*УДК 517.946*

# АЛГЕБРЫ ВЕСОВЫХ И ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**С. Д. Махортов**

*Воронежский государственный университет*

Рассматриваются специальные классы псевдодифференциальных операторов (ПДО) неглавного типа. Эти операторы имеют множество вырождения ненулевой меры, обусловленное наличием в их символах весового множителя $\alpha$. Предлагаемый метод исследования вырождающихся ПДО основан на их сравнении с другими ПДО, построенными по введенному В. П. Глушко весовому преобразованию Фурье $F_\alpha$. Преобразование $F_\alpha$ «поглощает» множитель $\alpha$, в результате получаются операторы с символами из хорошо известного класса. Для построения этой теории требуются также весовые пространства типа Соболева—Слободецкого.

Предметом настоящей работы являются псевдодифференциальные операторы (ПДО) специальных классов, не относящиеся к главному типу [1]. Они могут возникать при исследовании разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений в компактных областях с гладкой границей. Одна из таковых — задача с косой (наклонной) производной. Она имеет богатую историю (ее изучал еще А. Пуанкаре, занимаясь теорией морских приливов) и до настоящего времени продолжает вызывать интерес исследователей. Об этом свидетельствуют связанные с ней непрекращающиеся публикации как математиков (широкая библиография приведена в [2]), так и специалистов-прикладников (см., например, [3—4]). Этой задаче была посвящена также и работа [5], результаты которой могут быть обобщены путем применения рассматриваемых здесь классов вырождающихся ПДО.

Предлагается метод исследования этих операторов, основанный на их сравнении с весовыми псевдодифференциальными операторами (ВПДО), построенными по введенному В. П. Глушко [6] весовому преобразованию Фурье $F_\alpha$. Преобразование $F_\alpha$ «поглощает» множитель $\alpha$, в результате чего получаются операторы с символами из хорошо известного класса. Поскольку преобразование $F_\alpha$ определено на функциях в полупространстве, то одной из проблем является распространение понятия ВПДО на функции во всем пространстве.

Часть полученных здесь результатов (пп. 2—3) представляет собой обобщение работ [7—8] как с точки зрения классов символов вырождающихся ПДО, так и требуемых условий на весовую функцию. Результаты, касающиеся ПДО с однородными символами (п. 4), в периодике публикуются автором впервые.

## 1. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введем весовую функцию $\alpha \in C(R)$, удовлетворяющую следующим условиям.

**Условие 1**. $\alpha(t) = 0,\ t \le 0;\ \alpha(t) > 0,\ t > 0;$ $\alpha(t) = \mathrm{const},\ t \ge d > 0.$

**Условие 2**. $\alpha|_{R^+} \in C^\infty\left(\bar{R}^+\right);\ \alpha \in C^{M+1}(R)$ $(M \ge 0)$.

Положим

$$\tau = \tau(t) = \int_d^t \frac{dp}{\alpha(p)}, t \in R^+. \qquad (1.1)$$

В силу условий 1—2 существует функция $t = \psi(\tau),\ \tau \in R$, обратная к (1.1). По функции $\varphi \in C(R^+)$ определим функцию $\varphi_\alpha \in C(R)$ равенством

$$\varphi_\alpha(\tau) = \alpha^{1/2}\left(\psi(\tau)\right)\varphi\left(\psi(\tau)\right). \qquad (1.2)$$

Через $S = S(R)$ обозначим пространство Шварца функций $\varphi$ со счетной системой норм

$$\left\|[\varphi]\right\|_p = \sup_{t\in R}\left(1+|t|\right)^p \sum_{j=0}^{p}\left|D_t^j\varphi(t)\right|,$$
$$p = 0,1...$$

**Определение 1.1**. Функция $\varphi \in C^\infty\left(R^+\right)$ принадлежит пространству $S_\alpha^+ = S_\alpha\left(R^+\right)$, если соответствующая функция $\varphi_\alpha$ принадлежит $S$. Система норм в $S_\alpha^+$ имеет вид

$$\left\|[\varphi]\right\|_{p,\alpha}^+ = \left\|[\varphi_\alpha]\right\|_p,\ p = 0,1...$$

В $S_\alpha^+$ непрерывны следующие операции:

1) умножение на функцию $a \in C(R^+)$, для которой $a_\alpha \in C^\infty(R)$, причем каждая производная функции $a_\alpha$ растет на бесконечности не быстрее полинома;

2) дифференцирование $D_t$;

3) весовое дифференцирование

$$D_{\alpha,t} = \alpha^{1/2}(t) D_t \alpha^{1/2}(t). \tag{1.3}$$

На функциях $\varphi \in S_\alpha^+$ определим весовое преобразование Фурье $F_\alpha : F_\alpha[\varphi](\eta) = F_{\tau\to\eta}[\varphi_\alpha]$, где $F_{\tau\to\eta}$ — обычное преобразование Фурье, переводящее $\tau$ в $\eta$. Для преобразования $F_\alpha$ существует обратное $F_\alpha^{-1} : F_\alpha^1[\nu](t) = \alpha^{-1/2}(t) F_{\eta-\tau}^{-1}[\nu]$. Оператор $F_\alpha$ отображает взаимно однозначно и непрерывно $S_\alpha^+$ на $S$. Справедливы равенства

$$\begin{gathered} F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^j \varphi\right] = \eta^j F_\alpha[\varphi]; \\ D_\eta^j F_\alpha[\varphi] = F_\alpha\left[\tau^j \varphi\right],\ j = 0,1,..., \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\varphi \in S_\alpha^+$; $D_{\alpha,t}$ определена в (1.3).

