УДК 517.947

ОЦЕНКА ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. С. Рябенко

Воронежский государственный университет

В работе изучается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности.
Доказаны теоремы существования и единственности решения, а также построена асимптотическая оценка решения при $t \to \infty$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathrm{v}(\overline{x},t)}{\partial t} - a^2\left(x_3\right)\Delta v(\overline{x},t) = g(\overline{x},t) \qquad (1.1)$$

с начальным и граничными условиями

$$\mathrm{v}(\overline{x},t)\,|_{t=0} = 0; \qquad (1.2)$$

$$\mathrm{v}(\overline{x},t)\,|_{x_3=0} = \mathrm{v}(\overline{x},t)\,|_{x_3=\infty} = 0, \qquad (1.3)$$

где $t > 0$, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2) \in R^2$, $x_3 \in [0,\infty)$, $a^2\left(x_3\right) \in C\left[0,\infty\right)$, причем существуют постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, такие что $\varepsilon_1 < \left|a(x_3)\right| < \varepsilon_2$.

Известно, что при произвольном $a^2(x_3)$ решение задачи (1.1)—(1.3) в явном виде не может быть построено. Однако в ряде случаев возникает необходимость изучить, как себя ведет решение задачи (1.1)—(1.3) при больших значениях времени t.

Для изучения поведения решения $v(\overline{x},t)$ задачи (1.1)—(1.3) при $t \to \infty$ применен принцип локализации, который позволяет провести это изучение с помощью исследования контуров потери аналитичности образа Фурье—Лапласа решения задачи (1.1)—(1.3) в окрестности точки поворота.

Обозначим через $u(x_3,\gamma,s) = L_{t\to\gamma}[F_{x_1,x_2\to s_1,s}[v(\overline{x},t)]]$ образ Фурье—Лапласа функции $v(\overline{x},t)$. Очевидно, что образ Фурье—Лапласа $u(x_3,\gamma,s)$ решения задачи (1.1)—(1.3) является решением следующей задачи

$$\frac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2} - (\gamma b^2(x_3) + |s|^2)u(x_3,\gamma,s) = f(x_3,\gamma,s)_x; \qquad (1.4)$$

$$u(x_3,\gamma,s)\Big|_{x_3=0} = u(x_3,\gamma,s)\Big|_{x_3=\infty} = 0, \qquad (1.5)$$

где $b^2(x_3) = a^{-2}(x_3)$, $s = (s_1, s_2)$, $|s|^2 = s_1^2 + s_2^2$, $\gamma \in \mathbb{C}$,

$$f(x_3,\gamma,s) = -a^{-2}(x_3)L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}\left[g(\overline{x},t)\right]\right].$$

Выделение контуров потери аналитичности по переменной γ для функции $u(x_3,\gamma,s)$ будет проводится при помощи априорных оценок решения задачи (1.4)—(1.5).

Сформулируем условия, которые будут использоваться в работе.

Условие 1. Функция $p(\overline{x},t)$ удовлетворяет следующим условиям

1. $p(\overline{x},t)$ непрерывна по совокупности переменных $x' = (x_1,x_2)$, $x_3 \geq 0$, $t \geq 0$.

2. $p(\overline{x},t)e^{\delta t}$ принадлежит пространству $L_1(R_+^3)$ при некотором $\delta > 0$.

Условие 2. Функция $p(\overline{x},t)$ удовлетворяет следующим условиям

1. Для функций $\dfrac{\partial^{i+j+k}p(\overline{x},t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i}$, где $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq k,j \leq 2$ выполнено условие 1.

2. Функции $\displaystyle\int_{R^2}\int_0^\infty \left|\frac{\partial^{i+j+k}p(\overline{x},t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i}\right| e^{\delta t}dx_1dx_2dt$, $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq k,j \leq 2$ при некотором $\delta > 0$ принадлежат пространству $L_2(R_+)$.

3. Справедливо равенство $p(\overline{x},t)\big|_{t=0} = 0$.

Условие 3. Функция $p(\overline{x},t)$ удовлетворяет следующим условиям

1. Для функций $\dfrac{\partial^{i+j+k}p(\overline{x},t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i}$, где $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq k,j \leq 4$ выполнено условие 1.

