УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ ШУРА В ОКРЕСТНОСТИ ЕДИНИЦЫ

Е. Н. Андреищева

Воронежский государственный университет

В данной работе рассматривается особый класс функций — обобщённый класс Шура и исследуется вопрос представления функций Шура в окрестности единицы. Идейно такой результат ожидаем, но только сейчас удалось решить его технически.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В работе М. Г. Крейна и Г. Лангера [2] исследуется вопрос об аппроксимации функций Неванлинны. Доказана следующая теорема:

Теорема 1.1. *Для функции g в некоторой области W_θ следующие свойства:*

1. $g \in N_\varkappa$;

2. *для некоторого целого числа $n \ge 0$, существуют $2n$ вещественных чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ таких, что имеет место разложение:*

$$g(\alpha) + \sum_{\nu=0}^{2n-1} \frac{s_\nu}{\alpha^{\nu+1}} = O\left(\frac{1}{\alpha^{2n+1}}\right), \quad \alpha \to \infty, \alpha \in W_\theta \tag{1}$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, максимальный эрмитовый оператор A в $\Pi_\varkappa$ и о-порождающий элемент $u \in \operatorname{dom} A^n$ для оператора A такие, что справедливо представление:

$$g(\alpha) = [(A - \alpha I)^{-1} u, u], \quad \alpha \in C_+ \setminus \sigma_p(A). \tag{2}$$

В этом случае:

$$s_\nu = \begin{cases} [A^\nu u, u], & 0 \le \nu \le n; \\ [A^n u, A^{\nu-n} u], & n < \nu \le 2n-1. \end{cases} \tag{3}$$

Наша цель — получить подобный результат для функции Шура.

Идейно такой результат ожидаем, но только сейчас удалось решить его технически. С этим связаны кажущиеся слишком подробными числовые вычисления.

Пусть A^0 — класс функций, голоморфных и заданных в окрестности нуля в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{\xi : |\xi| < 1\}$.

Как известно [[1], стр. 319], функция $s(\lambda) \in A^0$ допускает унитарную реализацию

$$s(\lambda) = s(0) + \lambda[(I - \lambda T)^{-1} u, v] \tag{4}$$

или, иначе говоря, является характеристической функцией некоторого унитарного оператора V:

$$V = \begin{bmatrix} T & u \\ [\cdot, v] & s(0) \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\mathcal{K}$ — пространство Крейна с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]$, T — сжимающий оператор.

Это верно, в частности, и для функции Шура.

Поскольку оператор V унитарный, то справедлива следующая система равенств:

$$\begin{cases} T^c T = I - [\cdot, v]v, \\ [v, v] + |\, s(0)\,|^2 = 1, \\ Tv + \overline{s(0)} u = 0, \\ TT^c = I - [\cdot, u]u, \\ [u, u] + |\, s(0)\,|^2 = 1, \\ T^c u + s(0) v = 0. \end{cases} \tag{6}$$

При этом оператор V выбирается минимальным, что означает

$$\mathcal{K} = \text{з.л.о.}\{T^n u, (T^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Рассмотрим разложение Тейлора функции $s(\lambda) \in A^0$ в окрестности нуля:

$$s(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^{(i)}(0)}{i!} \lambda^i.$$

Если $|s(0)| < 1$, $|s(\lambda)| \le 1$ и для любого $k \le 2$ выполнено условие $s'(0) = \ldots = s^{(k-1)}(0) = 0$, то справедливо обобщённое преобразование Шура вида:

$$s_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda^k} \frac{s(\lambda) - s(0)}{1 - \overline{s(0)} s(\lambda)}, \quad k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $s(\lambda)$ голоморфная в окрестности нуля функция, $|\, s(0)\,| < 1$ и для некоторого натурального числа $k \ge 2$ выполнено:*

$$s'(0) = \ldots = s^{(k-1)}(0) = 0.$$

Пусть V — минимальный унитарный оператор, характеристическая функция которого совпадает с $s(\lambda)$.

Тогда $\cdots = 7.;.>.\{v, T^c v, \ldots, T^{c(k-1)}v\}$ — k-мерное положительное подпространство … и функция $s_k(\lambda)$ является характеристической для минимального оператора V_k:

$$V_k = \begin{bmatrix} T_k & u_k \\ [\cdot, v_k] & s_k(0) \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{K}} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{K}} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Причем

$$T_k = PTP, \qquad u_k = \frac{1}{\sqrt{1-|s(0)|^2}} Pu,$$
$$v_k = \frac{1}{\sqrt{1-|s(0)|^2}} PT^{ck}v, \quad s_k(0) = \frac{1}{k!}\frac{s^{(k)}(0)}{1-|s(0)|^2}, \qquad (8)$$

где P — ортопроектор в $\mathcal{K}$ на подпространство $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \ominus \mathcal{L}$.

Определение 1.1. *Функция $s(\lambda) \in A^0$ называется обобщённой функцией Шура, если она мероморфна в открытом единичном круге и ядро вида $\dfrac{1 - s(\lambda)\overline{s(\mu)}}{1 - \lambda\overline{\mu}}$ имеет конечное число отрицательных квадратов.*

Множество всех таких функций назовём обобщённым классом Шура и обозначим $S_\varkappa$, где $\varkappa$ — число отрицательных квадратов с учетом их кратностей.

Определение 1.2. *Пусть T — сжатие в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$.*

Скажем, что элемент $u \in \Pi_\varkappa$ является порождающим для оператора T, если $\Pi_\varkappa = \text{з.л.о.}\left\{(I - \lambda T)^{-1}u,\ \lambda \in \mathbb{D},\ \dfrac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T)\right\}$.

Определение 1.3. *Через W_θ обозначим множество всех $\alpha \in \mathbb{C}_+$ таких, что $\left|\arg\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right| \le \theta$, где $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$.*

Через W'_θ обозначим множество всех $\beta \in \mathbb{C}_-$ таких, что $\left|\arg\beta + \dfrac{\pi}{2}\right| \le \theta$, где $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Через Λ_θ обозначим множество всех $\lambda \in \mathbb{D}$ вида $\lambda = \dfrac{\alpha - i}{\alpha + i}$, $\alpha \in W_\theta$.

