2. (Достаточные условия 2-нормальности.) Пусть для некоторого r конус $convF_{2,r}$ не является острым. Тогда существует такое $\bar{\lambda}^1 \in F_{2,r}$, что для любого целого $s \geq 0$ выполняются условия:

1) для решения сопряженного уравнения (10) $\bar{\psi}$, соответствующего вектору $\bar{\lambda}^1$, имеет место

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^s}{dt^s}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t)) = 0 \quad \forall t \notin \{\tau_1,\dots,\tau_p\}; \tag{13}$$

2) существует такое подпространство $Y_s \subseteq \tilde{X}_s$, что $\operatorname{codim} Y_s \leq (k-\gamma(s)+1)(r-\gamma(s)) \leq \leq r(k+1)$ и $\tilde{\Omega}^{(s)}_{\bar{\lambda}^1}(\zeta,\delta u,\delta\mu) = 0 \ \forall(\zeta,\delta u,\delta\mu) \in Y_s$;

3) $\gamma(s) \leq r$.

Доказательство

1. Рассмотрим сначала случай, когда управляемая система линейна по управлению. Предположим, что $f(x,u,t) = a_0(x,t) + \sum_{i=1}^m u_i a_i(x,t)$, где a_0, a_i — заданные кусочно-гладкие вектор-функции. Тогда

$$dx(t) = a_0(x,t)dt + \sum_{i=1}^m u_i a_i(x,t)dt + G(t)d\mu(t),$$

$$x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \ \ W(x_1,x_2) = 0; \tag{14}$$

$$H(x,u,t,\psi) = \langle \psi, a_0(x,t)\rangle + \sum_{i=1}^m u_i \langle \psi, a_i(x,t)\rangle.$$

Рассмотрим допустимый процесс $(\hat{x},\hat{u},\delta\mu)$. Не теряя общности, будем считать, что $\hat{u}(t) \equiv 0$. Для него система уравнений в вариациях имеет вид

$$d(\delta x)(t) = A(t)\delta x(t)dt + +B(t)\delta u(t)dt + G(t)d(\delta\mu)(t), \tag{15}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\delta x(t_1) = 0, \ \ \frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\delta x(t_2) = 0.$$

Здесь $\delta u \in L^m_\infty[t_1,t_2]$, $\delta\mu \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})$;

$$A(t) = \frac{\partial a_0(\hat{x}(t),t)}{\partial x}, \ B(t) = (b^1(t),\dots,b^m(t)),$$

$$b^i = a_i(\hat{x}(t),t).$$

Для произвольного $\lambda^1 \in F_{2,r}$ положим

$$D_{\lambda^1}(t) = -\frac{\partial^2 H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\psi_{\lambda^1}(t))}{\partial x^2},$$

$$C_{\lambda^1}(t) = -\frac{\partial^2 H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\psi_{\lambda^1}(t))}{\partial x \partial u}.$$

Тогда

$$\tilde{\Omega}_{\lambda^1}(\zeta,\delta u,\delta\mu) =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{l}}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\lambda)(\delta x(t_1),\delta x(t_2)),(\delta x(t_1),\delta x(t_2)) + $$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(< D_{\lambda^1}\delta x,\delta x > +2 < C^*_{\lambda^1}\delta x,\delta u >\right)dt,$$

где δx — решение системы уравнений в вариациях (15) с начальным условием $\delta x(t_1) = \zeta$.

Предположим, что матрицы $A(t), B(t)$, $C_{\lambda^1}(t), D_{\lambda^1}(t)$ и все их производные могут иметь на отрезке $[t_1,t_2]$ скачки лишь в конечном числе p точек $\tau_1,\dots,\tau_p$.

Обозначим через $\tilde{X}$ линейное подпространство тех $(\zeta,\delta u,\delta\mu) \in X$, для которых выполняются терминальные ограничения из (15).