2. Функции $\displaystyle\int_{R^2}\int_0^\infty \left|\frac{\partial^{i+j+k}p(\overline{x},t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i}\right| e^{\delta t}dx_1dx_2dt$, $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq k,j \leq 4$ при некотором $\delta > 0$ принадлежат пространству $L_2(R_+)$.

3. Справедливы равенства $p(\overline{x},t)\big|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial p(\overline{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Условие 4. Функция $p(\overline{x},t)$ удовлетворяет следующим условиям. Пусть при $\operatorname{Re}\gamma > a_1 > 0$ преобразования Фурье—Лапласа $L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}\left[\dfrac{\partial^i p(\overline{x},t)}{\partial t^i}\right]\right]$, $L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}\left[\dfrac{\partial^j p(\overline{x},t)}{\partial x_k^j}\right]\right]$ функций $\dfrac{\partial^i p(\overline{x},t)}{\partial t^i}$, $\dfrac{\partial^j p(\overline{x},t)}{\partial x_k^j}$, $0 \le i \le 1$, $0 \le j \le 2$, $1 \le k \le 3$ принадлежат пространству $L_2(R_+)$ по переменной x_3 равномерно по $s \in R^2$.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.4)—(1.5)

Теорема 2.1. Пусть $u(x_3,\gamma,s)$ является решением задачи (1.4)—(1.5) и функции $f(x_3,\gamma,s)$, $u(x_3,\gamma,s)$, $\dfrac{\partial u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x_3 равномерно по $\gamma \in C : 0 \le \varphi \le \pi - \varepsilon^0$ $(\varphi = \arg\gamma, \varepsilon^0 > 0)$ и $s \in R^2$, тогда для любых $\gamma \in C : 0 \le \varphi \le \pi - \varepsilon^0$ $(\varphi = \arg\gamma, \varepsilon^0 > 0)$ и $s \in R^2$ справедлива оценка $\left\|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right\| + \sqrt{|\gamma| + |s|^2}\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right\| + (|\gamma| + |s|^2)\|u\| \le c\|f\|$, причем $\varepsilon^0 > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым.

Доказательство. Умножим (1.4) скалярно на $\overline{u}$ и проинтегрируем по x_3 по интервалу $[0,\infty)$, тогда с учетом условий (1.5) получаем, что

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|^2 dx_3 + \int_0^\infty (\gamma b^2(x_3) + |s|^2)|u|^2 dx_3 = -(f,u). \quad (2.1)$$

Из равенства (2.1) мы получаем, что при $0 \le |\varphi| \le \pi - \varepsilon^0$ верно следующее неравенство ($\varphi = \arg\gamma$, ε^0 — малое положительное число)

$$b_0^2\varepsilon|\gamma|\|u\|^2 \le |(f,u)|,\ \varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0) > 0, \qquad b_0^2 = \inf_{x_3\in[0,\infty)} b^2(x_3). \quad (2.2)$$

Из (2.1) при помощи неравенства (2.2) и очевидной оценки

$$|(f,u)| \le \|f\|\cdot\|u\| \le 0{,}5\{\varepsilon_1^{-1}\|f\|^2 + \varepsilon_1\|u\|^2\} \quad (2.3)$$

получаем оценку

$$\sqrt{(|s|^2 + |\gamma|)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\| + (|s|^2 + |\gamma|)\|u\| \le c\|f\|. \quad (2.4)$$

Из (1.4) и неравенства (2.4) получаем оценку

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right\| \le c\|f\|. \quad (2.5)$$

Из оценок (2.4) и (2.5) следует утверждение теоремы.

Теорема 2.2. Пусть $u(x_3,\gamma,s)$ является решением задачи (1.4)—(1.5) и функции $f(x_3,\gamma,s)$, $u(x_3,\gamma,s)$, $\dfrac{\partial u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x_3 равномерно по γ и s, тогда для любого $\delta \in (0;1)$ при $|\gamma| < (1-\delta)b_1^{-2}|s|^2$ $(b_1^2 = \sup\limits_{x_3\in[0,\infty)} b^2(x_3))$ справедлива оценка $\left\|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right\| + \sqrt{|\gamma| + |s|^2}\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right\| + (|\gamma| + |s|^2)\|u\| \le c\|f\|$.

