УДК 517.98+517.54

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ

Е. В. Лопушанская

Воронежский государственный университет

В работе М. Г. Крейна, Г. Лангера "Uber einige Forsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhangen" была решена задача аппроксимации обобщенной функции Неванлинна g в некоторой области $W_\nu = \left\{\alpha \in C_0, |\arg\alpha - \frac{\pi}{2}| \le \nu\right\}$, где $0 \le \nu < \frac{\pi}{2}$.

Обобщенная функция Каратеодори связана с обобщенной функцией Неванлинны с помощью преобразования Кэли—Неймана. В данной работе приведены результаты об апроксимации, полученные для обобщенной функции Каратеодори.

Пусть H — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и на H задана полуторалинейная эрмитова форма $Q(x,y) = [x,y]$, т.е. отображение $Q : H \times H \to \mathbb{C}$, линейное по первому аргументу:

$$Q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 Q(x_1, y) + \lambda_2 Q(x_2, y),$$

$$(x_1, x_2, y \in H; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$$

и эрмитово симметричное

$$Q(y,x) = \overline{Q(x,y)},\ (x,y \in H).$$

Определение 1. Пространство H с Q-метрикой $Q(x,y) = [x,y]$, допускающее разложение в Q-ортогональную прямую сумму

$$H = H^+[\dot{+}]H^-,$$

в котором H^+ и H^- являются полными, т.е. гильбертовыми пространствами по отношению к нормам $\|x\| = [x,x]^{1/2}$, $(x \in H^+)$ и $\|x\| = (-[x,x]^{1/2})$, $(x \in H^-)$ соответственно, называется пространством Крейна.

Определение 2. Пространство Крейна $H = H^+[\dot{+}]H^-$ с конечным рангом индефинитности $\varkappa = \min\{\dim H^+, \dim H^-\}$ называется пространством Понтрягина и обозначается $\Pi_\varkappa$.

Определение 3 Функция K двух переменных, определенная на $\Lambda \times \Lambda$, где $\Lambda = \Lambda^* \subset \mathbb{C}$, и со значениями в множестве непрерывных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H и определенных на нем, называется эрмитовым ядром, если $K(\lambda,\mu) = K^*(\mu,\lambda)$; говорят, что эрмитово ядро $K(\lambda,\mu)$ имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов, если для любых конечных наборов $\{\lambda_i\}_1^\tau \subset \Lambda, \{\xi_i\}_1^\tau \subset \mathbb{C}$ и $\{x_i\}_1^\tau \subset H$ квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{\tau} (K(\lambda_i, \lambda_j) x_i, x_j) \xi_i \bar{\xi}_j$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов, а хотя бы для одного набора их ровно $\varkappa$.

Определение 4. Функция f называется обобщенной функцией Каратеодори, если она мероморфна в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ и ядро $K_f = \dfrac{f(\lambda) + \overline{f(\mu)}}{1 - \lambda\bar{\mu}}$ имеет конечное число отрицательных квадратов. Обозначим через $C_\varkappa$ класс обобщенных функций Каратеодори с $\varkappa$ отрицательными квадратами.

Определение 5. Элемент $v \in \Pi_\varkappa$ называется порождающим элементом для унитарного оператора $V : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$, если

$$\Pi_\varkappa = \overline{span}\{(V - \lambda I)^{-1} v, \lambda \in \Omega_\nu \setminus \sigma_p(V)\},$$

где

$$\Omega_\nu = \left\{\lambda : \lambda = \frac{\alpha - i}{\alpha + i}, \alpha \in W_\nu\right\},$$

$$W_\nu = \left\{\alpha \in C_0, \left|\arg\alpha - \frac{\pi}{2}\right| \le \nu\right\},$$

$$0 \le \nu < \frac{\pi}{2}.$$

Известно (см., напр.[2]), что функция f принадлежит классу $C_\varkappa$ тогда и только тогда, когда существует пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, унитарный оператор $V : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$ и его порождающий элемент $v \in \Pi_\varkappa$ такие, что:

$$f(\lambda) = f(0) + 2\lambda[(V - \lambda)^{-1} v, v],\quad (\lambda \in \mathbb{D} \setminus \sigma_p(V)). \tag{1}$$