2. УСЛОВИЯ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЁННОЙ ФУНКЦИИ ШУРА В ОКРЕСТНОСТИ ЕДИНИЦЫ

Лемма 2.1. *Для функции s, $\lambda \in \Lambda_\theta$ с $s(0) \ne 0$ следующие свойства:*

1. $s \in S_\varkappa$;
2. $\lim\limits_{\lambda \to 1} s(\lambda) = 1$;
3. $\overline{\lim\limits_{\lambda \to 1}} \dfrac{1 - |s(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} < \infty$;

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, сжимающий оператор T в $\Pi_\varkappa$ и порождающий элемент $u \in \Pi_\varkappa$ для оператора T такие, что справедливо представление:

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}}[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u],$$
$$\lambda \in \mathbb{D},\ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T) \qquad (9)$$

Доказательство. Пусть функция s обладает свойствами 1—3.

Докажем справедливость существования представления (9).

Из уравнения $T^c u + s(0)v = 0$ системы (6) получаем, что элемент v в (4) выражается формулой:

$$v = -\frac{1}{s(0)} T^c u. \qquad (10)$$

Запишем функцию Шура в операторном виде:

$$s(\lambda) = s(0) + \lambda[\cdot, v]\mathbf{1}(I - \lambda T)^{-1}[\cdot, \mathbf{1}]u.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
1 - \overline{s(\lambda)}s(\lambda) &= [u,u] + \overline{\lambda}[\cdot, u]\mathbf{1} \times \\
&\times (I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}[\cdot, \mathbf{1}]T^c u + \\
&+ \lambda[T\cdot, u]\mathbf{1}(I - \lambda T)^{-1}[\cdot, \mathbf{1}]u - \\
&- |\lambda|^2\ [\cdot, u]\mathbf{1}(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}(I - T^c T) \times \\
&\times (I - \lambda T)^{-1}[\cdot, \mathbf{1}]u = [u,u] + \\
&+ \overline{\lambda}[(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}T^c u, u] + \lambda[T(I - \lambda T)^{-1}u, u] - \\
&- |\lambda|^2\ [(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}(I - \lambda T)^{-1}u, u] + \\
&+ |\lambda|^2\ [(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}T^c T(I - \lambda T)^{-1}u, u] = \\
&= [(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}(I - |\lambda|^2\ T^c T)(I - \lambda T)^{-1}u, u] - \\
&- |\lambda|^2\ [(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}(I - \lambda T)^{-1}u, u] + \\
&+ |\lambda|^2\ [(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}T^c T(I - \lambda T)^{-1}u, u] = \\
&= (1 - |\lambda|^2)[(I - \overline{\lambda}T^c)^{-1}(I - \lambda T)^{-1}u, u].
\end{aligned}$$

Тогда условие 3. примет вид:

$$\overline{\lim_{\lambda \to 1}}[(I - \lambda T)^{-1}u, (I - \lambda T)^{-1}u] < \infty. \qquad (11)$$

Пусть $\tilde{T} : \tilde{\Pi}_\varkappa \to \tilde{\Pi}_\varkappa$ — унитарная дилатация T, где $\tilde{\Pi}_\varkappa = \Pi_\varkappa[+]H$, H — гильбертово пространство, $\Pi_\varkappa$ — пространство Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами.

Справедливо следующее разложение пространства $\tilde{\Pi}_\varkappa$:

$$\tilde{\Pi}_\varkappa = E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa[+](I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\varkappa, \qquad (12)$$

где $E(\Delta)$ — спектральная функция, Δ — малая дуга единичной окружности в окрестности единицы такая, что $\bar{\Delta}$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{T}$, соответствующих неположительным собственным векторам (это возможно, так как их конечное число).

$E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa$ — инвариантное подпространство оператора $\tilde{T}$ и $\sigma(\tilde{T}\,|_{E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa}) \subset \bar{\Delta}$.

Проверим, что это гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$.

В самом деле, если бы $E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa$ было пространством Понтрягина, тогда, по теореме Понтрягина [5], существовало $\lambda_\Delta \in \sigma_p(\tilde{T}\,|_{E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa})$ такое, что $\tilde{T}\,|_{E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa} x_\Delta = \lambda_\Delta x_\Delta$, где $x_\Delta : [x_\Delta, x_\Delta] \le 0$.

Но тогда x_Δ является собственным вектором и для оператора $\tilde{T}$, то есть $\tilde{T}x_\Delta = \lambda_\Delta x_\Delta$. Получаем противоречие с условием выбора интервала Δ. Следовательно, $E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa$ — гильбертово подпространство $\tilde{\Pi}_\varkappa$ относительно $[\cdot,\cdot]_{\tilde{\Pi}_\varkappa}$.

Справедливо представление унитарного оператора $\tilde{T}$:

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_2 \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa \\ (I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\varkappa \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa \\ (I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\varkappa \end{pmatrix}.$$

Для оператора $\tilde{T}_2$ единица является регулярной точкой, поэтому равномерная сходимость $(I - \lambda\tilde{T}_2)^{-1} \to (I - \tilde{T}_2)^{-1}$ при $\lambda \to 1$ справедлива.

И тогда можно ограничиться доказательством только для $\tilde{T}_1 = \tilde{T}\,|_{E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa}$, где $E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa$ — гильбертово пространство.

Для этого сначала рассмотрим элемент $u \in \Pi_\varkappa$ и его разложение $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in E(\Delta)\tilde{\Pi}_\varkappa, u_2 \in (I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\varkappa$.

Покажем, что элемент $u \in \mathrm{dom}(I - \tilde{T})^{-1}$.