Доказательство. Из неравенства (2.1) следует оценка

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|^2 dx_3 + \int_0^\infty (-|\gamma|b_1^2 + |s|^2)|u|^2 dx_3 \le |(f,u)|, \quad (2.6)$$

где $b_1^2 = \sup\limits_{x_3\in[0,\infty)} b^2(x_3)$. Утверждение теоремы 2.2 получено с помощью неравенства (2.3) и неравенства (2.6).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.4)—(1.5)

Лемма 3.1. Пусть $\sigma \in C$, $\sigma_1 = \operatorname{Re}\sigma > 0$. $h(x_3) \in L_2(R_+^1)$, тогда у задачи $\dfrac{\partial^2 u(x_3)}{\partial x_3^2} - \sigma^2 u(x_3) = -h(x_3)$, $u(x_3)\big|_{x_3=0} = u(x_3)\big|_{x_3=\infty} = 0$ существует единственное решение $u(x_3) \in H^2(R_+^1)$, которое имеет вид $u(x_3) = I_1(x_3) + I_2(x_3) - I_3(x_3)$, где

$$I_1(x_3) = \int_{x_3}^\infty \frac{h(y)}{2\sigma}\exp[-\sigma(y - x_3)]dy;$$

$$I_2(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{h(y)}{2\sigma}\exp[-\sigma(x_3 - y)]dy;$$

$$I_3(x_3) = \int_0^\infty \frac{h(y)}{2\sigma}\exp[-\sigma(x_3 + y)]dy.$$

Доказательство леммы 3.1 содержится в [1].

Лемма 3.2. Пусть функция $g(\overline{x},t)$ удовлетворяет условию 2, тогда при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ и любом s справедлива оценка $\|f(x_3,\gamma,s)\| \le c(1+|\gamma|)^{-1}(1+|s|^2)^{-1}$. Здесь записана норма в пространстве $L_2([0,\infty))$ по переменной x_3.

Доказательство. При помощи интегрирования по частям может быть показана справедливость следующего неравенства

$$\left| L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}\left[g(\overline{x},t) \right] \right] \right| \le$$
$$\le \frac{c}{(1+|\gamma|)(1+|s|^2)} \sum_{i,j,k} \left| \int_{R^2} \int_0^\infty \frac{\partial^{i+j+k} g(\overline{x},t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i} e^{\delta t} dx_1 dx_2 dt \right|, \qquad (3.1)$$

где $0 \le i \le 1,\ 0 \le j \le 2,\ 0 \le k \le 2$.

Из оценки (3.1) и условия 2 следует, что справедлива оценка $\left\| L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}\left[g(\overline{x},t) \right] \right] \right\| \le$ $\le c(1+|\gamma|)^{-1}(1+|s|^2)^{-1}$, но так как $f(x_3,\gamma,s) =$ $= -a^{-2}(x_3) L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}\left[g(\overline{x},t) \right] \right]$, и $\varepsilon_1 \le |a(x_3)| \le \varepsilon_2$ то верна оценка

$$\|f\| \le c(1+|\gamma|)^{-1}(1+|s|^2)^{-1}. \qquad (3.2)$$

Лемма 3.3. Пусть функция $g(\overline{x},t)$ удовлетворяет условию 3, тогда при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ и любом s справедлива следующая оценка $\|f\| \le c(1+|\gamma|)^{-2}(1+|s|^2)^{-2}$.

Доказательство. Доказательство леммы 3.3 проводится аналогично доказательству леммы 3.2.

Теорема 3.1. Пусть функция $g(\overline{x},t)$ удовлетворяет условию 2, $\varepsilon^0 > 0$ — сколь угодно мало. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что при $\gamma \in D$, где $D = (\gamma \in C : \gamma \ne 0, 0 \le |\varphi| < \pi - \varepsilon^0 \cap (\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon)$ и любом s задача (1.4)—(1.5) имеет решение $u(x_3,\gamma,s)$, такое что $u(x_3,\gamma,s)$, $\dfrac{\partial u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}$ принадлежат пространству $L_2([0;\infty))$ по переменной x_3.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2} - ((1-\varepsilon)(\gamma b_1^2 + |s|^2) + $$
$$+ \varepsilon(\gamma b^2(x_3) + |s|^2)) u(x_3,\gamma,s) = f(x_3,\gamma,s); \qquad (3.3)$$

$$u(x_3,\gamma,s)\big|_{x_3=0} = u(x_3,\gamma,s)\big|_{x_3=\infty} = 0. \qquad (3.4)$$