Лемма 6 *Функция f удовлетворяет свойствам:*

1. $f(\lambda) \in C_\varkappa$;

2. $\overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda\in\Omega_V}}}\dfrac{\operatorname{Re} f(\lambda)}{|1-\lambda|}<\infty;$

3. $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda\in\Omega_V}} f(\lambda)=0;$

тогда и только тогда, когда порождающий элемент $v\in\Pi_\varkappa$ *в представлении (1) принадлежит области определения оператора* $(V-I)^{-1}: v\in\operatorname{dom}(V-I)^{-1}$ *и представление (1) функции f принимает вид:*

$$f(\lambda)=-2(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v,(V-I)^{-1}v],\quad (\lambda\in\Omega_v\setminus\sigma_p(V)). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть для функции f выполнены условия 1, 2 и 3 леммы. Из представления (1) следует что

$$\frac{f(\lambda)+\overline{f(\mu)}}{1-\lambda\overline{\mu}}=2[(V-\lambda)^{-1}v,(V-\mu)^{-1}v].$$

При $\mu=\lambda$, получаем:

$$\frac{\operatorname{Re} f(\lambda)}{1-|\lambda|^2}=[(V-\lambda)^{-1}v,(V-\lambda)^{-1}v].$$

Используя условие 2, имеем:

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda\in\Omega_V}}}[(V-\lambda)^{-1}v,(V-\lambda)^{-1}v]<\infty. \tag{3}$$

Покажем, что $v\in\operatorname{dom}(V-I)^{-1}$. Пусть $A-\pi$ — самосопряженный оператор, связанный с оператором V преобразованием Кэли—Неймана:

$$A=-i(V+I)(V-I)^{-1}=$$
$$=-i-2i(V-I)^{-1}.$$

Тогда $\operatorname{dom} A=\operatorname{dom}(V-I)^{-1}$,

$$(V-\lambda)^{-1}=\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A+i)(A-\alpha)^{-1},$$

где $\alpha=-i\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Из неравенства (3) получаем:

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_V}}}[(\alpha+i)(A+i)(A-\alpha)^{-1}v,(\alpha+i)\times \times(A+i)(A-\alpha)^{-1}v]<\infty, \tag{4}$$

Так как $A:\Pi_\varkappa\to\Pi_\varkappa$ — самосопряженный оператор, то (см. [1]) $\Pi_\varkappa$ можно разложить на инвариантные подпространства оператора A:

$$\Pi_\varkappa=\Pi'_\varkappa[+]H, \tag{5}$$

где $\Pi'_\varkappa$ — пространство Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами и $\{H,[.,.]\}$ — гильбертово пространство, причём $A'=A|_{\Pi'_\varkappa}$ — ограниченный оператор, а $A''=A|_H$ — гильбертов самосопряженный. Тогда, разложив относительно (5) порождающий элемент $v=v'+v''$, перепишем:

$$[(\alpha+i)(A+i)(A-\alpha)^{-1}v,(\alpha+i)\times$$
$$\times(A+i)(A-\alpha)^{-1}v]=$$
$$=[(\alpha+i)(A'+i)(A'-\alpha)^{-1}v',(\alpha+i)\times$$
$$\times(A'+i)(A'-\alpha)^{-1}v']+$$
$$+[(\alpha+i)(A''+i)(A''-\alpha)^{-1}v'',(\alpha+i)\times$$
$$\times(A''+i)(A''-\alpha)^{-1}v'']$$