**Определение 1.2**. Функция $\varphi \in C^\infty(R^-)$ принадлежит пространству $S^-$, если функция $\varphi_0$ — продолжение нулем на $R$ функции $\varphi$ —принадлежит $S$. Топология в $S^-$ задается системой норм $\|[\varphi]\|_p^- = \|[\varphi_0]\|_p$, $p = 0,1,...$

Всюду в дальнейшем для $\varphi \in C(R)$ будем обозначать $\varphi^\pm = \varphi|_{R^\pm}$.

**Определение 1.3**. Функция $\varphi \in C^\infty(R)$ принадлежит пространству $S_\alpha = S_\alpha(R)$, если $\varphi^+$ принадлежит $S_\alpha^+$, а $\varphi^-$ принадлежит $S^-$. Введем в $S_\alpha$ счетную систему норм $\|[\varphi]\|_{p,\alpha} = \|[\varphi^+]\|_{p,\alpha}^+ + \|[\varphi^-]\|_p^-$, $p = 0,1,...$

Нетрудно ввести в $S^-$ и $S_\alpha$ непрерывные операции, аналогичные 1)—3). Справедливо $S_\alpha \subset S$.

**Определение 1.4**. Пространство обобщенных функций $S'(S_\alpha'^+, S'^-, S_\alpha')$ состоит из всех линейных непрерывных функционалов на $S$ (соответственно $S_\alpha^+, S^-, S_\alpha$).

Операции, определенные в $S_\alpha^+, S^-, S_\alpha$, легко переносятся на сопряженные пространства $S_\alpha'^+, S'^-, S_\alpha'$. Нетрудно установить также изоморфизм пространств $S_\alpha'^+$ и $S'$ по аналогии с изоморфизмом пространств $S_\alpha^+$ и $S$, осуществляемым равенством (1.2). Подробнее о весовых пространствах основных и обобщенных функций см. в [9].

## 2. ВЕСОВЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

**Определение 2.1**. Функция $\lambda \in C^\infty(R \times R)$ принадлежит классу символов $\Phi_q$ $(q \in R)$, если выполняются оценки

$$\left|D_t^\ell D_\eta^j \lambda(t,\eta)\right| \le C_{\ell,j}\left(1+\eta^2\right)^{\frac{q-j}{2}},$$
$$\ell, j = 0,1,...,$$

для любых $t \in R$, $\eta \in R$.

**Определение 2.2**. На функциях $\varphi \in S_\alpha$ определим ВПДО $P_{\alpha,q} = P_{\alpha,q}(t, D_{\alpha,t})$ с символом $\lambda \in \Phi_q$ по формуле

$$P_{\alpha,q,\varphi} = \begin{cases} F_\alpha^{-1}\left[\lambda(t,\eta) F_\alpha[\varphi^+]\right],\ t > 0, \\ \lambda(t,0)\varphi^-,\ t < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Легко проверить, что в случае

$$\lambda(t,\eta) = \sum_{j=0}^m a_j(t)\eta^j,$$

где $a_j$ – гладкие ограниченные функции, соответствующий ВПДО имеет вид

$$P_{\alpha,m}\varphi = \sum_{j=0}^m a_j(t) D_{\alpha,t}^j \varphi,\ \varphi \in S_\alpha.$$

Нетрудно показать также, что ВПДО отображает $S_\alpha$ в $S_\alpha$. Ниже мы установим, что оператор $P_{\alpha,q}$, определенный в (2.1), не «разрывает» в точке $t = 0$ функции, имеющие в этой точке достаточное количество производных. Для этого введем еще один класс функций.

**Определение 2.3**. Множество $S^M = S^M(R)$ ($M \ge 0$ — целое) состоит из функций $\varphi \in C^M(R)$, для которых $\varphi^\pm \in C^\infty(\bar{R}^\pm)$, причем

$$\sup_{t\in R^\pm}(1+|t|)^p \sum_{j=0}^p \left|D_j^t \varphi^\pm\right| < \infty,\ p = 0,1,... \tag{2.2}$$

**Теорема 2.1**. Пусть выполнены условия 1-2. Тогда при любом $q \in R$ ВПДО $P_{\alpha,q}(t, D_{\alpha,t})$ отображает $S^M$ в $S^M$.

**Доказательство**. Из результатов [7] вытекает представление

$$\begin{gathered} P_{\alpha,q}\,\varphi|_{t=\psi(\tau)} = \alpha^{-1/2}(\psi(\tau)) \times \\ \times F_{\eta\to\tau}^{-1}\left[\lambda(\psi(\tau),\eta) F_{\tau\to\eta}[\varphi_\alpha(\tau)]\right], \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\psi$ — функция, обратная к (1.1); $\varphi_\alpha$ определена в (1.2); $\varphi \in S^M$.

Из (2.3) и свойства псевдолокальности ПДО (см., например, [1]) следует, что $\left(P_{\alpha,q}\varphi\right)^+ \in C^\infty(R^+)$, если $\varphi^+ \in C^\infty(R^+)$. Соотношение $\left(P_{\alpha,q}\varphi\right)^- \in C^\infty(R^-)$ вытекает непосредственно из (2.1).

Заключительная часть доказательства существенно не отличается от доказательства соответствующей теоремы в [9]. □

Для выяснения дальнейших свойств ВПДО введем весовые пространства типа Соболева—Слободецкого.