При $\varepsilon = 1$ из задачи (3.3)—(3.4) получаем задачу (1.4)—(1.5), а при $\varepsilon = 0$ следующую задачу с постоянными по x_3 коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2} - (\gamma b_1^2 + |s|^2) u(x_3,\gamma,s) = f(x_3,\gamma,s); \quad (3.5)$$

$$u(x_3,\gamma,s)\big|_{x_3=0} = u(x_3,\gamma,s)\big|_{x_3=\infty} = 0. \qquad (3.6)$$

Из леммы 3.1 следует, что при $\gamma \in D$ и $s \in R^2$ задача (3.5)—(3.6) имеет решение. Разрешимость задачи (3.3)—(3.4) доказывается при помощи метода продолжения по параметру на основании априорной оценки полученной в теореме 2.1.

Теорема 3.2. Пусть функция $g(\overline{x},t)$ удовлетворяет условию 2, тогда при любом $\delta \in (0;1)$ при $(|\gamma| < (1-\delta) b_1^{-2} |s|^2) \cap (\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ и любом s задача (1.4)—(1.5) имеет решение $u(x_3,\gamma,s)$, такое что $u(x_3,\gamma,s)$, $\dfrac{\partial u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2} \in$ $\in L_2([0,\infty))$.

Доказательство. Теорема 3.2 доказывается при помощи априорной оценки полученной в теореме 2.2. Метод доказательства аналогичен примененному в теореме 3.1.

Лемма 3.4. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ функция $f(x_3,\gamma,s)$ принадлежит пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x_3 при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и при $\gamma \in (|\gamma| < (1-\delta) b_1^{-2} |s|^2) \cup (\gamma : (|\gamma| \ne 0) \cap$ $\cap (0 \le |\arg\gamma| \le \pi - \varepsilon^0))$ и любом s, где $0 < \delta < 1$, а $\varepsilon^0 > 0$ может быть сколь угодно малым, кроме этого справедлива оценка $\left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right\| + \sqrt{|\gamma| + |s|^2} \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \right\| +$ $+ (|\gamma| + |s|^2) \|u\| \le c\|f\|$. Тогда при $\gamma \in ((\operatorname{Re}\gamma > -b_1^{-2}|s|^2) \cup$ $\cup (0 \le |\arg\gamma| \le \pi - \varepsilon^0) \cap (\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon)$ будет справедливо неравенство $|u(x_3,\gamma,s)| \le$ $\le c(|\gamma| + |s|^2)^{-3/4} \|f\|$ с постоянной $c > 0$ равномерной по $x_3 \in [0,\infty)$.

Доказательство. При помощи неравенства (см. [2])

$$\sup_{x_3 \in [0,\infty)} \left| \frac{\partial^r u}{\partial x_3^r} \right|^2 \le \varepsilon^{2s-2r-1} \left\| \frac{\partial^s u}{\partial x_3^s} \right\|^2 + c\varepsilon^{-2r-1} \|u\|^2,$$

где $0 \le r < s - 1/2$, $\varepsilon > 0$, норма берется в L_p и неравенства $\left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right\| + \sqrt{|\gamma| + |s|^2} \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \right\| + (|\gamma| + |s|^2) \|u\| \le$ $\le c\|f\|$ получаем утверждение леммы.

4. АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.4)—(1.5)

Теорема 4.1. Пусть функции $f(x_3,\gamma,s)$, $u(x_3,\gamma,s)$, $\dfrac{\partial u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x_3 равномерно по γ и s при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, функция $u(x_3,\gamma,s)$ является решением задачи (1.4)—(1.5), а функция $f(x_3,\gamma,s)$ аналитична по γ равномерно по x_3 и s при $\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$. Тогда функция $u(x_3,\gamma,s)$ будет аналитична по γ в области $D = (\gamma \in C : \gamma \ne 0, 0 \le |\varphi| < \pi - \varepsilon^0) \cap$ $\cap (\operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon)$ при всех $x_3 \ge 0$, $s \in R^2$.