Так как A' — ограниченный оператор, то

$$\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_V}}[(\alpha+i)(A'+i)(A'-\alpha)^{-1}v',(\alpha+i)\times$$
$$\times(A'+i)(A'-\alpha)^{-1}v']<\infty.$$

Из неравенства (4) имеем:

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_V}}}[(\alpha+i)(A''+i)(A''-\alpha)^{-1}v',(\alpha+i)\times$$
$$\times(A'+i)(A''-\alpha)^{-1}v'']<\infty,$$

Тогда для $\alpha=iy$:

$$\overline{\lim_{y\nearrow\infty}}[(y+1)(A''+i)(A''-iy)^{-1}v'',(y+1)\times$$
$$\times(A''+i)(A''-iy)^{-1}v'']<\infty.$$

Так как $A''=A''^*$, то положив $\sigma(t)=[E_tv,v]$, E_t — спектральная функция оператора A'', получим:

$$\overline{\lim_{y\nearrow\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(t+i)^2(y+1)^2}{(t-iy)^2}\right|d\sigma(t)=$$
$$=\overline{\lim_{y\nearrow\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(t+i)^2(y+1)^2(t+iy)^2}{(t^2+y^2)^2}\right|d\sigma(t)<\infty.$$

Для вещественной части имеем:

$$\overline{\lim_{y\nearrow\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t^2-1)(t^2-y^2)(y+1)^2-4t^2y(y+1)^2}{(t^2+y^2)^2}d\sigma(t)<\infty,$$

Вычислив предел в левой части неравенства, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1-t^2)d\sigma(t)<\infty\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}t^2d\sigma(t)<\infty.$$

Таким образом, по теореме [3]: $v''\in\operatorname{dom} A''$. Следовательно, $v=v'+v''\in\operatorname{dom} A=\operatorname{dom}(V-I)^{-1}$.

Покажем, что $[(V-\lambda)^{-1}v,v]\to[(V-I)^{-1}v,v]$, при $\lambda\to 1,\lambda\in\Omega_v$. Заметим, что поскольку $((V-I)^{-1})^*=(V^*-I)^{-1}=(V^{-1}-I)^{-1}=-V(V-I)^{-1}$, то $\operatorname{dom}(V-I)^{-1}=\operatorname{dom}(V^*-I)^{-1}$ и

$$[(V-\lambda)^{-1}v,v]-[(V-I)^{-1}v,v]=$$
$$=(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v,(V^*-I)^{-1}v].$$

Введём в $\Pi_\varkappa$ гильбертово скалярное произведение: $(x,y)=(x',y')_1+[x'',y'']$, где $x=x'+x''$, $y=y'+y''$ — представление векторов x,y относительно разложения (5), $(x',y')_1$ — какое-либо каноническое скалярное произведение в $\Pi'_\varkappa$. Тогда:

$$\left|[(V-\lambda)^{-1}v,v]-[(V-I)^{-1}v,v]\right| \le \\ \le |\lambda-1|\left\|(V-\lambda)^{-1}v\right\|\left\|(V^*-I)^{-1}v\right\|. \qquad (6)$$

Покажем, что множество векторов $(V-\lambda)^{-1}v$ ограничено. Операторы $V'=V|_{\Pi'_\varkappa}$ и $V''=V\,|\,H$ связаны с A' и A'' тем же преобразованием Кэли—Неймана.

$$(V-\lambda I)^{-1}=\begin{bmatrix}(V'-\lambda)^{-1} & 0\\ 0 & (V''-\lambda)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Так как

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}[(V-\lambda)^{-1}v,(V-\lambda)^{-1}v]=$$
$$=\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}[(V'-\lambda)^{-1}v',(V'-\lambda)^{-1}v']+$$
$$+\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}[(V''-\lambda)^{-1}v'',(V''-\lambda)^{-1}v'']=$$
$$=[(V'-I)^{-1}v',(V'-I)^{-1}v']+$$
$$+\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}[(V''-\lambda)^{-1}v'',(V''-\lambda)^{-1}v'']<\infty,$$