Пусть $A = A^c$ — обратное преобразование Кэли—Неймана оператора $\tilde{T}$:

$$A = i(I - \tilde{T})^{-1}(I + \tilde{T}),$$
$$\tilde{T} = (A - i)(A + i)^{-1}. \qquad (13)$$

Аргумент λ преобразуется следующим образом:

$$\lambda = \frac{\alpha - i}{\alpha + i},\ 1 - \lambda = \frac{2i}{\alpha + i},$$
$$1 + \lambda = \frac{2\alpha}{\alpha + i},$$
$$\lambda \to 1 \Leftrightarrow \alpha \to \infty,$$
$$I - \lambda\tilde{T} = I - \lambda(A - i)(A + i)^{-1} =$$
$$= 2i(\alpha + i)^{-1}(A + \alpha)(A + i)^{-1}.$$

Согласно (11) имеем

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} |\alpha|^2 \, [(A + \alpha)^{-1} \times$$
$$\times (A + i)u, (A + \alpha)^{-1}(A + i)u] < \infty. \qquad (14)$$

Обозначим через $A_1 = i(I + \tilde{T}_1)(I - \tilde{T}_1)^{-1}$. Тогда последнее неравенство для оператора A_1, действующего в гильбертовом пространстве, можно записать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{t + i}{t + \alpha}\right|^2 |\alpha|^2 \, d\sigma(t) < \infty,$$

где $\sigma(t) = [E_t u_1, u_1]$, E_t — спектральная функция для самосопряженного оператора A_1.

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{R}$, существует $K \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\int_{-n}^{n} \left|\frac{t + i}{t + \alpha}\right|^2 |\,\alpha\,|^2 \, d\sigma(t) \le K.$$

Поскольку $\alpha \in W_\theta$, то для любого $\varepsilon > 0$, для любого $t \in (-n, n), n \in \mathbb{R}$, существует $\delta > 0$ такое, что для всех α с $\mathrm{Im}\,\alpha > \delta$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\alpha}{t + \alpha} - 1\right| \le \varepsilon.$$

Поэтому для любого $n \in \mathbb{R}$: $\int_{-n}^{n} |\,t + i\,|^2 \, d\sigma(t) \le K$ при $\alpha \to \infty$.

Тогда при $n \to \infty$ получаем $\int_{-\infty}^{+\infty} |t + i|^2 \, d\sigma(t) < \infty$,

следовательно, согласно [3, стр. 238] заключаем, что $u_1 \in \mathrm{dom}(A_1 + i)$.

$$A_1 + i = 2i(I - \tilde{T}_1)^{-1} \Rightarrow u_1 \in \mathrm{dom}(I - \tilde{T}_1)^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u \in \mathrm{dom}(I - \tilde{T})^{-1}.$$

Докажем, что если $u \in \mathrm{dom}(I - \tilde{T})^{-1}$, то $u \in \mathrm{dom}(I - T)^{-1}$.

Пусть унитарная дилатация $\tilde{T}$ имеет вид [1, стр. 319]:

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{21} & T & 0 \\ \tilde{T}_{31} & \tilde{T}_{32} & \tilde{T}_{33} \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} H_1 \\ \Pi_\varkappa \\ H_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} H_1 \\ \Pi_\varkappa \\ H_2 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где H_1, H_2 — гильбертовы пространства, $\Pi_\varkappa$ — пространство Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами, $\tilde{T}_{11}$ — оператор сдвига такой, что всякий вектор $x = (x_1, x_2, \ldots) \in H_1$ переводит в вектор $x' = (0, x_1, x_2, \ldots) \in H_1$.

$$u \in \operatorname{dom}(I - \tilde{T})^{-1} \Rightarrow w = (I - \tilde{T})^{-1} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = (I - \tilde{T}) w,$$

где $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $u \in \Pi_\varkappa$.

Применим оператор $(I - \tilde{T})$ к элементу w :

$$\begin{bmatrix} I - \tilde{T}_{11} & 0 & 0 \\ -\tilde{T}_{21} & I - T & 0 \\ -\tilde{T}_{31} & -\tilde{T}_{32} & I - \tilde{T}_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$(I - \tilde{T}_{11}) w_1 = 0$, но $1 \notin \sigma_p(\tilde{T}_{11}) \Rightarrow w_1 = 0$.

$-\tilde{T}_{21} w_1 + (I - T) w_2 = u \Rightarrow (I - T) w_2 = u$.

Следовательно, $u \in \operatorname{dom}(I - T)^{-1} = \operatorname{ran}(I - T)$.

Аналогично доказывается, что элемент v вида (10) из $\operatorname{dom}(I - T^c)^{-1}$.

Используя представление (10), получим $s(\lambda) = s(0) - \dfrac{\lambda}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1} u, T^c u]$.

Докажем сходимость $[(I - \lambda T)^{-1} u, u] \to$ $\to [(I - T)^{-1} u, u]$ при $\lambda \to 1$.

Действительно,

$$\left|[\{(I - \lambda T)^{-1} - (I - T)^{-1}\} u, u]\right| =$$
$$= \left|[\{(I - \lambda \tilde{T}_1)^{-1} - (I - \tilde{T}_1)^{-1}\} u_1, u_1]\right| =$$
$$= \left|(\lambda - 1)[(I - \lambda \tilde{T}_1)^{-1} u, (I - \tilde{T}_1^c)^{-1} \tilde{T}_1^c u]\right| \le$$
$$\le |\lambda - 1| \left\|(I - \lambda \tilde{T}_1)^{-1} u\right\| \left\|(I - \tilde{T}_1^c)^{-1} \tilde{T}_1^c u\right\| =$$
$$= |\lambda - 1| \left\|(I - \lambda \tilde{T}_1)^{-1} u\right\| \left\|(I - \tilde{T}_1)^{-1} u\right\| \to 0, \lambda \to 1.$$

Из условия $\lim\limits_{\lambda \to 1} s(\lambda) = 1$ получаем

$$s(0) = 1 + \frac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-1} u, T^c u],$$

следовательно

$$s(\lambda) = 1 - \frac{\lambda - 1}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u].$$

Обратно, пусть справедливо представление (9).

Докажем, что свойства 1—3 выполнены.

Действительно, из (11) получаем

$$\frac{1 - \overline{s(\lambda)} s(\mu)}{1 - \bar{\lambda} \mu} = [(I - \lambda T)^{-1} u, (I - \mu T)^{-1} u]$$

и значит $s \in S_\varkappa$.

$$\varlimsup_{\lambda \to 1} \frac{1 - |s(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} \le \varlimsup_{\lambda \to 1} \frac{|\lambda - 1|}{(1 - |\lambda|) \left|\overline{s(0)}\right|} \times$$
$$\times \left\|[(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u]\right\| < \infty.$$

Таким образом получили условие *3.* леммы.