Доказательство. Из оценки полученной в теореме 2.1 получаем оценку

$$(|\gamma|+|s|^2)\|\hat{u}\| \le c\|f(x_3,\gamma+\Delta\gamma,s)-f(x_3,\gamma,s)\|+$$
$$+\frac{c_2|\Delta\gamma|}{(|\gamma+\Delta\gamma|+|s|^2)}\|f(x_3,\gamma+\Delta\gamma,s)\|+ \qquad (4.1)$$
$$+\left\|\frac{f(x_3,\gamma+\Delta\gamma,s)-f(x_3,\gamma,s)}{|\Delta\gamma|}-\dot{f}(x_3,\gamma,s)\right\|,$$

где $\hat{u}(x_3,\gamma,s)=\dfrac{u(x_3,\gamma+\Delta\gamma,s)-u(x_3,\gamma,s)}{\Delta\gamma}-\dot{u}(x_3,\gamma,s)$, $\dot{f}(x_3,\gamma,s)=\dfrac{\partial f(x_3,\gamma,s)}{\partial\gamma}$, а $\dot{u}(x_3,\gamma,s)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2\dot{u}(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}-(\gamma b^2(x_3)+|s|^2)\dot{u}(x_3,\gamma,s)=$$
$$=b^2(x_3)u(x_3,\gamma,s)+\dot{f}(x_3,\gamma,s);$$
$$\dot{u}(x_3,\gamma,s)\big|_{x_3=0}=\dot{u}(x_3,\gamma,s)\big|_{x_3=\infty}=0.$$

Устремив $\Delta\gamma\to 0$ в (4.1), мы получаем, что

$$\frac{u(x_3,\gamma+\Delta\gamma,s)-u(x_3,\gamma,s)}{\Delta\gamma}\xrightarrow[\Delta\gamma\to 0]{}\dot{u}(x_3,\gamma,s).$$

Теорема 4.2. Пусть функции $f(x_3,\gamma,s)$, $u(x_3,\gamma,s)$, $\dfrac{\partial u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x_3 равномерно по γ и s при $\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, функция $u(x_3,\gamma,s)$ является решением (1.4)—(1.5), а функция $f(x_3,\gamma,s)$ аналитична по γ, равномерно по x_3 и s при $\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon$. Тогда при любом $\delta\in(0;1)$ и любом s в области $D_1=(|\gamma|<(1-\delta)b_1^{-2}|s|^2)\cap(\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon)$ функция $u(x_3,\gamma,s)$ будет аналитична по γ равномерно по x_3 и s.

Доказательство. Доказательство теоремы 4.2 проводится аналогично доказательству теоремы 4.1, только вместо априорной оценки из теоремы 2.1. будет использована априорная оценка полученная в теореме 2.2.

5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)—(1.3)

Теорема 5.1. Пусть функция $g(\bar{x},t)$ удовлетворяет условию 2. Тогда функция $\mathrm{v}(\bar{x},t)=$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_{R^2}e^{-i(x',s)}ds\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\gamma t}u(x_3,\gamma,s)d\gamma,\quad \text{где}\quad a>0,$$
$x'=(x_1,x_2)$, а $u(x_3,\gamma,s)$ решение задачи (1.4)—(1.5), непрерывна при любом $t\ge 0$, $\bar{x}\in R_+^3$ и, кроме того, $\mathrm{v}(\bar{x},t)\big|_{t=0}=0$, $\mathrm{v}(\bar{x},t)\big|_{x_3=0}=\mathrm{v}(\bar{x},t)\big|_{x_3=\infty}=0$.

Доказательство. Из лемм 3.2 и 3.4 следует оценка

$$|u(x_3,\gamma,s)|\le c(|\gamma|+|s|^2)^{-3/4}(1+|\gamma|)^{-1}(1+|s|^2)^{-1}. \quad (5.1)$$

Из неравенства (5.1) и представления функции $\mathrm{v}(x,t)$ получаем оценку $|\mathrm{v}(\bar{x},t)|\le ce^{at}$. Остальные утверждения теоремы 5.1 доказываются при помощи предельной теоремы Лебега и оценки (5.1).