Предположим, что конус $convF_{2,r}$ не является острым. Тогда по теореме Каратеодори существуют такие $\lambda_i^1 \in F_{2,r}$, $i = \overline{1,k+1}$, что $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i^1 = 0$. Следовательно, $0 \neq \lambda^1_{k+1} = -\sum_{i=1}^k \lambda_i^1$, откуда $\tilde{\Omega}_{\lambda^1_{k+1}}(\zeta,\delta u,\delta\mu) = -\sum_{i=1}^k \tilde{\Omega}_{\lambda_i^1}(\zeta,\delta u,\delta\mu)$. Но $ind\tilde{\Omega}_{\lambda_i^1} \leq \leq r \ \forall i$ и поэтому в $\tilde{X}$ существует такое подпространство Y_0, что $\operatorname{codim} Y_s \leq r(k+1)$ и

$$\tilde{\Omega}_{\bar{\lambda}^1}(\zeta,\delta u\delta\mu) = 0 \ \forall(\zeta,\delta u,\delta\mu) \in Y_0, \ \bar{\lambda}^1 = \lambda^1_{k+1}. \tag{16}$$

Преобразуем форму $\Omega_{\bar{\lambda}^1}$ по Гоху в силу системы (15). При этом для удобства в матрицах-функциях C, D, квадратичной форме $\tilde{\Omega}$ и т.д. в дальнейшем нижний индекс $\bar{\lambda}^1$ будем опускать.

Введем новые переменные $\dot{v} = \delta u$, $v(t_1) = 0$, $\xi = x - Bv$. Функции ξ и v принадлежат пространствам $\tilde{W}^n_{\infty,1}$ и $\tilde{W}^m_\infty$ соответственно и удовлетворяют соотношениям

$$d\xi(t) = A(t)\xi(t)dt + (A(t)B(t) - -\dot{B}(t))v(t)dt + G(t)d(\delta\mu)(t), \tag{17}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\xi(t_1) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)(\xi(t_2) + B(t_2)v(t_2)) = 0. \tag{18}$$

Здесь $\tilde{W}^n_{\infty,1}$ — пространство n-мерных функций, имеющих кусочно-липшицеву первую производную, а $\tilde{W}^m_\infty$ — пространство m-мерных кусочно-липшицевых функций.

Тогда

$$\tilde{\Omega}(\zeta,\delta u,\delta\mu)=\tilde{\Omega}(\zeta,\delta u,v,\delta\mu)=$$
$$=\omega(\zeta,\delta u,v,\delta\mu)+\sum_{i=1}^{q}<\Delta(C^*B)_{\tau_i}v(\tau_i),v(\tau_i)>+$$
$$+2\sum_{i=1}^{q}<\xi(\tau_i),\Delta C_{\tau_i}v(\tau_i))>+$$
$$+2<\xi(t_2),\Delta C(t_2)v(t_2))>+$$
$$+<C^*(t_2)B(t_2)v(t_2),v(t_2))>.$$

Здесь

$$\omega(\zeta,\delta u,v,\delta\mu)=$$
$$=\left\langle\frac{\partial^2\tilde{l}}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat{\sigma},\hat{x}_2,\lambda)(\delta x(t_1),\delta x(t_2)),(\delta x(t_1),\delta x(t_2))\right\rangle+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(\langle D\xi,\xi>+2<P\xi,v\rangle+\langle Qv,v\rangle+\langle Vv,\delta u\rangle\right)dt,$$
$$P=B^*D-\dot{C}^*-C^*A,\ \ V=C^*B-B^*C,$$
$$Q=B^*DB-(C^*AB+B^*AC)+(1/2)C^*\dot{B}-\dot{C}^*B). \tag{19}$$

Отметим, что преобразование Гоха не меняет индекса квадратичной формы.

В силу необходимых условий конечности индекса формы ω на $\tilde{X}$ ([2]) выполняется

$$V(t)=0\ \dot{\forall}t;\ \ Q(t)=Q(t)^*,\ \ Q(t)\geq 0\ \dot{\forall}t. \tag{20}$$

Первое из этих условий называется условием Гоха, а второе — обобщенным условием Лежандра.

Из условий (20) следует, что при $j=1$ все матрицы, входящие в (12), симметричны и что квадратичная форма (19) не зависит явным образом от δu. Учитывая это, перейдем от формы ω к новой квадратичной форме $\tilde{\Omega}^{(1)}$, зависящей только от $(\zeta,v,\delta\mu)\in$ $\in Ker\partial W/\partial x_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\times\tilde{W}^m_{\infty,1}\times\mathbb{C}^*$ и определяемой формулой

$$\tilde{\Omega}^{(1)}(\zeta,v,\delta\mu)=$$
$$=\left\langle\frac{\partial^2\tilde{l}}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat{\sigma},\hat{x}_2,\lambda)(\delta x(t_1),\delta x(t_2)),(\delta x(t_1),\delta x(t_2))\right\rangle+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(\langle D\xi,\xi\rangle+2\langle P\xi,v\rangle+\langle Qv,v\rangle\right)dt.$$