Теорема 2.2. *Для функции s с $s(0) \neq 0$ следующие свойства:*

1. $s \in S_\varkappa$;

2. *для некоторого натурального числа $n > 0$, существуют $2n$ чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu (\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}), \quad \lambda \to 1, \lambda \in \Lambda_\theta \tag{16}$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, сжимающий оператор T в $\Pi_\varkappa$ и порождающий элемент $u \in \operatorname{dom}((I - T)^{-(n+1)})$ для оператора T такой, что справедливо представление:

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u], \quad \lambda \in \mathbb{D}, \ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T). \tag{17}$$

В этом случае:

$$c_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^\nu u, u], \ 1 \le \nu \le n; \\ \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(n+1)} T^n u, (I - T^c)^{-(\nu-n)} (T^c)^{\nu-n} u], \\ \hfill n + 1 \le \nu \le 2n. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть выполнены свойства 1 и 2. Докажем справеливость представления (17) и формулу для коэффициентов (18).

Сначала заметим, что для любого неотрицательного числа k и $u \in \operatorname{dom}(I - T)^{-(k+1)}$ выполнено тождество:

$$\begin{gathered}(\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u] = \\ = \overline{s(0)} \sum_{\nu=1}^{2k+1} c_\nu (\lambda - 1)^\nu + (\lambda - 1)^{2k+2} \times \\ \times [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-(k+1)} \times \\ \times T^{k+1} u, (I - T^c)^{-(k+1)} (T^c)^{k+1} u],\end{gathered} \tag{19}$$

где

$$c_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^\nu u, u], \ 1 \le \nu \le k; \\ \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(k+1)} T^k u, (I - T^c)^{-(\nu-k)} (T^c)^{\nu-k} u], \\ \hfill k + 1 \le \nu \le 2k + 1. \end{cases}$$

Докажем это утверждение по индукции:

1). Для $k=1,\ u \in \mathrm{dom}(I-T)^{-2}$:

$$(\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}u, T^c u] =$$
$$= [(I-T)^{-2}Tu, u](\lambda-1) +$$
$$+[(I-T)^{-2}Tu, (I-T^c)^{-1}T^c u](\lambda-1)^2 +$$
$$+[(I-T)^{-2}Tu, (I-T^c)^{-2}(T^c)^2 u](\lambda-1)^3 +$$
$$+(\lambda-1)^4[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-2} \times$$
$$\times T^2 u, (I-T^c)^{-2}(T^c)^2 u] =$$
$$= [(I-T)^{-2}Tu, u](\lambda-1) +$$
$$+[(I-T)^{-2}Tu, (I-T^c)^{-1}T^c u](\lambda-1)^2 +$$
$$+(\lambda-1)^3[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-2} \times$$
$$\times T\{I-\lambda T+\lambda T-T\}u, (I-T^c)^{-2}(T^c)^2 u] =$$
$$= [(I-T)^{-2}Tu, u](\lambda-1) +$$
$$+(\lambda-1)^2[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-2} \times$$
$$\times T\{I-\lambda T+\lambda T-T\}u, (I-T^c)^{-1}T^c u] =$$
$$= (\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}u, T^c u].$$

2). Пусть тождество (19) справедливо для $k-1, u \in \mathrm{dom}(I-T)^{-k}$, докажем для $k, u \in \mathrm{dom}(I-T)^{-(k+1)}$:

$$(\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}u, T^c u] =$$
$$= \left\{\sum_{\nu=1}^{2k-1} c_\nu(\lambda-1)^\nu + c_{2k}(\lambda-1)^{2k} +\right.$$
$$\left. + c_{2k+1}(\lambda-1)^{2k+1}\right\}\overline{s(0)} + (\lambda-1)^{2k+2} \times$$
$$\times[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-(k+1)}T^{k+1}u, (I-T^c)^{-(k+1)} \times$$
$$\times(T^c)^{k+1}u] = \overline{s(0)}\sum_{\nu=1}^{2k-1} c_\nu(\lambda-1)^\nu +$$
$$+[(I-T)^{-(k+1)}T^k u, (I-T^c)^{-k}(T^c)^k u](\lambda-1)^{2k} +$$
$$+(\lambda-1)^{2k+1}[(I-T)^{-(k+1)}T^k u, (I-T^c)^{-(k+1)} \times$$
$$\times(T^c)^{k+1}u] + (\lambda-1)^{2k+2}[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-(k+1)} \times$$
$$\times T^{k+1}u, (I-T^c)^{-(k+1)}(T^c)^{k+1}u] = \overline{s(0)}\sum_{\nu=1}^{2k-1} c_\nu(\lambda-1)^\nu +$$
$$+[(I-T)^{-(k+1)}T^k u, (I-T^c)^{-k}(T^c)^k u](\lambda-1)^{2k} +$$
$$+(\lambda-1)^{2k+1}[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-(k+1)} \times$$
$$\times T^k\{I-\lambda T+\lambda T-T\}u, (I-T^c)^{-(k+1)} \times$$
$$\times(T^c)^{k+1}u] = \overline{s(0)}\sum_{\nu=1}^{2k-1} c_\nu(\lambda-1)^\nu +$$
$$+(\lambda-1)^{2k}[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-(k+1)} \times$$
$$\times T^k\{I-\lambda T+\lambda T-T\}u, (I-T^c)^{-k}(T^c)^k u] =$$
$$= \overline{s(0)}\sum_{\nu=1}^{2k-1} c_\nu(\lambda-1)^\nu + (\lambda-1)^{2k}[(I-\lambda T)^{-1} \times$$
$$\times(I-T)^{-k}T^k u, (I-T^c)^{-k}(T^c)^k u] =$$

(по предложению индукции)

$$= (\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}u, T^c u].$$

Формула полностью доказана.

Из условий 1—2 теоремы и леммы 2.1 непосредственно следует представление (17).