Теорема 5.2. Пусть функция $g(\bar{x},t)$ удовлетворяет условию 3. Тогда функция $\mathrm{v}(\bar{x},t)=$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_{R^2}e^{-i(x',s)}ds\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\gamma t}u(x_3,\gamma,s)d\gamma,\quad \text{где}\quad a>0,$$
$x'=(x_1,x_2)$, а $u(x_3,\gamma,s)$ решение задачи (1.4)—(1.5), непрерывно дифференцируема по $t>0$ и дважды непрерывно дифференцируема по $-\infty<x_1,\ x_2<\infty,\ x_3\ge 0$.

Доказательство. Из лемм 3.3 и 3.4 следует оценка

$$|u(x_3,\gamma,s)|\le c(|\gamma|+|s|^2)^{-3/4}(1+|\gamma|)^{-2}(1+|s|^2)^{-2}. \quad (5.2)$$

Из (5.2) и равенства (1.4) вытекает неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 u(x_3,\gamma,s)}{\partial x_3^2}\right|\le c(|\gamma|+|s|^2)^{-3/4}\times$$
$$\times(1+|\gamma|)^{-1}(1+|s|^2)^{-1}. \quad (5.3)$$

Дифференцируемость $\mathrm{v}(\bar{x},t)$ по переменным t,x_1,x_2 следует из оценки (5.2), а по переменной x_3 из оценки (5.3).

Теорема 5.3. Пусть функция $g(\bar{x},t)$ удовлетворяет условию 3, тогда функция $\mathrm{v}(\bar{x},t)$, заданная в теореме 5.1, является решением задачи (1.1)—(1.3).

Доказательство. Доказательство теоремы 5.3 следует из теорем 5.1 и 5.2.

Теорема 5.4. Пусть функция $g(\bar{x},t)$ удовлетворяет условию 2, функции $\mathrm{v}_1(\bar{x},t)$, $\mathrm{v}_2(\bar{x},t)$ являются решениями задачи (1.1)—(1.3) и удовлетворяют условию 4, тогда $\mathrm{v}_1(\bar{x},t)\equiv\mathrm{v}_2(\bar{x},t)$ при $t\ge 0$ и $\bar{x}\in R_+^3$.

Доказательство. Доказательство теоремы 5.4 проводится при помощи априорных оценок полученных в теореме 2.1 и 2.2.

Теорема 5.5. Пусть функция $g(\bar{x},t)$ удовлетворяет условию 2, тогда для функции $\mathrm{v}(\bar{x},t)$ являющейся решением задачи (1.3)—(1.5) справедливо следующее представление:

$$\mathrm{v}(\bar{x},t)=Y_2^1(\bar{x},t)+Y_2^2(\bar{x},t)+O(e^{-\varepsilon t}),$$

где

$$Y_2^1(\bar{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_{|s|\le\delta_1}e^{-i(x',s)}\int_{l_1}e^{\gamma t}u(x_3,\gamma,s)d\gamma ds$$

$$(l_1 : \gamma(\xi) = i\xi + \xi - 2^{-1} b_1^{-2} |s|^2, \xi \in [-\delta, 0]),$$

$$Y_2^2(\overline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int_{|s| \le \delta_1} e^{-i(x',s)} \int_{l_2} e^{\gamma t} u(x_3, \gamma, s) d\gamma ds$$

$$(l_2 : \gamma(\xi) = i\xi - \xi - 2^{-1} b_1^{-2} |s|^2, \xi \in [0, \delta]).$$

Доказательство. Введем обозначение $w(x_3, t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t} u(x_3, \gamma, s) d\gamma$ $(a > 0)$. Из теоремы 5.1 следует, что функцию $\mathrm{v}(\overline{x}, t)$ можно представить в следующем виде

$$\mathrm{v}(\overline{x}, t) = Y_1(\overline{x}, t) + Y_2(\overline{x}, t), \qquad (5.11)$$

где

$$Y_1(\overline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2 / B_{\delta 1}(0)} e^{-i(x',s)} w(x_3, t, s) ds,$$

$$Y_2(\overline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{B_{\delta 1}(0)} e^{-i(x',s)} w(x_3, t, s) ds.$$

Приняв во внимание область аналитичности функции $u(x_3, \gamma, s)$ (теорема 4.1 и теорема 4.2) и воспользовавшись оценками из леммы 3.2 и леммы 3.4 мы получаем, что

$$Y_1(\overline{x}, t) = O(e^{-\varepsilon t}), \qquad (5.12)$$

$$Y_2(\overline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int_{|s| \le \delta_1} e^{-i(x',s)} \times$$

$$\times \left\{ \int_{l_1} e^{\gamma t} u(x_3, \gamma, s) d\gamma + \int_{l_2} e^{\gamma t} u(x_3, \gamma, s) d\gamma \right\} ds + \qquad (5.13)$$

$$+ O(e^{-\varepsilon t}).$$

Из (5.11), (5.12) и (5.13) следует утверждение теоремы 5.5.