Обозначим через $\|\bullet\|$ норму в пространстве $L_2(R)$ и через $\Lambda_\alpha^s$ — ВПДО с символом $\lambda(\eta) = (1+\eta^2)^{s/2}$ $(s \in R)$.

**Определение 2.4**. Функция $u \in S'_\alpha$ принадлежит пространству $H_\alpha^s = H_\alpha^s(R)$ $(s \in R)$, если конечна норма

$$\|u\|_{s,\alpha} = \left\|\Lambda_\alpha^s u\right\|. \tag{2.4}$$

Легко проверить, что при целом $s \geq 0$ норма (2.4) эквивалентна норме

$$|||u|||_{s,\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|.$$

Если обозначить $\|\bullet\|$ норму в $L_2(R^-)$, то, пользуясь результатами [9], можно получить равенство

$$\|u\|_{s,\alpha}^2 = \left\|u_\alpha^+\right\|_s^2 + \|u\|_-^2, \tag{2.5}$$

где $\|\bullet\|_s$ — норма в пространстве Соболева—Слободецкого $H^s$.

Равенство (2.5) позволяет установить для $H_\alpha^s$ ряд аналогов свойств пространства $H^s$. В частности, пространство $H_\alpha^s$ является полным, и в нем плотно множество $S_\alpha$. С помощью (2.5), (2,3) и свойств обычных ПДО (см. [10]) нетрудно также доказать следующие две теоремы.

**Теорема 2.2**. Пусть выполнены условия 1—2. Тогда при любом $q \in R$ оператор $P_{\alpha,q}$ ограничен из $H_\alpha^{s+q}$ в $H_\alpha^s$.

**Теорема 2.3**. Пусть выполнены условия 1—2. Тогда при любых $q_1, q_2 \in R$ оператор $P_{\alpha,q_1} P_{\alpha,q_2}$ является ВПДО с символом из класса $\Phi_{q_1+q_2}$, главная часть которого равна $\lambda_1(t,\eta)\lambda_2(t,\eta)$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — соответственно главные символы операторов $P_{\alpha,q_1}$ и $P_{\alpha,q_2}$.

В следующем пункте мы переходим к изучению вырождающихся ПДО специальных классов.

## 3. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

На функциях $\varphi \in S_\alpha$ определены ПДО вида

$$P_q(t, \alpha D_t)\varphi = F_{\eta \to t}^{-1}\left[\lambda(t, \alpha(t)\eta) F_{t\to\eta}[\varphi]\right], \text{ где } \lambda \in \Phi_q. \tag{3.1}$$

Мы сформулируем ниже теорему сравнения операторов (3.1) с соответствующими ВПДО в норме пространств $H_\alpha^s$. В [8] аналогичная теорема доказана для операторов с символами вида $\lambda(\alpha(t)\eta)$ (символ $\lambda(\eta)$ не зависит от $t$). Кроме того, в [8] требовалось дополнительное условие на функцию $\alpha$, отказаться от которого позволяет следующая лемма.

**Лемма 3.1**. При выполнении условий 1-2 справедлива оценка

$$\alpha(\psi(\tau)) \leq C(1+|\tau|)^{-1}, \ \forall \tau \leq 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. При $\tau \leq 0$ по теореме о среднем из (1.1) имеем

$$\tau(t) = \frac{t-d}{\alpha(\theta)}, \ t \leq \theta \leq d.$$

Оценивая правую часть этого равенства, получим

$$|\tau(t)| = \frac{d-t}{\alpha(\theta)} < \frac{d}{\alpha(\theta)}, \ 0 < t \leq \theta \leq d.$$

С другой стороны, учитывая монотонность функции $\tau$, приходим к неравенству

$$|\tau(\theta)| < \frac{d}{\alpha(\theta)}, \ 0 < \theta \leq d. \tag{3.3}$$

Очевидна также оценка (см. условие 1)

$$1 \leq \frac{C}{\alpha(t)}, \ t \in R_1^+. \tag{3.4}$$

Требуемое неравенство (3.2) вытекает из (3.3) и (3.4). □

**Теорема 3.1**. Пусть выполнены условия 1-2. Тогда для любой функции $u \in H_\alpha^{s+q}$ $(s, q \in R)$ справедлива оценка

$$\left\|P_q(t,\alpha D_t)u - P_{\alpha,q}(t, D_{\alpha,t})u\right\|_{s,\alpha} \leq C\|u\|_{s+q-1,\alpha} \tag{3.5}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от $u$.

Доказательство теоремы опирается на лемму 3.1, но существенно не отличается от проведенного в [8], поэтому мы его здесь не приводим.

Из теорем 3.1 и 2.2 вытекает

**Следствие 3.1**. Пусть выполнены условия 1—2. Тогда при любом $q \in R$ оператор $P_q(t, \alpha D_t)$ ограничен из $H_\alpha^{s+q}$ в $H_\alpha^s$, $s \in R$.

Выясним далее некоторые свойства оператора, являющегося композицией операторов вида (3.1).

**Теорема 3.2**. Пусть выполнены условия 1-2. Тогда при любых $q_1, q_2 \in R$ для любой функции $u \in H_\alpha^{s+q_1+q_2}$ справедлива оценка

$$\left\|P_{q_1}(t,\alpha D_t)P_{q_2}(t,\alpha D_t)u - P_{q_1+q_2}(t,\alpha D_t)u\right\|_{s,\alpha} \leq C\|u\|_{s+q_1+q_2-1,\alpha}, \tag{3.6}$$

где $P_{q_1+q_2}$ — ПДО с символом $\lambda_1(t,\alpha(t)\eta)\lambda_2(t,\alpha(t)\eta)$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — соответственно символы операторов $P_{q_1}$ и $P_{q_2}$.