Несложно показать, что при выполнении условий (20) концевое значение нового управления $v(t_2)$ можно положить равным нулю. Поэтому вместо системы (17)—(18) рассмотрим систему

$$\begin{gathered}d\xi(t)=A(t)\xi(t)dt+(A(t)B(t)-\\-\dot{B}(t))v(t)dt+G(t)d(\delta\mu)(t),\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\xi(t_1)=0,\\ \frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)(\xi(t_2))=0.\end{gathered} \tag{22}$$

Далее, применяя условие Лежандра к формам $\tilde{\Omega}^{(1)}$ и $-\tilde{\Omega}^{(1)}$, получаем

$$Q(t)=0\ \dot{\forall}t. \tag{23}$$

Тогда

$$\tilde{\Omega}^{(1)}(\zeta,v,\delta\mu)=$$
$$=\left\langle\frac{\partial^2\tilde{l}}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat{\sigma},\hat{x}_2,\lambda)(\delta x(t_1),\delta x(t_2)),(\delta x(t_1),\delta x(t_2))\right\rangle+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(\langle D\xi,\xi\rangle+2\langle P\xi,v\rangle\right)dt.$$

В силу того, что пространство $\tilde{W}^m_\infty$ плотно в L^m_∞, будем считать, что форма $\tilde{\Omega}^{(1)}$ определена на пространстве $Ker\partial W/\partial x_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\times L^m_\infty\times\mathbb{C}^*$. При этом вернемся к старым обозначениям и вместо ξ и v снова будем писать δx и δu соответственно.

В [2] доказано неравенство

$$\begin{gathered}\operatorname{ind}\tilde{\Omega}\geq\tilde{\Omega}^{(1)}+\sum_{i=1}^{q}\operatorname{ind}\Delta(C^*B)_{\tau_i}+\\+\operatorname{ind}C^*(t_2)B(t_2),\end{gathered} \tag{24}$$

из которого учитывая, что $ind\tilde{\Omega}\leq r$, имеем

$$\gamma(1)=\sum\nolimits_{i=1}^{q}\operatorname{ind}\Delta(C^*B)_{\tau_i}+\operatorname{ind}C^*(t_2)B(t_2)\leq r.$$

Непосредственное дифференцирование приводит к формулам:

$$V(t)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\psi(t)),$$
$$Q(t)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\psi(t)).$$

Из этих равенств в силу (20) вытекает справедливость соотношений (13) при $s=1,2$. Определим векторные поля $\tilde{a}_0$ и $\tilde{a}_i$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом:

$$\tilde{a}_0=col(a_0(x,t),1),$$
$$\tilde{a}_i=col(a_i(x,t),0),\ \ i=\overline{1,m}.$$

Введем новую управляемую систему

$$\begin{gathered}dx(t)=a_0(x,t)dt-\sum_{i=1}^{m}u_i\left(\frac{\partial\tilde{a}_i}{\partial x}\tilde{a}_0-\frac{\partial\tilde{a}_0}{\partial x}\tilde{a}_i\right)\times\\\times(x,t)dt+G(t)d\mu(t),\\ x(t_1)=x_1,\ \ x(t_2)=x_2,\ \ W(x_1,x_2)=0\end{gathered} \tag{25}$$

и выпишем для нее гамильтониан

$$\tilde{H}^{(1)}(x,u,t,\psi)=\langle\psi,a_0(x,t)\rangle-$$
$$-\sum_{i=1}^{m}u_i\left\langle\psi,\left(\frac{\partial\tilde{a}_i}{\partial x}\tilde{a}_0-\frac{\partial\tilde{a}_0}{\partial x}\tilde{a}_i\right)(x,t)\right\rangle.$$

Здесь и далее у полей $ad^s(\tilde{a}_0)\tilde{a}_i$ удалена $n+1$-я координата. Рассмотрим траекторию $(\hat{x},0,\hat{\mu})$ управляемой системы (25). Тогда сопряженная переменная ψ для новой системы очевидно удовлетворяет сопряженному уравнению (10). Непосредственным дифференцированием в силу системы (10) для $i=\overline{1,m}$ получаем тождество

$$\left\langle\bar{\psi}(t),\left(\frac{\partial\tilde{a}_i}{\partial x}\tilde{a}_0-\frac{\partial\tilde{a}_0}{\partial x}\tilde{a}_i\right)(\hat{x}(t),t)\right\rangle\equiv$$
$$\equiv\frac{d}{dt}\langle\bar{\psi}(t),a_i(\hat{x}(t),t)\rangle,$$

