УДК 6213788265358

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

И. С. Максимова, В. Н. Розова

Российский университет дружбы народов

Настоящая работа посвящена изучению управляемости линейных систем $\dot{x} = Ax + B(t)u$, где $A = \mathrm{const}$, $B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$, $t \in [t_0, T]$.
Управляющие воздействия имеют структуру указанного вида в задачах об оптимальных режимах полета летательного аппарата с различными типами силовых установок (например, $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ могут характеризовать угол между вектором тяги и вектором скорости).
Использование критериев управляемости общего вида позволило получить ряд необходимых и достаточных условий управляемости для поставленной задачи, сформулированных в виде соответствующих теорем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную неавтономную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad (1)$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$, $B(t)$ — матрица размера $n \times r$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, $A(t) \in C^1[t_0, T]$, $B(t) \in C^1[t_0, T]$, $t \in [t_0, T]$, $u(\cdot) \in V = \{u(t) \in R^r \mid u(\cdot) \in L_\infty[t_0, T]\}$.

Решением системы (1) при $t \in [t_0, T)$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая почти всюду на $[t_0, T)$ системе (1). Далее будем считать, что все равенства и включения имеют место почти всюду на $[t_0, T)$. Известно, что при любой фиксированной функции $u(t) \in V$ задача Коши с условием $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [t_0, T)$ имеет на $[t_0, T)$ единственное решение, которое обозначим $x(t, x_0, t_0, u)$. Фундаментальную матрицу решений системы $\dot{x} = A(t)x$ обозначим $X(t)$.

Отождествим множество линейных систем (1) с множеством пар матриц (A, B). Тогда,пара (A, B) (или, что то же самое, система (1)) называется полностью управляемой на отрезке $[t_0, T]$, если для любых $x_0, x_1 \in R^n$ найдется измеримое и ограниченное на $[t_0, T]$ управление $u(t)$, переводящее систему (1) из состояния x_0 в момент времени t_0 в состояние x_1 в момент T.

В данной работе исследуется управляемость системы (1) в случае, когда $A = const$, ограничений на управление нет, т.е. значения управления $u(t)$ $\forall t \in [t_0, T)$ принадлежат R^r без дополнительных условий и

$$B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \qquad (2)$$

где B_1, B_2 — $n \times r$-матрицы, $B_1, B_2 = const$.

Системы дифференциальных уравнений, описывающие основные динамические маневры, характерные для двигателей малой тяги такие, как межпланетный перелет, удержание спутника в заданном шаровом слое, поворот плоскости орбиты спутника, имеют вид (1) с матрицей $B(t)$ (2). Управляющим воздействием является в таких случаях реактивное ускорение [1].

Сформулируем задачу:

Дана линейная управляемая система

$$\dot{x} = Ax + B(t)u,$$

где $u(t) \in R^r$, $r \le n$, $x \in R^n$, A — матрица $n \times n$, элементы которой не зависят от t. Матрица A имеет следующие собственные значения: $\lambda_1, ..., \lambda_k$, $\pm ip_1, ..., \pm ip_r$, где $p_j \ne 0$, $j = 1, \ldots r$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, ..., k$, $k + 2r = n$. $B(t) - n \times r$ — матрица вида (2). $\omega, p_j, j = 1, \ldots, r$ — заданные действительные числа.

Задача:

Найти условия на матрицы A и B_1, B_2 при которых система (1) будет полностью управляема на $[0, T]$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В случае $n = 3, r = 1$ условия полной управляемости можно получить непосредственно [2]. Однако, при увеличении размерности на этом пути возникают существенные трудности. Поэтому в настоящей работе рассмотрено несколько подходов к решению поставленной задачи.

Для простоты изложения в пункте 2.1 будет приведено решение для случая, когда матрица $B(t)$ имеет диагональный вид, при размерностях $n = 3, r = 3$. Затем, в п. 2.2 рассмотрим решение задачи для диагональной матрицы $B(t)$ при размерностях n, r, соответственно, и в конце приведем решение для общего случая.

2.1. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПРИ $n = 3, r = 3$

Для решения задачи о полной управляемости системы (1) на отрезке $[0, T]$ воспользуемся теоремой 2.1 [3]. Приведем ее формулировку.