Теорема 5.4. Пусть функция $g(\overline{x}, t)$ удовлетворяет условию 3, тогда $\mathrm{v}(\overline{x}, t) = O(t^{-7/4})$, при $t \to \infty$. Оценка $O(t^{-7/4})$ равномерна по x_3 при $x_3 \in [0, d]$, где $d > 0$ — произвольное число.

Доказательство. Достаточно показать, что $Y_2^1(\overline{x}, t) = O(t^{-7/4})$ и $Y_2^2(\overline{x}, t) = O(t^{-7/4})$. Приведем схему доказательства на примере $Y_2^1(\overline{x}, t)$. Из леммы 3.1 следует, что $Y_2^1(\overline{x}, t)$ представима в следующем виде

$$Y_2^1(\overline{x}, t) = \Lambda_1^1(\overline{x}, t) + \Lambda_1^2(\overline{x}, t) + N_1(\overline{x}, t), \qquad (5.14)$$

где

$$\Lambda_1^1(\overline{x}, t) = \frac{-1}{(2\pi)^3 i} \int_{|s| \le \delta_1} e^{-i(x',s)} ds \times$$

$$\times \int_{l_1} e^{\gamma t} \tilde{I}_1(\gamma u(x_3, \gamma, s)(b^2(x_3) - b_1^2)) d\gamma;$$

$$\tilde{I}_1(h(x_3, \gamma, s)) = \int_{x_3}^{\infty} h(y, \gamma, s) \times$$

$$\times \exp\left[-\sigma(y - x_3)\right] x_3 \int_0^1 e^{-2\sigma x_3 z} dz dy;$$

$$\Lambda_1^2(\overline{x}, t) = \frac{-1}{(2\pi)^3 i} \int_{|s| \le \delta_1} e^{-i(x',s)} ds \times$$

$$\times \int_{l_1} e^{\gamma t} \tilde{I}_2(\gamma u(x_3, \gamma, s)(b^2(x_3) - b_1^2)) d\gamma;$$

$$\tilde{I}_2(h(x_3, \gamma, s)) = \int_0^{x_3} h(y, \gamma, s) \times$$

$$\times \exp\left[-\sigma(x_3 - y)\right] y \int_0^1 e^{-2\sigma y z} dz dy;$$

$$N_1(\overline{x}, t) = \frac{-1}{(2\pi)^3 i} \int_{|s| \le \delta_1} e^{-i(x',s)} ds \times$$

$$\times \int_{l_1} e^{\gamma t} \sum_{j=1}^{2} \tilde{I}_j(f(x_3, \gamma, s)) d\gamma;$$

$$\sigma = \sqrt{\gamma b_1^2 + |s|^2}.$$

Параметризуем контур l_1 и воспользуемся для вычисления внутреннего интеграла в представлении $\Lambda_1^1(\overline{x}, t), \Lambda_1^2(\overline{x}, t), N_1(\overline{x}, t)$ интегральной теоремой Коши и леммой Ватсона. В результате получаем следующие оценки $\left|\Lambda_1^1(\overline{x}, t)\right| \le c x_3 t^{-7/4}$, $\left|\Lambda_1^2(\overline{x}, t)\right| \le c x_3^2 t^{-9/4}$, $N_1(\overline{x}, t) = O(t^{-2})$. Следовательно, $Y_2^1(\overline{x}, t) = O(t^{-7/4})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушко А.В.* Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А. В. Глушко // Воронеж: Воронежский университет, 2003. — 300 с.

2. *Глушко В.П.* Неравенства для норм производных в пространствах L_p с весом / В. П. Глушко, С. Г. Крейн // Сибирский математический журнал, 1960 Т. 1, № 3, С. 342—382.

Поступила в редакцию 08.11.2006