Доказательство. Имеем

$$P_{q_1}P_{q_2} - P_{q_1+q_2} = \left(P_{q_1}P_{q_2} - P_{\alpha,q_1}P_{q_2}\right) + \\ +P_{\alpha,q_1}\left(P_{q_2} - P\alpha, q_2\right) + \\ +\left(P_{\alpha,q_1}P_{\alpha,q_2} - P_{\alpha_1 q_1+q_2}\right) + \left(P_{\alpha,q_1+q_2} - P_{q_1+q_2}\right). \tag{3.7}$$

Оценивая левую часть (3.6) с помощью (3.7) и применяя теоремы 2.2, 2.3, и 3.1, получим неравенство (3.6). □

Таким образом, мы установили, что операторы вида (3.1) образуют алгебру в том смысле, что главная часть композиции этих операторов также имеет вид (3.1). Причем символ этой главной части определяется как произведение символов операторов, находящихся в композиции.

На практике при исследовании вырождающихся эллиптических задач приходится иметь дело с пространствами типа Соболева—Слободецкого, нормы в которых наряду с весовыми производными содержат также обычные производные меньшего порядка.

**Определение 3.1**. Пространство $H^s_{\alpha,\sigma} = H^s_{\alpha,\sigma}(R)(s \ge 0, \sigma > 1, [s/\sigma] \le M+1, M$ — из условия 2) состоит из функций $u \in H^{[s/\sigma]} \subset S'_\alpha$, для которых конечна норма

$$\|u\|^2_{s,(\alpha,\sigma)} = \sum_{\ell=0}^{[s/\sigma]} \left\|\partial^\ell_t u\right\|^2_{s-\sigma\ell,\alpha} + \|u\|^2_{[s/\sigma]}.$$

**Определение 3.2**. Пространство $H^{s,k}_\alpha = H^{s,k}_\alpha(R)$ $(s \ge 0,\ k \le M+1,\ k \ge 0$ — целое) состоит из функций $u \in H^k \subset S'_\alpha$ с конечной нормой

$$\|u\|^2_{s,\alpha,k} = \sum_{j=0}^{\kappa} \left\|D^j_t u\right\|^2_{s,\alpha} + \|u\|^2_k.$$

В [8] показано, что пространство $H^s_{\alpha,\delta}$ и $H^{s,\kappa}_\alpha$ полны и в каждом из них плотно множество $S$.

Результаты данного раздела могут быть перенесены и на эти пространства. Точнее, справедливы следующие утверждения.

**Теорема 3.3**. Пусть выполнены условия 1—2. Тогда для любой функции $\varphi \in S$ справедливы оценки

$$\left\|P_q(t,\alpha,D_t)\varphi - P_{\alpha,q}(t,D_{\alpha,t})\varphi\right\|_{s,(\alpha,\sigma)} \ge \\ \ge C\|\varphi\|_{s+q-1,(\alpha,\sigma)},$$

$$\left\|P_q(t,\alpha D_t)\varphi - P_{\alpha,q}(t,D_{\alpha,t})\varphi\right\|_{s,\alpha,k} \le \\ \le C\|\varphi\|_{s+q-1,\alpha,k},$$

здесь $s+q \ge 1$.

**Следствие 3.2**. При $s+q \ge 0$ оператор $P_q(t,\alpha D_t)$ ограничен из $H^{s+q}_{\alpha,\sigma}$ в $H^s_{\alpha,\sigma}$ и из $H^{s+q,k}_\alpha$ в $H^{s,k}_\alpha$.

**Теорема 3.4**. Пусть выполнены условия 1—2. Тогда при любых $q_1, q_2 \in R$, $s+q_1+q_2 \ge 1$ для любой функции $\varphi \in S$ справедливы неравенства

$$\left\|P_{q_1}(t,\alpha D_t)P_{q_2}(t,\alpha D_t)\varphi - P_{q_1+q_2}(t,\alpha D_t)\varphi\right\|_{s,(\alpha,\sigma)} \le \\ \le C\|\varphi\|_{s+q_1+q_2-1,(\alpha,\sigma)},$$

$$\left\|P_{q_1}(t,\alpha D_t)P_{q_2}(t,\alpha D_t)\varphi - P_{q_1+q_2}(t,\alpha D_t)\varphi\right\|_{s,\alpha,k} \le \\ \le C\|\varphi\|_{s+q_1+q_2-1,\alpha,k},$$

где ПДО $P_{q_1+q_2}$ определен в теореме 3.2.

Остановимся коротко на некоторых обобщениях полученных результатов. Все изложенные здесь теоремы остаются верными, если используемый класс символов $\Phi_q$ заменить введенным Л. Хермандером более широким классом $S_{p,\delta}$ при $0 \le \delta < \rho \le 1$ (см. [1]).