Покажем, что $u \in \mathrm{dom}(I-T)^{-(n+1)}$.

Для этого рассмотрим унитарную дилатацию $\tilde{T} : \tilde{\Pi}_\varkappa \to \tilde{\Pi}_\varkappa$ оператора T и разложение вида (12) пространства $\tilde{\Pi}_\varkappa$.

Известен общий вид функции Неванлинны:

$$g(\beta) = \frac{g(-i)+\overline{g(-i)}}{2} + i[u,u] +$$
$$+(\beta-i)[(A-\beta)^{-1}(A+i)u, u],\ \ \beta \in W'_\theta,$$

где A — самосопряжённый оператор в пространстве $\Pi_\varkappa$.

Связь операторов A и $\tilde{T}$ представлена формулами (13) (см. лемму 2.1).

$$\frac{|\mathrm{Im}\, g(\beta)|}{|\beta|} \le \frac{g(\beta)-\overline{g(\beta)}}{\beta-\overline{\beta}} =$$
$$= [(A-\beta)^{-1}(A+i)u, (A-\beta)^{-1}(A+i)u].$$

Тогда из (14) получим $\overline{\lim\limits_{\beta\to\infty}}|\beta||\mathrm{Im}\ g(\beta)| < \infty$.

Условие $\lim\limits_{\lambda\to 1} s(\lambda) = 1$ равносильно тому, что

$$\lim_{\lambda\to 1}(\lambda-1)[(I-\lambda\tilde{T})^{-1}(I-\tilde{T})^{-1}u, \tilde{T}^c u] =$$
$$= \lim_{\lambda\to 1}[(A-\beta)^{-1}(A+i)u, (A+i)u] = 0.$$

Функция Шура связана с функцией Неванлинны с помощью преобразования Кэли—Неймана:

$$s(\lambda) = \frac{i+g(\beta)}{i-g(\beta)},\ \ \lambda = \frac{\beta+i}{\beta-i},\ \ \beta \in W'_\theta.$$

Поэтому $\lim\limits_{\lambda\to 1} s(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\beta\to\infty} g(\beta) = 0.$

Таким образом, мы построили функцию Неванлинны вида

$$g(\beta) = [(A-\beta)^{-1}(A+i)u, (A+i)u],\ \beta \in W'_\theta.$$

Так как $s(\lambda)$ разложима в ряд и справедливо представление (17), то

$$(\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}u, T^c u] =$$
$$= (\lambda-1)[(I-\lambda\tilde{T})^{-1}(I-\tilde{T})^{-1}u, \tilde{T}^c u] = \qquad (20)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{2n} c'_\nu(\lambda-1)^\nu + O((\lambda-1)^{2n+1}),\ \ \lambda \to 1,\ \ \lambda \in \Lambda_\theta,$$

где $c'_\nu = \overline{s(0)}c_\nu$.

Записав равенство (20) через дилатацию $\tilde{T}$ и применив преобразование Кэли—Неймана, получим:

$$[(A-\beta)^{-1}(A+i)u,(A+i)u]=$$
$$=-2i\sum_{\nu=1}^{2n}c'_\nu\left(-\frac{2i}{\beta-i}\right)^\nu(-1)^\nu+O\left(\left(\frac{1}{\beta-i}\right)^{2n+1}\right).$$

Обозначим через $u'=(A+i)u$.

$$[(A-\beta)^{-1}u',u']=$$
$$=-\sum_{\nu=1}^{2n}\tilde{c}_\nu\left(\frac{1}{\beta-i}\right)^\nu+O\left(\left(\frac{1}{\beta-i}\right)^{2n+1}\right),$$

где $\tilde{c}_\nu=c'_\nu(2i)^{\nu+1}$.

Отсюда, в силу теоремы Крейна—Лангера [2] :

$$u'\in\operatorname{dom}(A-i)^n\Rightarrow u\in\operatorname{dom}(A-i)^{n+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u\in\operatorname{dom}(I-\tilde{T})^{-(n+1)}$$

и справедливо представление для коэффициентов:

$$\tilde{c}_\nu=\begin{cases}[(A-i)^\nu u',u'],\ 1\le\nu\le n+1;\\ [(A-i)^n u',(A+i)^{\nu-n-1}u'],\ n+2\le\nu\le 2n.\end{cases}\qquad(21)$$

Таким образом, из (13) легко получаем формулу для коэффициентов (18).

Остаётся показать, что если $u\in\operatorname{dom}(I-\tilde{T})^{-(k+1)}$, то $u\in\operatorname{dom}(I-T)^{-(k+1)}$.

Для $k=0$ данное утверждение доказано ранее (см. лемму 2.1).

Пусть утверждение справедливо для $k=m-1$. Докажем для $k=m$.

$$u\in\operatorname{dom}(I-\tilde{T})^{-(m+1)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(I-\tilde{T})^{-m}u\in\operatorname{dom}(I-\tilde{T})^{-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(I-\tilde{T})^{-m}u\in\operatorname{dom}(I-T)^{-1}.$$

По предположению индукции $u\in\operatorname{dom}(I-\tilde{T})^{-m}\Rightarrow u\in\operatorname{dom}(I-T)^{-m}$. Обратно, если $u\in\operatorname{dom}(I-T)^{-(n+1)}$ и справедливо тождество (19), выполнено:

$$\frac{1}{(\lambda-1)^{2n+1}}\left(1-s(\lambda)-\sum_{\nu=1}^{2n}c_\nu(\lambda-1)^\nu\right)=$$
$$=\frac{1}{\overline{\overline{s(0)}}}[(I-T)^{-(n+1)}T^{n+1}u,(I-T^c)^{-(n+1)}\times$$
$$\times(T^c)^n u]+\frac{\lambda-1}{\overline{\overline{s(0)}}}[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-(n+1)}\times$$
$$\times T^{n+1}u,(I-T^c)^{-(n+1)}(T^c)^{n+1}u].$$

Разложение (16) будет доказано, если покажем, что второе слагаемое в правой части равенства стремится к нулю, то есть

$$(\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-(n+1)}\times$$
$$\times T^{n+1}u,(I-T^c)^{-(n+1)}(T^c)^{n+1}u]\to 0,\ \lambda\to 1.$$