то $\overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}[(V''-\lambda)^{-1}v'',(V''-\lambda)^{-1}v'']<\infty$ и $\overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}\left\|(V''-\lambda)^{-1}v''\right\|<\infty$. Так как $1\in\rho(V')$, то $\overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}\left\|(V'-\lambda)^{-1}v'\right\|<\infty$. И, следовательно:

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}\left\|(V-\lambda)^{-1}v\right\|<\infty.$$

Тогда, из неравенства (6) следует, что

$$[(V-\lambda)^{-1}v,v]\to[(V-I)^{-1}v,v],$$

при $\lambda\to1,\lambda\in\Omega_\nu$. Используя равенство (1), из свойства 3 получаем:

$$f(0)=-2[(V-I)^{-1}v,v].$$

Тогда

$$f(\lambda)=-2(\lambda-1)\times$$
$$\times[(V-\lambda)^{-1}v,(V-I)^{-1}v].$$

Обратно, докажем, что функция $f(\lambda)=$ $=-2(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v,(V-I)^{-1}v]$ является функцией Каратеодори:

Таким образом $f\in C_\varkappa$.

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}\frac{\operatorname{Re}f(\lambda)}{1-|\lambda|}=$$
$$=4\overline{\lim_{\substack{\lambda\to1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}}[(V-\lambda)^{-1}v,(V-\lambda)^{-1}v]=$$
$$=4\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_\nu}}}[\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A+i)\times$$
$$\times(A-\alpha)^{-1}v,\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A+i)(A-\alpha)^{-1}v].$$

Для доказательства свойства 2 необходимо проверить, что:

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_\nu}}}\Big[\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A''+i)\times$$
$$\times(A''-\alpha)^{-1}v'',\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A''+i)\times$$
$$\times(A''-\alpha)^{-1}v''\Big]<\infty,$$

где $v''\in H$ и $A''=A|_H$, где H — гильбертово пространство в разложении пространства $\Pi_\varkappa$ (5). Используя, что $\alpha\in W_\nu$, то есть верно следующее неравенство $|t-\alpha|\ge|\alpha|\cos\nu$, получим оценку:

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_\nu}}}\Big[\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A''+i)(A''-\alpha)^{-1}\times$$
$$\times v'',\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A''+i)(A''-\alpha)^{-1}v''\Big]=$$
$$=\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_\nu}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(t+i)^2(\alpha+i)^2}{(t-\alpha)^2}\right|d\sigma(t)\le$$
$$\le\overline{\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \alpha\in W_\nu}}}\frac{1}{\cos^2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t+i|^2|\alpha+i|^2}{|\alpha|^2}=$$
$$=\frac{1}{\cos^2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2-1)d\sigma(t)<\infty,$$

так как $v\in\operatorname{dom}A=\operatorname{dom}(V-I)^{-1}$. Свойство 3 следует из представления (2) функции f.

Теорема 7 *Для функции f следующие свойства:*

1. $f(\lambda)\in C_\varkappa$,
2. *Для целого числа $n\ge0$ существуют $2n$ чисел $s_0,s_1,\ldots,s_{2n-1}$ таких, что*

$$\frac{f(\lambda)+\overline{f(\mu)}}{1-\lambda\bar\mu}=\frac{-2(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v,(V-I)^{-1}v]+2(\bar\mu-1)[(V^c-\mu)^{-1}v,V(V-I)^{-1}v]}{1-\lambda\bar\mu}=$$
$$=2[(V-\lambda)^{-1}v,(V-\mu)^{-1}v].$$

$$f(\lambda)+\sum_{\nu=0}^{2n-1}s_\nu(\lambda-1)^{\nu+1}=O((\lambda-1)^{2n+1}),\quad (\lambda\to 1,\lambda\in\Omega_\nu), \tag{7}$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют $\pi_\varkappa$-пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, π-унитарный оператор $V:\Pi_\varkappa\to\Pi_\varkappa$ и порождающий для V элемент $v\in dom((V-I)^{-(n+1)})$, такие, что

$$f(\lambda)=-2(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v,(V-I)^{-1}v],\quad (\lambda\in\Omega_\nu\setminus\sigma_p(V)). \tag{8}$$