Теорема 2.1. Следующие свойства эквивалентны:

a) пара (A, B) полностью управляема на отрезке $[0, T]$;

b) краевая задача

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)B^T(t)y, x(0) = 0,$$

$$\dot{y} = -A^T(t)y, x(T) = 0$$

имеет только тривиальное решение;

c) существует симметричная, абсолютно непрерывная на $[0, T]$ $n \times n$-матрица $V(t)$, такая, что $V(0) \le 0$, $V(T) > 0$ и при почти всех $t \in [0, T]$ выполнено неравенство $(LV)(t) \le \le B(t)B^T(t)$, где

$$(LV)(t) = \frac{d}{dt}V(t) - A(t)V(t) - V(t)A^T(t).$$

В качестве матрицы $V(t)$ возьмем матрицу $W(t)$, определенную равенством

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} X(t, s)B(s)B^T(s)X^T(t, s)ds. \quad (3)$$

Проверим все условия теоремы 2.1. Условие $W(0) \le 0$ очевидно выполнено.

Неравенство $(LV)(t) \le B(t)B^T(t)$, где

$$(LV)(t) = \frac{d}{dt}V(t) - A(t)V(t) - V(t)A^T(t)$$

становится равенством

$$B(t)B^T(t) = B(t)B^T(t)$$

при почти всех t.

Осталось проверить свойство $W(T) > 0$. Выпишем матрицу $W(T, 0)$, определенную равенством (3) для поставленной задачи, где:

$$X(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda T} & 0 & 0 \\ 0 & \cos pT & \sin pT \\ 0 & \sin pT & -\cos pT \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}(T) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda T} & 0 & 0 \\ 0 & \cos pT & \sin pT \\ 0 & \sin pT & -\cos pT \end{pmatrix},$$

$$B(T) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix},$$

где $b_i = b_{i1}\cos\omega t + b_{i2}\sin\omega t$, $i = 1, 2, 3.$

Итак,

$$W(T, 0) = X(T) \times$$

$$\times \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-2\lambda s}b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2\cos^2 ps + b_3^2\sin^2 ps & b_2^2\sin ps \cdot \cos ps - b_3^2\cos ps \cdot \sin ps \\ 0 & b_2^2\sin ps \cdot \cos ps - b_3^2\cos ps \cdot \sin ps & b_2^2\sin^2 ps + b_3^2\cos^2 ps \end{pmatrix} ds \times X^T(T),$$

$$W(T, 0) =$$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-2\lambda s - 2\lambda T}b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2\cos^2 pT + b_3^2\sin^2 pT & b_2^2\sin pT \cdot \cos pT - b_3^2\cos pT \cdot \sin pT \\ 0 & b_2^2\sin pT \cdot \cos pT - b_3^2\cos pT \cdot \sin pT & b_2^2\sin^2 pT + b_3^2\cos^2 pT \end{pmatrix} ds.$$

Итак, относительно матрицы $B(t)$ предположим, что $b_3 = b_2$. Тогда матрица $W(T, 0)$ примет диагональный вид.

Имеем

$$W(T, 0) = \int_0^T \begin{pmatrix} e^{2\lambda T}e^{-2\lambda s}b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2^2 \end{pmatrix} ds.$$

По условию теоремы 2.1 [3] квадратичная форма, соответствующая данной матрице, должна быть положительно определенной. Получим, что для положительной определенности квадратичной формы $< x^T W(T, 0)x >$ должны выполняться следующие условия:

$$b_{i1}\cos\omega t + b_{i2}\sin\omega t \ne 0, i = 1, 2, t \in [0, T].$$

Тогда можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 1. Линейная система $\dot{x} = Ax + B(t)u$, где $x \in R^3$, $u \in R^3$, матрица $A = \text{const}$ и имеет следующие собственные значения: λ, $\pm ip$, где $p \neq 0$, $\lambda \in R$, $B(t)$ — диагональная матрица размера 3×3, с элементами вида

$$b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t,$$

$i = 1, 2, 3$, ω, p — заданные действительные числа, полностью управляема на $[0, T]$ тогда и только тогда, когда $b_3 = b_2$ и $b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t \neq 0$, $i = 1, 2, t \in [0, T]$.