из которого вытекает, что

$$\partial\tilde{H}^{(1)}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t))/\partial u_i=-d\langle\bar{\psi},a_i(\hat{x}(t),t)\rangle/dt.$$

Таким образом, гамильтонианы $\tilde{H}$ и $\tilde{H}^{(1)}$ связаны соотношениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t))\equiv\equiv-\frac{\partial\tilde{H}^{(1)}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t)),\tag{26}$$

$$D(t)\equiv-\frac{\partial^2\tilde{H}}{\partial x^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t))\equiv\equiv-\frac{\partial^2\tilde{H}^{(1)}}{\partial x^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t)).\tag{27}$$

Отсюда следует, что квадратичная форма $\tilde{\Omega}^{(1)}$ и система (21) являются соответственно квадратичной формой и системой в вариациях для траектории $(\hat{x},0,\hat{\mu})$ системы (24).

Применив преобразование Гоха к форме $\tilde{\Omega}^{(1)}$ в силу системы (21), получим форму $\tilde{\Omega}^{(2)}$, также определенную на подпространстве, определяемом соответствующей системой уравнений в вариациях.

Условие Гоха для формы $\tilde{\Omega}^{(1)}$ показывает, что все матрицы, входящие в выражение (12) при $j=2$, симметричны. Из (24) получаем, что

$$r\geq ind\tilde{\Omega}^{(2)}+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{p}ind\Delta\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial u}\right)^*\mathfrak{B}_{j-1}\right)_{\tau_i}+$$
$$+ind\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial u}(t_2)^*\mathfrak{B}_{j-1}(t_2)\right),$$

откуда следует, что $\gamma(2)\leq r$. Далее, из (16) вытекает, что форма $\tilde{\Omega}^{(1)}$ также обращается в нуль на подпространстве конечной коразмерности, откуда так же, как и выше, получаем

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{H}^{(1)}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t))=0\ \forall t.$$

Из этого равенства в силу (26)—(27) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,\bar{\psi}(t))=0\ \forall t,$$

а это и есть условие (13) при $s=3$. Таким образом, последовательно применяя преобразование Гоха для форм $\tilde{\Omega}^{(2)},\tilde{\Omega}^{(3)},\ldots$ и т.д., завершаем рассмотрение системы (14).

2. Вернемся к общей (не обязательно линейной по управлению) управляемой системе (2)—(4). Определим отображения $a_i:\mathbb{R}^n\times[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n$, $i=\overline{0,m}$, следующим образом: $a_0(x,t)=f(x,\hat{u},t)$, $a_i(x,t)=\partial f(x,\hat{u},t)/\partial u_i$ $\forall t\in[t_1,t_2]$, $i=\overline{1,m}$. Легко видеть, что система в вариациях и квадратичная форма $\tilde{\Omega}_{\bar{\lambda}^1}$ для управляемых систем (14) и (2)—(4) совпадают и вместо системы (2)—(4) можно рассматривать систему (14) и тройки $(\hat{x},0,\hat{\mu})$ для системы (14). При этом отображения $a_i(\cdot)$, $i=\overline{0,m}$ зависят от t кусочно-гладким образом. Теорема доказана.

4. БЛИЗОСТЬ НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ 2-НОРМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Важнейшей характеристикой необходимых условий второго порядка является величина "зазора" между ними и достаточными условиями второго порядка. Оказывается, что в 2-нормальном случае указанный "зазор" является минимально возможным применительно к необходимым условиям из теоремы 1.

Определение 4. Концевые ограничения (4) называются регулярными, если $rank\,\frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=w.$

Теорема 3. Предположим, что допустимый процесс $(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$ является 2-нормальным для задачи (1)—(4) и для него выполняются необходимые условия второго порядка из теоремы 1.