Для рассмотрения $n$-мерного случая при $n > 1$ введем множество точек евклидова пространства $(t,x)$, где $t = (t_1, t_2, ..., t_m)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-m})$, $m \le n$. Введем также вектор-функцию $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, каждая компонента $\alpha_j$ которой зависит лишь от $t_j$. Предполагается, что все функции $\alpha_j$ удовлетворяют условиям 1—2. В этом случае можно рассмотреть ПДО вида

$$P_q(t,x,\alpha D_t, D_x) = \\ = F^{-1}_{\eta\to t}F^{-1}_{\xi\to x}\left[\lambda(t,x,\alpha(t)\eta,\xi)F_{x\to\xi}F_{t\to\eta}[\bullet]\right], \tag{3.8}$$

где

$$\lambda(t,x,\eta,\xi) \in S^q_{\rho,\delta} \quad (0 \le \delta < \rho \le 1);$$

$$\alpha(t)\eta = \left(\alpha_1(t_1)\eta_1, ..., \alpha_m(t_m)\eta_m\right).$$

Вся изложенная выше методика аналогично применяется к исследованию операторов вида (3.8) с помощью преобразования $F_\alpha = F_{\alpha_1}F_{\alpha_2}...F_{\alpha_m}$.

## 4. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПДО С ОДНОРОДНЫМИ СИМВОЛАМИ

В этом разделе мы рассмотрим виды вырождающихся ПДО, которые находят непосредственное применение при исследовании общих граничных задач для эллиптических уравнений. Основные их свойства определяются результатами п.3, но доказательства требуют некоторых дополнительных рассмотрений.

На функциях $u \in L_2(R_1)$ введем оператор

$$Tu = F^{-1}_{\eta\to t}\left[\check{\theta}(\eta)F_{t\to\eta}[u]\right], \tag{4.1}$$

где

$$\overset{\vee}{\theta}(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > 0 \\ -1, & \eta < 0 \end{cases} = \frac{|\eta|}{\eta} = \operatorname{sgn}\eta.$$

Отметим, что оператор (4.1) совпадает с известным оператором Гильберта

$$Hu = v.p.\frac{1}{\pi i}\int_{R_1}\frac{u(\theta)}{t-\theta}d\theta$$

(см., например, [1])

**Лемма 4.1**. При $s \ge 0$ оператор $T$ ограничен в $H_\alpha^s$.

Доказательство. Пусть $s \ge 0$ — целое. Имеем

$$\|T\varphi\|_{s,\alpha} \le C\sum_{j=0}^{s}\left\|\alpha^j(t)D_t^jT\varphi\right\|,\ \varphi \in S_\alpha. \quad (4.2)$$

Введем функцию

$$h \in C_0^\infty(R_1);\ h(\eta) = 1,\ h(\eta) = 0;\ |\eta| \ge 2. \quad (4.3)$$

Тогда из (4.2) получим

$$\|T\varphi\|_{s,\alpha} \le$$
$$\le C\sum_{j=1}^{s}\left\|F_{\eta\to t}^{-1}\left[\alpha(t)|\eta|(\alpha(t)\eta)^{j-1}(1-h(\alpha(t)\eta))F_{t\to\eta}[\varphi]\right]\right\| +$$
$$+C\sum_{j=1}^{s}\left\|F_{\eta\to t}^{-1}\left[(\alpha(t)\eta)^j h(\alpha(t)\eta)F_{t\to\eta}[Tu]\right]\right\| +$$
$$+C\|Tu\|. \quad (4.4)$$

Учитывая, что $|\eta|\eta^{j-1}(1-h(\eta)) \in \Phi_j$, $\eta^j h(\eta) \in \Phi_0$, из (4.4) с помощью следствия 3.1 получим

$$\|T\varphi\|_{s,\alpha} \le C\left(\sum_{j=1}^{s}\|\varphi\|_{j,\alpha} + \|\varphi\|\right) \le C_1\|\varphi\|_{s,\alpha}. \quad (4.5)$$

Отсюда, пользуясь интерполяционными свойствами пространств $H_\alpha^s$ (см. [9]) и плотностью $S_\alpha$ в $H_\alpha^s$, получаем утверждение леммы. □

Поскольку оператор $T$ коммутирует с производной $\partial_t^\ell$, из леммы 3.1 вытекает

**Следствие 4.1**. При $s \ge 0$ оператор $T$ ограничен в $H_{\alpha,\sigma}^s$ и $H_\alpha^{s,k}$.

Замечание 4.1. Аналогичным образом доказывается ограниченность в $H_{\alpha,\sigma}^s$ и $H_\alpha^{s,k}$ $(s \ge 0)$ ПДО с любым символом вида

$$\overset{\vee}{\theta}(\eta) = \begin{cases} C_1, & \eta > 0, \\ C_2, & \eta < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $C_1$ и $C_2$ – некоторые константы.

Введем в $S_\alpha$ вырождающийся ПДО $M_q(\alpha D_t)$ ($q \ge 0$ – целое) с символом $\lambda(\alpha(t)\eta) = |\alpha(t)\eta|^q$, определяемый равенством (3.1). Как и раньше (см. п. 2), обозначим через $\Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})$ ВПДО с символом

$$\lambda(\eta) = \Lambda_\alpha^q(\eta) = (1+\eta^2)^{q/2}. \quad (4.7)$$

Мы докажем теоремы сравнения для операторов $M_q(\alpha D_t)$ и $\Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})$.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия 1-2. Тогда для любой функции $u \in H_\alpha^{s+q}$ ($s \ge 0$, $q \ge 1$ – целое) справедлива оценка

$$\left\|M_q(\alpha D_t)u - \Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})u\right\|_{s,\alpha} \le C\|u\|_{s+q-1,\alpha}. \quad (4.8)$$

Доказательство. Пусть $h$ — функция из (4.3).