Перейдём к дилатации $\tilde{T}$:

$$(\lambda-1)[(I-\lambda\tilde{T})^{-1}(I-\tilde{T})^{-(n+1)}\times$$
$$\times\tilde{T}^{n+1}u,(I-\tilde{T}^c)^{-(n+1)}(\tilde{T}^c)^{n+1}u]\to 0,\ \lambda\to 1;$$
$$-\left(\frac{1}{2i}\right)^{2n+2}[(A-\beta)^{-1}(A-i)^{n+1}\times$$
$$\times u',(A+i)^n u']\to 0,\ \beta\to\infty.$$

То есть нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-i)^{2n+1}}{t-\beta}d\sigma(t)\to 0,\ \beta\to\infty,\ \beta\in W'_\theta\ \text{(см. [3])}.$$

Действительно, это выполнено из-за существующих неравенств для $\beta\in W'_\theta$

$$|(t-i)-(\beta-i)|\ge|\beta-i|\cos\theta,$$
$$|(t-i)-(\beta-i)|\ge|t-i|\cos\theta.$$
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-i)^{2n+1}}{t-\beta}d\sigma(t)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{|\beta-i|\cos\theta}\int_{-\gamma}^{\gamma}|t-i|^{2n+1}d\sigma(t)+\frac{1}{\cos\theta}\int_{|t|>\gamma}|t-i|^{2n}d\sigma(t).$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty}|t-i|^{2n}d\sigma(t)<\infty$, то $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-i)^{2n+1}}{t-\beta}d\sigma(t)\to$ $\to 0,\ \beta\to\infty$.

Теорема полностью доказана. □

Рассмотрим функцию $s(\lambda)\in A^0$ с условием $s(0)=0$.

Таким образом система (6) примет вид:

$$\begin{cases}T^cT=I-[\cdot,v]v,\\ [v,v]=1,\\ Tv=0,\\ TT^c=I-[\cdot,u]u,\\ [u,u]=1,\\ T^cu=0.\end{cases}\qquad(22)$$

Теорема 2.3. *Пусть $s(\lambda)=\lambda^k s_k(\lambda)$, $s_k(0)\ne 0$, $k\le n$, тогда следующие свойства:*

1. *$s\in S_\varkappa$, где $S_\varkappa$ — обобщённый класс Шура;*

2. *для некоторого натурального числа $n>0$, существуют $2n$ чисел $c_1,c_2,\dots,c_{2n}$ таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda)=1-\sum_{\nu=1}^{2n}c_\nu(\lambda-1)^\nu+O((\lambda-1)^{2n+1}),\qquad(23)$$
$$\lambda\to 1,\lambda\in\Lambda_\theta$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, сжима-

ющий оператор T в $\Pi_\varkappa$ и порождающий элемент $u \in \mathrm{dom}((I-T)^{-(n+1)})$ для оператора T такой, что справедливо представление:

$$s(\lambda) = \lambda^k - \frac{1}{s_k(0)}\lambda^k(\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}\times \\ \times (I-T)^{-1}T^{k+1}u, T^k u],\ \lambda\in\mathbb{D},\ \frac{1}{\lambda}\notin\sigma_p(T). \tag{24}$$

В этом случае:

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{1}{s_k(0)}\sum_{i=1}^{\nu} C_{k-i}^{\nu-i}[(I-T)^{-(i+1)}T^{k+1}u, T^k u] - C_k^\nu, \\ \qquad 1\le\nu<k+1; \\ \frac{1}{s_k(0)}[(I-T)^{-(\nu+1)}T^\nu u, T^k u],\ \ k+1\le\nu\le n; \\ \frac{1}{s_k(0)}[(I-T)^{-(n+1)}T^n u, (I-T^c)^{-(\nu-n)}T^{c(\nu-n)}T^k u], \\ \qquad n+1\le\nu\le 2n. \end{cases}$$

Доказательство. Для случая $k=0$ теорема доказана ранее (см. теорему 2.2). Тогда задача сводится к нахождению формул для коэффициентов c_ν.

Пусть $k=1$, тогда $s(\lambda)=\lambda s_1(\lambda)$, $s_1(0)\ne 0$.

Для $s_1(\lambda)$ по теореме 2.2 справедливо разложение:

$$s_1(\lambda) = 1-\sum_{\nu=1}^{2n}\tilde c_\nu(\lambda-1)^\nu + O((\lambda-1)^{2n+1}), \\ \lambda\to 1, \lambda\in\Lambda_\theta,$$

где

$$\tilde c_\nu = \begin{cases} \frac{1}{s_1(0)}[(I-T_1)^{-(\nu+1)}T_1^\nu u_1, u_1],\quad 1\le\nu\le n; \\ \frac{1}{s_1(0)}[(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^n u_1, (I-T_1^c)^{-(\nu-n)}(T_1^c)^{\nu-n}u_1], \\ \qquad n+1\le\nu\le 2n. \end{cases}$$

Необходимо получить разложение вида (23) для функции $s(\lambda)$ и выразить коэффициенты разложения.

$$s(\lambda) = 1-(\tilde c_1-1)(\lambda-1) - \\ -\sum_{\nu=2}^{2n}(\tilde c_{\nu-1}+\tilde c_\nu)(\lambda-1)^\nu + \\ +\tilde c_{2n}(\lambda-1)^{2n+1} + O((\lambda-1)^{2n+1}).$$

1) $\nu=1$:

$$c_1 = \tilde c_1 - 1 = \frac{1}{s_1(0)}[(I-T_1)^{-2}T_1u_1, u_1] - 1.$$

2) $\nu=\overline{2,n}$:

$$c_\nu = \tilde c_{\nu-1}+\tilde c_\nu = \frac{1}{s_1(0)}([(I-T_1)^{-\nu}T_1^{\nu-1}u_1, u_1] + \\ +[(I-T_1)^{-(\nu+1)}T_1^\nu u_1, u_1]) = \\ = \frac{1}{s_1(0)}[(I-T_1)^{-(\nu+1)}T_1^{\nu-1}u_1, u_1].$$