Предположим также, что концевые ограничения регулярны, матрица $\partial f(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)/\partial u$ имеет ранг m при почти всех t и существует непрерывная n-мерная вектор-функция θ такая, что $\theta(t)G(t)>0\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i(t)G_{ij}(t)>0\ \forall j=\overline{1,k}\right)$ и $\theta(t)\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\equiv0$ для п.в. $t\in[t_1,t_2]$. Тогда существуют такие вектор $v \in \mathbb{R}^w$ и вектор-функция $\beta(t) \in L_\infty^n[t_1, t_2]$, что для любого $\varepsilon > 0$ тройка $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ доставляет строгий конечномерный минимум в следующей возмущенной задаче:

$$W_0(x_1, x_2) + \varepsilon \mid (x_1, x_2) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \mid^2 + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left(f^0(x(t), u(t), t) + \varepsilon \mid x(t) - \hat{x}(t) \mid^2 \right) dt + \\ + \int_{[t_1, t_2]} g^0(t) d\mu(t) \to \min, \tag{28}$$

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t)dt + \\ + \varepsilon\beta(t) \mid x(t) - \hat{x}(t) \mid^2 dt + G(t)d\mu(t), \\ t \in [t_1, t_2], \tag{29}$$

$$W(x_1, x_2) + \varepsilon v \mid (x_1, x_2) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \mid^2 = 0, \ \mu \in \mathbb{K}. \tag{30}$$

Доказательство. В силу 2-нормальности процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ конус $conv\Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является острым, поэтому его поляра $\left(\Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})\right)^0$ имеет непустую внутренность.

Возьмем произвольное $v \in int\left(\Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})\right)^0$. Рассмотрим конус $E = \{(\lambda^0, e) : \lambda^0 \geq 0, e = \partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_1\}$. Покажем, что конус $convE$ острый. Предположим противное. Тогда по теореме Каратеодори $\exists \lambda_i = (0, y_i) \in \Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}) : \sum_i \dfrac{\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda_i)}{\partial x_1} = 0,$ откуда $\dfrac{\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0$, где $\lambda = \sum_i \lambda_i$, причем $\lambda^0 = 0$, $\lambda \neq 0$ в силу остроты конуса $conv\Lambda_d$. Поэтому в силу (5) и (6) $\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_2 = 0$, откуда в силу регулярности концевых ограничений $\lambda = 0$. Полученное противоречие доказывает остроту конуса $convE$.

Из остроты конуса $convE$ вытекает, что его поляра E^0 имеет непустую внутренность. Возьмем $(\lambda^0, e) \in int(E^0)$. Пусть (β^0, β) — решение задачи Коши

$$\dot{\beta}^0 = \left\langle \frac{\partial f^0}{\partial x}(t), \beta \right\rangle, \\ \dot{\beta} = \frac{\partial f}{\partial x}(t)\beta, \\ \beta^0(t_1) = \lambda^0, \ \beta(t_1) = -e.$$

Легко видеть, что $\left\langle (\beta^0(t), \beta(t)), (\lambda^0, -\psi(t)) \right\rangle \equiv C = \text{const}$ для любого решения задачи (5). Действительно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle (\beta^0(t), \beta(t)), (\lambda^0, -\psi(t)) \right\rangle = \\ = \lambda^0 \left\langle \frac{\partial f^0}{\partial x}(t), \beta(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(t)\beta(t), \psi(t) \right\rangle + \\ + \left\langle \beta(t), \frac{\partial H}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t)) \right\rangle = 0$$

для любой вектор-функции ψ, являющейся решением (5).

Уменьшая по модулю (λ^0, e), добьемся того, чтобы $\mid \beta^0(t) \mid < 1$. Тогда $\lambda^0 - \left\langle \psi(t), \beta(t) \right\rangle > \lambda^0 \beta^0(t) - \left\langle \psi(t), \beta(t) \right\rangle = (\lambda^0)^2 + e^2 \geq 0 \ \forall \ t$ для любого решения задачи (5). Кроме того, для решений системы (7) если $\delta x = 0$, то $\dfrac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta u(t)dt + G(t)d(\delta\mu)(t) = 0$. Поэтому из существования функции θ такой, что $\theta(t)G(t) > 0$ и $\theta(t)\dfrac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) \equiv 0$ для п.в. $t \in [t_1, t_2]$ вытекает, что для решений системы (7) если $\delta x = 0$, то $\delta\mu = 0$, а вследствие полноты ранга матриц $\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)/\partial u$ и $\delta u = 0$. Тогда в силу (9) для возмущенной задачи (28)—(30) выполнены достаточные условия строгого конечномерного минимума ([3, теорема 7.2]). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arutyunov A., Jacimovic V., Pereira F.* Second Order Necessary Conditions for Optimal Impulsive Control Problems. J. on Dynamical. and Control Systems., Vol. 9 (2003), № 1, P. 131—153.

2. *Арутюнов А.В., Ячимович В.* 2-нормальные процессы управляемых динамических систем. Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1017—1029.

3. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.

Поступила в редакцию 13.11.2006