Если обозначить $M_{\alpha,q}(D_{\alpha,t})$ ВПДО с символом

$$\lambda(\eta) = |\eta|^q, \quad (4.9)$$

$\overset{\vee}{T}_{\alpha,q}(D_{\alpha,t})$ – ВПДО с символом

$$\lambda(\eta) = h(\eta)|\eta|^q, \quad (4.10)$$

то легко проверить справедливость оценок

$$\left\|\Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})u - M_{\alpha,q}(D_{\alpha,t})u\right\|_{s,\alpha} \le C\|u\|_{s+q-1,\alpha}; \quad (4.11)$$

$$\left\|\overset{\vee}{T}_{\alpha,q}u\right\|_{s,\alpha} \le C\|u\|. \quad (4.12)$$

При четном $q$ оценка (4.8) вытекает непосредственно из теоремы 4.1 и (4.11). При нечетном $q$ справедливо

$$\frac{|\eta|^q}{\eta^q} = \frac{|\eta|}{\eta}. \quad (4.13)$$

Учитывая (4.13), для $\varphi \in S_\alpha$ имеем

$$M_q(\alpha D_t)\varphi = F_{\eta\to t}^{-1}[(\alpha(t)\eta)^q(1-h(\alpha(t)\eta))\times$$
$$\times F_{t\to\eta}[\varphi]] + F_{\eta\to t}^{-1}[\alpha^q(t)\eta^q h(\alpha(t)\eta)F_{t\to\eta}[T\varphi]], \quad (4.14)$$

где оператор $T$ определен в (4.1). Используя представление (4.14), а также теорему 4.1 и следствие 4.1, получим

$$\left\|M_q(\alpha D_t)\varphi - \Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})\varphi\right\|_{s,\alpha} \le$$
$$\le \left\|M_{\alpha,q}(D_{\alpha,t})\varphi - \Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})\varphi\right\|_{s,\alpha} + \quad (4.15)$$
$$+C\left(\|\varphi\|_{s+q-1,\alpha} + \left\|\overset{\vee}{T}_{\alpha,q}\varphi\right\|_{s,\alpha} + \|T\varphi\|_{s,\alpha}\right).$$

Оценивая правую часть (4.15) с помощью (4.11), (4.12) и (4.6), получим (4.8). □

**Лемма 4.2**. Для любой функции $\varphi \in S^M$ при $q \ge 1$, $\ell = 0,1,\dots M+1$ справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^\ell M_q(\alpha D_t)\varphi - M_q(\alpha D_t)\partial_t^\ell\varphi\right\|_{s,\alpha} \le$$
$$\le C\sum_{\ell'=0}^{\ell}\left\|\partial_t^{\ell'}\varphi\right\|_{s+q-1,\alpha}. \quad (4.16)$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай нечетного $q$. Имеем

$$\partial_t^\ell M_q\left(\alpha D_t\right)\varphi = \partial_t^\ell \alpha^q\left(t\right) D_t^q T\varphi, \qquad (4.17)$$

где оператор $T$ определен в (4.1). Учитывая представление

$$\partial_t^\ell \alpha^q\left(t\right) D_t^q = \alpha^q\left(t\right) D_t^q \partial_t^\ell + \sum_{j=1}^{q-1}\sum_{\ell'=0}^{\ell} a_{j,\ell'}^{q,\ell}\left(t\right) D_{\alpha,t}^j \partial_t^{\ell'}, \qquad (4.18)$$

где функции $a_{j,\ell'}^{q,\ell}$ зависят лишь от функции $\alpha$ и ее производных, из (4.17) получим оценку

$$\left\|\partial_t^\ell M_q\left(\alpha D_t\right)\varphi - M_q\left(\alpha D_t\right)\partial_t^\ell\varphi\right\|_{s,\alpha}^+ \le \le C\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{\ell'=0}^{\ell}\left\|D_{\alpha,t}^j T\partial_t^{\ell'}\varphi\right\|_{s,\alpha}^+, \qquad (4.19)$$

откуда с помощью леммы 4.1 вытекает (4.16). □

**Замечание 4.2**. Все результаты, полученные в настоящем разделе для пространств функций на $R_1$, переносятся без затруднений на $R_n$. Поэтому следующие две теоремы мы сформулируем для $R_n$.

**Теорема 4.2**. Пусть выполнены условия 1-2. Тогда для любой функции $u \in H_{\alpha,\sigma}^{s+q}\left(R_n\right)$ ($q \ge 1$ — целое) справедлива оценка

$$\left\|M_q\left(\alpha D_t\right)u - \Lambda_\alpha^q\left(D_{\alpha,t}\right)u\right\|_{s,(\alpha,\sigma)} \le \le C\left\|u\right\|_{s+q-1,(\alpha,\sigma)}. \qquad (4.20)$$

**Теорема 4.3**. Пусть выполнены условия 1—2. Тогда для любой функции $u \in H_\alpha^{s+q,k}\left(R_n\right)$ ( $s \ge 0,\ q \ge 1$ — целое) выполняется оценка

$$\left\|M_q\left(\alpha D_t\right)u - \Lambda_\alpha^q\left(D_{\alpha,t}\right)u\right\|_{s,k,\alpha} \le \le C\left\|u\right\|_{s+q-1,k,\alpha}. \qquad (4.21)$$