3) $\nu=\overline{n+2,2n}$:

$$c_\nu = \tilde c_{\nu-1}+\tilde c_\nu = \frac{1}{s_1(0)}([(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^n\times \\ \times u_1, (I-T_1^c)^{-(\nu-1-n)}T_1^{c(\nu-1-n)}u_1] + \\ +[(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^n u_1, (I-T_1^c)^{-(\nu-n)}T_1^{c(\nu-n)}u_1]) = \\ = \frac{1}{s_1(0)}[(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^n u_1, (I-T_1^c)^{-(\nu-n)}T_1^{c(\nu-1-n)}u_1].$$

Из теоремы 1.2 для случая $k=1$ имеем связь $u_1=Pu$, где $P=I-[\cdot,v]v=T^cT$ — ортопроектор на подпространство $\tilde\Pi_\varkappa=\Pi_\varkappa\ominus\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}=$ з.л.о$\{v\}$.

Тогда

$$u_1 = (I-[\cdot,v]v)u = u-[u,v]v = u - s_1(0)v,$$

$$T_1u_1 = (I-[\cdot,v]v)T(u-s_1(0)v) = \\ = (I-[\cdot,v]v)Tu = Tu-[Tu,v]v = \\ = PTu = T^cT^2u,$$

$$T_1^cu_1 = (I-[\cdot,v]v)T^cu_1 = T^cu_1 = (T^c)^2Tu.$$

Таким образом из условия системы $Tv=0$ для любого $\nu\ge 0$ выполнены равенства:

$$T_1^\nu u_1 = T^\nu u - [T^\nu u, v]v = PT^\nu u = T^cT^{\nu+1}u,$$

$$(T_1^c)^\nu u_1 = (T^c)^\nu u_1 = (T^c)^{\nu+1}Tu.$$

Представим оператор T^c в матричном виде:

$$T^c = \begin{bmatrix} T_1^c & T_{01}^c \\ 0 & 0\end{bmatrix} : \begin{pmatrix}\tilde\Pi_\varkappa \\ \mathcal{L}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\tilde\Pi_\varkappa \\ \mathcal{L}\end{pmatrix},$$

где $T_1^c:\tilde\Pi_\varkappa\to\tilde\Pi_\varkappa$, $T_{01}^c:\mathcal{L}\to\tilde\Pi_\varkappa$.

Тогда

$$I-T = \begin{bmatrix} I-T_1 & 0 \\ T_{01} & 1\end{bmatrix},$$

$$(I-T)^{-1} = \begin{bmatrix} (I-T_1)^{-1} & 0 \\ -T_{01}(I-T_1)^{-1} & 1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, для любого $u=u_1+cv$, $u_1\in\tilde\Pi_\varkappa$, $c\in\mathbb{R}$:

$$(I-T)^{-1}u=\begin{bmatrix}(I-T_1)^{-1}u_1\\ -T_{01}(I-T_1)^{-1}u_1+cv\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(I-T_1)^{-1}u_1\\ v\end{bmatrix}.$$

Таким образом

$$(I-T_1)^{-1}u_1=(I-T)^{-1}u-[(I-T)^{-1}u,v]v.$$

Докажем теперь, что для любого $\nu\ge 0$ выполнено равенство:

$$(I-T_1)^{-\nu}u_1=(I-T)^{-\nu}u-[(I-T)^{-\nu}u,v]v. \qquad (25)$$

Пусть (25) справедливо для степени $-(\nu-1)$, докажем для $-\nu$.

$$(I-T)^{-1}(I-T)^{-(\nu-1)}u=$$

$$=\begin{bmatrix}(I-T_1)^{-1} & 0\\ -T_{01}(I-T_1)^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(I-T_1)^{-(\nu-1)}u_1\\ v\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(I-T_1)^{-\nu}u_1\\ (I-P)(I-T)^{-\nu}u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(I-T_1)^{-\nu}u_1\\ v\end{bmatrix}.$$

Равенство (25) полностью доказано.

Из системы (6) и теоремы 1.2 верно соотношение $u_1=T^cTu$. Поэтому для любых ν_1,ν_2 выполнено:

$$[(I-T_1)^{-\nu_1}T_1^{\nu_2}u_1,u_1]=$$

$$=[(I-T)^{-\nu_1}T^{\nu_2+1}u,Tu].$$

Рассмотрим оператор $(I-T^c)^{-1}$:

$$(I-T^c)^{-1}u_1=\begin{bmatrix}(I-T_1^c)^{-1} & (I-T_1^c)^{-1}T_{01}^c\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(I-T_1^c)^{-1}u_1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что для любого $\nu\ge 0$:

$$(I-T_1^c)^{-\nu}u_1=(I-T^c)^{-\nu}u_1=$$

$$=(I-T^c)^{-\nu}T^cTu.$$

Получаем коэффициенты для случая $k=1$:

$$c_\nu=\begin{cases}\dfrac{1}{s_1(0)}(I-T)^{-2}T^2u,Tu]-1, & \nu=1;\\[2mm] \dfrac{1}{s_1(0)}[(I-T)^{-(\nu+1)}T^\nu u,Tu], & 2\le\nu\le n;\\[2mm] \dfrac{1}{s_1(0)}[(I-T)^{-(n+1)}T^n u,(I-T^c)^{-(\nu-n)}T^{c(\nu-n)}Tu], & \\ & n+1\le\nu\le 2n.\end{cases}$$

Пусть утверждение справедливо для $k=m-1$.

Докажем для $k=m$.