При этом

$$s_\nu=\begin{cases}2[(V-I)^{-(\nu+1)}v,(V-I)^{-1}v],\ 0\le\nu\le n\\ (-1)^{\nu-n}2[(V-I)^{-(n+1)}v,V^{\nu-n}(V-I)^{-\nu+n-1}v],\\ \qquad n<\nu\le 2n-1.\end{cases}$$

Доказательство. Представление (7) функции f обеспечивает выполнение условий 2 и 3 леммы, откуда получаем представление (8).

Введём в рассмотрение функцию $g(\alpha)=if(\lambda)$, где $\alpha=i\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Покажем, что эта функция является функцией Неванлинна. Для этого рассмотрим ядро:

$$\frac{g(\alpha)-\overline{g(\beta)}}{\alpha-\overline{\beta}}=\frac{if(\lambda)+i\overline{f(\mu)}}{i\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}+i\dfrac{1+\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}}}=$$

$$=\frac{1-\lambda}{\sqrt2}\cdot\frac{f(\lambda)+\overline{f(\mu)}}{1-\lambda\overline{\mu}}\cdot\frac{1-\overline{\mu}}{\sqrt2}.$$

Из полученного соотношения и из того, что f — это функция Каратеодори следует, что функция g — это функция Неванлинна. Из представления (8) получаем, что:

$$g(\alpha)=-2i(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v,(V-I)^{-1}v]=$$

$$=-2i\cdot\frac{-2i}{\alpha+i}\cdot\left[\frac{1}{2i}(\alpha+i)(A-\alpha)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times(A+i)v,\frac{-1}{2i}(A+i)v\right]=[(A-\alpha)^{-1}u,u],$$

где $A=i(I+V)(I-V)^{-1}$ — самосопряженный оператор, $\alpha=i\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ и $u=(A+i)v$. Используя разложение (7) функции Каратеодори в ряд , найдём разложение для функции Неванлинна.

$$s_\nu=\begin{cases}2[(V-I)^{-(\nu+1)}v,(V-I)^{-1}v],\ 0\le\nu\le n,\\ (-1)^{\nu-n}2[(V-I)^{-(n+1)}v,V^{\nu-n}(V-I)^{-\nu+n-1}v],\\ \qquad n<\nu\le 2n-1,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}2\left[\dfrac{(-1)^{\nu+1}}{(2i)^{\nu+1}}(A+I)^{(\nu+1)}v,\dfrac{-1}{2i}(A+I)v\right],\\ (-1)^{\nu-n}2\left[\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+1}}(A+I)^{(n+1)}v,(A-i)^{\nu-n}\times\right.\\ \left.\times(A+i)^{n-\nu}\dfrac{(-1)^{\nu-n+1}}{(2i)^{\nu-n+1}}(A+I)^{\nu-n+1}v\right],\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\nu+1}}{i(2i)^{\nu+1}}[(A+I)^{\nu}u,u],\ 0\le\nu\le n,\\ \dfrac{2(-1)^{\nu+1}}{(2i)^{\nu+2}}[(A+I)^{n}u,(A-i)^{\nu-n}u],n<\nu\le 2n-1.\end{cases}$$

$$g(\alpha)=if(\lambda)=i\left(-\sum_{\nu=0}^{2n-1}s_\nu(\lambda-1)^{\nu+1}+\right.$$

$$\left.+O(\lambda-1)^{2n+1})\right)=$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{2n-1}s'_\nu\frac{1}{(\alpha+i)^{\nu+1}}+O\left(\frac{1}{(\alpha+i)^{2n+1}}\right),$$

$$(\alpha\to\infty,\alpha\in W_\nu),$$

где

$$s'_\nu=\begin{cases}[(A+i)^{\nu}u,u],\ 0\le\nu\le n,\\ [(A+i)^{n}u,(A-i)^{\nu-n}],\ n<\nu\le 2n-1.\end{cases}$$