Теоремы 4.2 и 4.3 легко доказываются с помощью теоремы 4.1 и леммы 4.2. □

При исследовании граничных задач находят применение вырождающиеся ПДО с однородными символами в $R_n$. Пусть $\lambda\left(\eta,\xi\right)$ – положительно однородная функция степени $q \ge 0$, $q$ – целое, бесконечно дифференцируемая при $\left|\eta\right| + \left|\xi\right| > 0$ $\left(\eta \in R_1, \xi \in R_{n-1}\right)$. Легко проверить, что такая функция удовлетворяет оценкам

$$\left|\partial_\eta^j\partial_\xi^\beta\lambda\left(\eta,\xi\right)\right| \le C_{j,\beta}\left(\eta^2 + \left|\xi\right|^2\right)^{\frac{q-j-|\beta|}{2}}, \quad \left|\eta\right| + \left|\xi\right| > 0,\ j + \left|\beta\right| = 0,1,\ldots \qquad (4.22)$$

На функциях $\varphi \in S_\alpha\left(R_n\right)$ рассмотрим оператор

$$\alpha^q\left(t\right) A\left(D_t D_x\right)\varphi = = \alpha^q\left(t\right) F_{\eta\to t}^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}\left[\lambda\left(\eta,\xi\right) F_{x\to\xi} F_{t\to\eta}\left[\varphi\right]\right] \qquad (4.23)$$

с описанным однородным символом $\lambda$. Обозначим также

$$\alpha^q\left(t\right) A\left(D_t, 0\right)\varphi = = \alpha^q\left(t\right) F_{\eta\to t}^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}\left[\lambda\left(\eta,0\right) F_{x\to\xi} F_{t\to\eta}\left[\varphi\right]\right]. \qquad (4.24)$$

**Лемма 4.3**. Для любой функции $\varphi \in S_\alpha$ при целом $q \ge 1$ справедливо представление

$$\alpha^q\left(t\right) A\left(D_t, D_x\right)\varphi - \alpha^q\left(t\right) A\left(D_t, 0\right)\varphi = = \alpha\left(t\right)\check{P}_q\,\varphi, \qquad (4.25)$$

где оператор $\check{P}_q$ ограничен из $H_\alpha^{s+q}$ в $H_\alpha^s$, $s \ge 0$.

Доказательство. С помощью формулы Тейлора запишем

$$\lambda\left(\eta,\xi\right) = \lambda\left(\eta,0\right) + + \sum_{1\le|\beta|\le q-1}\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\,\lambda\left(\eta,\xi\right)\Big|_{\xi=0}\xi^\beta + \sum_{|\beta|=q} r_\beta\left(\eta,\xi\right)\xi^\beta, \qquad (4.26)$$

где $\left|\eta\right| > 0$,

$$r_\beta\left(\eta,\xi\right) = \frac{q}{\beta!}\int_0^1 \partial_\rho^\beta\,\lambda\left(\eta,\rho\right)\Big|_{\rho=\kappa\xi}\left(1-\kappa\right)^{q-1}d\kappa. \qquad (4.27)$$

Нетрудно проверить, что в силу положительной однородности функции $\lambda$ справедливы представления

$$\partial_\xi^\beta\,\lambda\left(\eta,\xi\right)\Big|_{\xi=0} = \eta^{q-|\beta|}\,\check{\theta}_\beta\left(\eta\right), \quad \left|\eta\right| > 0,\ 1 \le \left|\beta\right| \le q-1, \qquad (4.28)$$

где каждая из функций $\check{\theta}_\beta$ имеет вид (4.6).

Пусть $h$ — функция, определенная в (4.3). Тогда из (4.26) и (4.28) получим следующее равенство, справедливое при всех $\eta \in R^1$, $\xi \in R^{n-1}$:

$$\lambda\left(\eta,\xi\right) - \lambda\left(\eta,0\right) = h\left(\eta\right)\lambda\left(\eta,\xi\right) - -h\left(\eta\right)\lambda\left(\eta,0\right) + + \sum_{1\le|\beta|\le q-1}\frac{1}{\beta!}\left\{\eta^{q-|\beta|} - h\left(\eta\right)\eta^{q-|\beta|}\right\}\check{\theta}_\beta\left(\eta\right) + +\left(1-h\left(\eta\right)\right)\sum_{|\beta|=q} r_\beta\left(\eta,\xi\right)\xi^\beta, \qquad (4.29)$$

причем

$$\left|\partial_\eta^j\left\{\left(1-h\left(\eta\right)\right) r_\beta\left(\eta,\xi\right)\right\}\right| \le \le C_j\left(1+\eta^2\right)^{-j/2},\ j = 0,1,\ldots \qquad (4.30)$$

Пользуясь (4.23), (4.24) и (4.29), запишем

$$\alpha^q\left(t\right) A\left(D_t, D_x\right)\varphi - \alpha^q\left(t\right) A\left(D_t, 0\right)\varphi = = \alpha^q\left(t\right) F_{\eta\to t}^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}\left[h\left(\eta\right)\lambda\left(\eta,\xi\right) F_{x\to\xi} F_{t\to\eta}\left[\varphi\right]\right] -$$

$$-\alpha^q(t)F_{\eta\to t}^{-1}\left[h(\eta)\lambda(\eta,0)F_{t\to\eta}[\varphi]\right]+$$

$$+\sum_{1\le|\beta|\le q-1}\frac{1}{\beta!}\alpha^{|\beta|}(t)\alpha^{q-|\beta|}(t)D_t^{q-|\beta|}\check{T}_\beta\varphi-$$

$$-\alpha^q(t)\sum_{1\le|\beta|\le q-1}\frac{1}{\beta!}F_{\eta\to t}^{-1}\left[h(\eta)\eta^{q-|\beta|}F_{t\to\eta}\left[\check{T}_\beta\varphi\right]\right]+$$

$$+\alpha^q(t)\sum_{|\beta|=q}R_\beta D_x^\beta\varphi, \tag{4.31}$$

где $\check{T}_\beta$ – ПДО с символом $\check{\theta}_\beta(\eta)$; $R_\beta$ — ПДО с символом $(1-h(\eta))r_\beta(\eta,\xi)$.