То есть нужно найти коэффициенты разложения функции $s(\lambda)=\lambda^m s_m(\lambda)$, $s_m(0)\ne 0$.

$$s(\lambda)=\lambda\lambda^{m-1}s_m(\lambda)=\lambda s_1(\lambda).$$

По предположению индукции известно представление коэффициентов $\tilde c_\nu$ для функции $s_1(\lambda)=\lambda^{m-1}s_m(\lambda)$:

$$\tilde c_\nu=\begin{cases}\dfrac{1}{s_m(0)}\sum\limits_{i=1}^{\nu}C_{m-1-i}^{\nu-i}[(I-T_1)^{-(i+1)}T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]-C_{m-1}^{\nu}, & \\ & 1\le\nu<m;\\[2mm] \dfrac{1}{s_m(0)}[(I-T_1)^{-(\nu+1)}T_1^\nu u_1,T_1^{m-1}u_1], & m\le\nu\le n;\\[2mm] \dfrac{1}{s_m(0)}[(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^n u_1,(I-T_1^c)^{-(\nu-n)}T_1^{c(\nu-n)}T_1^{m-1}u_1], & \\ & n+1\le\nu\le 2n.\end{cases}$$

Найдём коэффициенты c_ν разложения функции $s(\lambda)$:

1) $\nu=1$:

$$c_1=c_1-1=\frac{1}{s_m(0)}C_{m-2}^{m-2}[(I-T_1)^{-2}\times$$

$$\times T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]-C_{m-1}^1-1=$$

$$=\frac{1}{s_m(0)}C_{m-1}^{m-1}[(I-T)^{-2}T^{m+1}u,T^m u]-C_m^1.$$

2) $\nu=\overline{2,m-1}$:

$$c_\nu=\tilde c_{\nu-1}+\tilde c_\nu=\frac{1}{s_m(0)}\sum_{i=1}^{\nu-1}C_{m-1-i}^{\nu-1-i}\times$$

$$\times[(I-T_1)^{-(i+1)}T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]-C_{m-1}^{\nu-1}+$$

$$+\frac{1}{s_m(0)}\sum_{i=1}^{\nu}C_{m-1-i}^{\nu-i}[(I-T_1)^{-(i+1)}\times$$

$$\times T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]-C_{m-1}^{\nu}=$$

$$=\frac{1}{s_m(0)}\sum_{i=1}^{\nu}C_{m-i}^{\nu-i}[(I-T_1)^{-(i+1)}\times$$

$$\times T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]-C_m^{\nu}=$$

$$=\frac{1}{s_m(0)}\sum_{i=1}^{\nu}C_{m-i}^{\nu-i}[(I-T)^{-(i+1)}T^{m+1}u,T^m u]-C_m^{\nu}.$$

Граничный случай $\nu=m$:

$$c_m=\tilde c_{m-1}+\tilde c_m=\frac{1}{s_m(0)}(\sum_{i=1}^{m-1}C_{m-1-i}^{m-1-i}\times$$

$$\times[(I-T_1)^{-(i+1)}T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]+$$

$$+[(I-T_1)^{-(m+1)}T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1])-C_{m-1}^{m-1}=$$

$$=\frac{1}{s_m(0)}\sum_{i=1}^{m}C_{m-i}^{m-i}[(I-T_1)^{-(i+1)}T_1^m u_1,T_1^{m-1}u_1]-C_m^m=$$

$$=\frac{1}{s_m(0)}\sum_{i=1}^{m}C_{m-i}^{m-i}[(I-T)^{-(i+1)}T^{m+1}u,T^m u]-C_m^m.$$

3) $\nu = \overline{m+1, n}$:

$$c_\nu = \frac{1}{s_m(0)}([(I-T_1)^{-\nu}T_1^{\nu-1}u_1, T_1^{m-1}u_1] +$$

$$+[(I-T_1)^{-(\nu+1)}T_1^{\nu}u_1, T_1^{m-1}u_1]) =$$

$$= \frac{1}{s_m(0)}[(I-T_1)^{-(\nu+1)}T_1^{\nu-1}u_1, T_1^{m-1}u_1] =$$

$$= \frac{1}{s_m(0)}[(I-T)^{-(\nu+1)}T^{\nu}u, T^{m}u].$$

Граничный случай $\nu = n+1$:

$$c_{n+1} = \tilde{c}_n + \tilde{c}_{n+1} = \frac{1}{s_m(0)}([(I-T_1)^{-(n+1)} \times$$

$$\times T_1^{n}u_1, T_1^{m-1}u_1] + [(I-T_1)^{-(n+1)} \times$$

$$\times T_1^{n}u_1, (I-T_1^{c})^{-1}T_1^{c}T_1^{m-1}u_1]) =$$

$$= \frac{1}{s_m(0)}[(I-T)^{-(n+1)}T^{n}u, (I-T^{c})^{-1}T^{c}T^{m}u].$$

4) $\nu = \overline{n+2, 2n}$:

$$c_\nu = \tilde{c}_{\nu-1} + \tilde{c}_\nu = \frac{1}{s_m(0)}([(I-T_1)^{-(n+1)} \times$$

$$\times T_1^{n}u_1, (I-T_1^{c})^{-(\nu-1-n)}T_1^{c(\nu-1-n)}T_1^{m-1}u_1] +$$

$$+[(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^{n}u_1, (I-T_1^{c})^{(\nu-n)}T_1^{c(\nu-n)}T_1^{m-1}u_1]) =$$

$$= \frac{1}{s_m(0)}[(I-T_1)^{-(n+1)}T_1^{n}u_1, (I-T_1^{c})^{-(\nu-n)} \times$$

$$\times T_1^{c(\nu-1-n)}T_1^{m-1}u_1] = \frac{1}{s_m(0)}[(I-T)^{-(n+1)} \times$$

$$\times T^{n}u, (I-T^{c})^{-(\nu-n)}T^{c(\nu-n)}T^{m}u].$$

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т.Я.* Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов — М.: Наука, 1986, — 352 с.

2. *Krein M.G.* Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen / M. G. Krein, H. Langer // Math. Nachr. 77, 1977, S. 187—236.

3. *Ахиезер Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман — М.: Наука, 1966.

4. *Alpay D.* The Shur Algorithm for Generalized Schur Functions IV: Unitary Realizations / D. Alpay, T. Ya. Azizov, A. Dijksma, H. Langer, G. Wanjala // Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 149, Birkhäuser, Basel, 2004, P. 23—45.

5. *Иохвидов И.С.* Унитарные операторы в пространстве с индефинитной метрикой / И. С. Иохвидов // Зап. НИИ мат. и мех. Харьков. гос. ун-та и мат. о-ва, 1949, № 21, С. 79—86.

Поступила в редакцию 07.11.2006