Из теоремы [1, § 1, п. 4] мы знаем, что $u\in\operatorname{dom}A^n=$ $=\operatorname{dom}(V-I)^{-n}$. Из того, что $(V-I)^{-1}v=-\dfrac{1}{2i}u$, следует, что

$$(V-I)^{-1}v\in\operatorname{dom}(V-I)^{-n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\in\operatorname{dom}(V-I)^{-(n+1)}.$$

Обратно, заметим, что для $k\ge 0$ и $v\in\operatorname{dom}((V-I)^{-(k+1)})$ выполнено тождество:

$$2(\lambda-1)[V(V-I)^{-1}(V-\lambda)^{-1}v,v]=$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{2k}s_\nu(\lambda-1)^{\nu+1}+2(-1)^{k+1}(\lambda-1)^{2k+2}\times \tag{9}$$

$$\times[(V-\lambda)^{-1}(V-I)^{-(k+1)}v,V^k(V-I)^{-(k+1)}v].$$

Для доказательства представления (7) нужно проверить, что

$$-2(\lambda-1)^{2k+1}(-1)^k\times[(V-I)^{-(k+1)}v,V^k(V-I)^{k-1}v]+$$

$$+2(-1)^{k+1}(\lambda-1)^{2k+2}[(V-\lambda)^{-1}\times$$

$$\times(V-I)^{-(k+1)}v,V^k(V-I)^{-(k+1)}v]=O((\lambda-1)^{2k+1}).$$

Для этого достаточно показать, что

$$(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}\times$$
$$\times(V-I)^{-(k+1)}v, V^k(V-I)^{-(k+1)}v]\to 0,$$
$$\lambda\to 1, \lambda\in\Omega_\nu.$$

Переходя к π -самосопряженному оператору A получим, что для доказательства нашего утверждения нужно проверить, что

$$[(A''-\alpha)^{-1}(A''+i)^{k+2}v'', (A''+i)\times$$
$$\times(A''-i)^k v'']\to 0,\ \ \alpha\to\infty, \alpha\in W_\nu,$$

где $u''\in H$ и $A''=A|_H$, где H -гильбертово пространство в разложении (5) пространства $\Pi_\varkappa$.

Рассмотрим нижеследующий интеграл, где $\sigma(t)=[E_t u,u]$, а E_t — спектральная функция оператора A'' :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha}\right|d\sigma(t)=$$
$$=\int_{-\nu}^{\nu}\left|\frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha}\right|d\sigma(t)+$$
$$+\int_{|t|>\nu}\left|\frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha}\right|d\sigma(t).$$

Используя, что для $\alpha\in W_\nu$ верны неравенства

$$|t-\alpha|\ge|\alpha|\cos\nu,\ \ |t-\alpha|\ge|t|\cos\nu,$$

получаем следующую оценку:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha}d\sigma(t)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{|\alpha|\,cos\nu}\int_{-\nu}^{\nu}\left|(t^2+1)^{k+1}(t+i)\right|d\sigma(t)+$$
$$+\frac{1}{cos\nu}\int_{|t|>\nu}\left|(t^2+1)^{k+1}\left(1+\frac{i}{t}\right)\right|d\sigma(t).$$

По теореме [3] имеем, что $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+1)^{k+1}d\sigma(t)<\infty$, откуда и получаем нужный результат.

Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krein M.G., Langer H.* Uber einige Forsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhangen, I: Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. — Math. Nachr., 1977, 77, S. 193—206.

2. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.

3. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 03.11.2006