2.2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПРИ $n = r = n$

Пусть $n = r = n$.

В качестве матрицы $V(t)$ возьмем матрицу, $W(T, 0)$ определенную равенством (3). Выпишем данную матрицу и проверим выполнение условий теоремы 2.1 [3]. Рассмотрим однородную систему $\dot{x} = A(t)X$.

По условию матрица A имеет следующие собственные значения:

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\pm ip_1, \ldots, \pm ip_r$, где $p_j \neq 0$, $j = 1, \ldots r$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, $k + 2r = n$.

Известно [4], что в этом случае матрицу A можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_r \end{pmatrix},$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

$$P_j = \begin{pmatrix} 0 & -p_j \\ p_j & 0 \end{pmatrix}, j = 1, \ldots, r.$$

Непосредственно проверяется, что фундаментальной матрицей данной системы является матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} \tilde{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_r \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

$$K_j = \begin{pmatrix} \cos p_j t & \sin p_j t \\ \sin p_j t & -\cos p_j t \end{pmatrix}, j = 1, \ldots, r$$

Матрица $B(t)$ имеет вид:

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{pmatrix},$$

где $b_i = b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t$, $i = 1, :, n$.

Аналогично пункту 2.1 предположим относительно элементов матрицы $B(t)$ следующее: пусть $b_{k+2} = b_{k+1}, \ldots, b_n = b_{n-1}$.

Таким образом, матрица $W(T, 0)$ имеет вид:

$$W(T,0) = \int_0^T \begin{pmatrix} b_1^2 e^{2\lambda_1 T} e^{-2\lambda_1 s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_k^2 e^{2\lambda_k T} e^{-2\lambda_k s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{k+1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1}^2 \end{pmatrix} ds.$$

Аналогично случаю, рассмотренному в пункте 2.1, проверяется выполнение условия $W(0) \leq 0$ и неравенства $(LV)(t) \leq B(t)B^T(t)$.

Итак, для $W(T) > 0$ необходимо и достаточно выполнения условий:

$$b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t \neq 0, i = 1, \ldots, k$$

$$b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t \neq 0,$$

$$i = k+1, k+3, \ldots, n-1, t \in [0, T].$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Дана линейная неавтономная система

$$\dot{x} = Ax + B(t)u,$$

где $x \in R^n$, $u \in R^n$, A — $n \times n$-матрица, имеющая следующие собственные значения: $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, $\pm ip_1, \ldots \pm ip_r$, где $p_j \neq 0$, $j = 1, \ldots r$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, $k + 2r = n$. $B(t)$ — диагональная $n \times n$-матрица с элементами вида

$$b_i = b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t, i = 1, \ldots, n,$$

где ω, p — заданные действительные числа.

Пара (A, B) полностью управляема на отрезке $[0, T]$, тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$b_{k+2} = b_{k+1}, \ldots, b_n = b_{n-1},$$
$$b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t \neq 0, \ \ i = 1, \ldots, k,$$
$$b_{i1} \cos \omega t + b_{i2} \sin \omega t \neq 0,$$
$$i = k+1, k+3, \ldots, n-1, \ \ t \in [0, T].$$

2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Теперь перейдем к рассмотрению произвольной матрицы $B(t)$ размера $n \times r$.

Как и в пункте 2.1, в качестве матрицы $V(t)$ возьмем матрицу $W(T, 0)$, определенную равенством (3). Выпишем $W(T, 0)$ и проверим выполнение условий теоремы 2.1 [3]. Аналогично пункту 2.1, проверяются все условия теоремы, за исключением положительной определенности квадратичной формы:

$$h^T W(T, 0) h, \ \forall h \in R^n, \tag{4}$$

которая рассмотрена ниже.

Так как матрица $W(T, 0)$ определена формулой (3), то квадратичная форма (3) имеет вид

$$\begin{gathered}\int_0^T h^T W(T, 0) h ds = \\ = \int_0^T h^T X(T) X^{-1}(s) b(s) B^T(s) X^{-1T}(s) X^T(T) h ds.\end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим квадратичную форму вида

$$\int_0^T h^T Q Q^T h dt$$

и выясним, когда она является положительно определенной.

Пусть $Q = \mathrm{const}$ и Q — квадратная матрица, тогда

1) $\left\langle h^T Q, Q^T h \right\rangle > 0$ тогда и только тогда, когда $\det Q \neq 0$.

Пусть $Q = Q(t)$.

2) Если при некотором t вектор h является собственным вектором матрицы $Q(t)$, т.е. $Q^T(t) h = 0$ и множество этих t имеет меру нуль, то имеем $\int_0^T h^T Q(t) Q^T(t) h dt > 0$.

3) Если множество точек t, для которых $Q^T(t) h = 0$, есть некоторый интервал Δ или объединение интервалов, и $\left\langle h^T Q(t), Q^T(t) h \right\rangle = 0$ при $t \in \Delta$, то

$$\int_0^T h^T Q(t) Q^T(t) h dt =$$
$$= \int_{[0,T] \setminus \Delta} h^T Q(t) Q^T(t) h dt + \int_{\Delta} h^T Q(t) Q^T(t) h dt =$$
$$= \int_{[0,T] \setminus \Delta} h^T Q(t) Q^T(t) h dt > 0$$

4) Если $\forall t \in [0, T]$ $\det Q(t) = 0$ и $Q(t) \neq 0$ (в случае, когда матрица $Q(t)$ квадратная), то $\forall t$ $\exists h_t \neq 0 : Q^T(t) h_t = 0$, и вопрос о положительной определенности квадратичной формы $\left\langle h_t^T Q(t), Q^T(t) h_t \right\rangle$ сводится к п. 3).

Теперь применим данный результат к квадратичной форме (5). Пусть $\forall h \in R^n$ обозначим $h^T X(T) = \hat{h}$, тогда

$$\int_0^T h^T W(T, 0) h ds =$$
$$= \int_0^T \hat{h}^T X^{-1}(s) B(s) B^T(s) X^{-1T}(s) \hat{h} ds =$$
$$= \int_0^T \hat{h}^T Q(s) Q^T(s) \hat{h} ds,$$

где $Q(s) = X^{-1}(s) B(s)$. Квадратичная форма

$$\left\langle \hat{h}^T X^{-1}(s) B(s), B^T(s) X^{-1T} \hat{h} \right\rangle$$

является положительно определенной, когда не существует такого вектора $h \neq 0$, что $B^T(s) X^{-1T}(s) h = 0$, т.е. когда столбцы (или строки) матрицы $B^T(s) X^{-1T}(s)$ линейно независимы.

Теперь получим условия на матрицу $B(s)$, при которых система (1) будет полностью управляема.

Если строки матрицы $Q(s) = X^{-1}(s) B(s)$ линейно независимы, то ранг матрицы $Q(s)$ равен n. Так как $X^{-1}(s)$ — невырожденная матрица, то домножив $Q(s)$ на $X(s)$, получим, что ранг матрицы $X(s) Q(s) = B(s)$ должен быть равен n.

Итак, достаточное условие полной управляемости системы (1) на отрезке $[0, T]$ можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 2. Дана линейная неавтономная система

$$\dot{x} = Ax + B(t) u,$$

где $\tilde{o} \in R^n$, $u \in R^r$, A — $n \times n$-матрица, имеющая следующие собственные значения: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\pm i p_1, \ldots, \pm i p_r$, где $p_j \neq 0$, $j = 1, \ldots r$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, $k + 2r = n$. $B(t)$ — матрица специального вида:

$$B_1(t) \cos \omega t + B_2(t) sin \omega t,$$

B_1, B_2 — $n \times r$-матрицы, где ω, $p_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, r$ — заданные действительные числа.

Пусть $\operatorname{rang} B(t) = n$, тогда пара (A, B) полностью управляема на отрезке $[0, T]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен ряд необходимых и достаточных условий полной управляемости рассматриваемой системы в предположении, что матрица A имеет действительные и чисто мнимые собственные значения. Исследование можно продолжить и в случае различных вариантов набора собственных значений матрицы A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасов Е.В.* Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. М., 1963.

2. *Максимова И.С., Розова В.Н.* // Тезисы докладов XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии. М., 2006. С. 64.

3. *Култышев С.Ю., Тонков Е.Л.* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. XI, № 7. С. 1206—1216.

4. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М., 1969.

Поступила в редакцию 13.11.2006