Пользуясь замечанием 4.1, легко получить следующие оценки:

$$\left\|F_{\eta\to t}^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}\left[h(\eta)\lambda(\eta,\xi)F_{x\to\xi}F_{t\to\eta}[\varphi]\right]\right\|_{s,\alpha}\le$$

$$\le C\left\|F_{\eta\to t}^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}\left[h(\eta)\lambda(\eta,\xi)F_{x\to\xi}F_{t\to\eta}[\varphi]\right]\right\|_s\le \tag{4.32}$$

$$\le C_1\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s+q}{2}}F_{x\to\xi}[\varphi]\right\|\le C_2\|\varphi\|_{s+q,\alpha};$$

$$\left\|F_{\eta\to t}^{-1}\left[h(\eta)\lambda(\eta,0)F_{t\to\eta}[\varphi]\right]\right\|_{s,\alpha}\le C\|\varphi\|_{s,\alpha}; \tag{4.33}$$

$$\left\|F_{\eta\to t}^{-1}\left[h(\eta)\eta^{q-|\beta|}F_{t\to\eta}\left[\check{T}_\beta\varphi\right]\right]\right\|_{s,\alpha}\le C\|\varphi\|_{s,\alpha}, \tag{4.34}$$

где $1\le|\beta|\le q-1$.

С помощью замечания 4.1 имеем также оценку

$$\left\|\alpha^{q-|\beta|}(t)D_t^{q-|\beta|}\check{T}_\beta\varphi\right\|_{s,\alpha}\le C\|\varphi\|_{s+q-1,\alpha}, \tag{4.35}$$

где $1\le|\beta|\le q-1$.

Наконец, с помощью (4.30) можно доказать неравенство

$$\left\|R_\beta D_x^\beta\varphi\right\|_{s,\alpha}\le C\left\|D_x^\beta\varphi\right\|_{s,\alpha}\le C\|\varphi\|_{s+q,\alpha}, \tag{4.36}$$

где $|\beta|=q$.

Утверждение леммы вытекает из представления (4.31) и оценок (4.32)—(4.36). □

Следствие 4.2. Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при любой $h(t)\in C_0^\infty([-\delta,\delta])$, $|h(t)|\le 1$ справедлива оценка

$$\left\|h(t)\left\{\alpha^q(t)A(D_t,D_x)u-\alpha^q(t)A(D_t,0)u\right\}\right\|_{s,\alpha}\le \le\varepsilon\|u\|_{s+q,\alpha}, \tag{4.37}$$

где $s\ge 0$, $q\ge 1$ – целое, $u\in H_\alpha^{s+q}$.

Неравенство (4.37) вытекает из леммы 4.3 и легко проверяемой оценки

$$\|h(t)\alpha(t)\varphi\|_{s,\alpha}\le\varepsilon\|\varphi\|_{s,\alpha},$$

где $\varphi\in S_\alpha$; $\varepsilon>0$ – любое число, определяемое величиной $\delta$.

Аналогично лемме 4.3 нетрудно установить, что оператор $\check{P}_q$ в равенстве (4.25) ограничен из $H_{\alpha,\sigma}^{s+q}$ в $H_{\alpha,\sigma}^s$, а также из $H_\alpha^{s+q,k}$ в $H_\alpha^{s,k}$ $(s\ge 0)$. Исходя из этих фактов доказывается

Следствие 4.3. Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при целом $q\ge 1$ и любой $h(t)\in C_0^\infty([-\delta,\delta])$, $|h(t)|\le 1$ справедливы оценки

$$\left\|h(t)\left\{\alpha^q(t)A(D_t,D_x)u-\alpha^q(t)A(D_t,0)u\right\}\right\|_{s,(\alpha,\sigma)}\le$$

$$\le\varepsilon\|u\|_{s+q,(\alpha,\sigma)}+C(\varepsilon)\|u\|,\ \forall u\in H_{\alpha,\sigma}^{s+q},\ s\ge 0; \tag{4.38}$$

$$\left\|h(t)\left\{\alpha^q(t)A(D_t,D_x)u-\alpha^q(t)A(D_t,0)u\right\}\right\|_{s,k,\alpha}\le$$

$$\le\varepsilon\|u\|_{s+q,k,\alpha}+C(\varepsilon)\|u\|,\ \forall u\in H_\alpha^{s+q,k},\ s\ge 0. \tag{4.39}$$

Неравенства (4.38) и (4.39) будут полезными при доказательстве оценок решений вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в соответствующих пространствах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа / Ю. В. Егоров. — М.: Наука, 1984. — 400 с.

2. *Левендорский С.З.* Вырождающиеся эллиптические уравнения и краевые задачи / С. З. Левендорский, Б. П. Панеях // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1990. — Т. 63. — С. 131—200.

3. *Крылов Г.Н.* Классические задачи прикладной электродинамики / Г. Н. Крылов. — С-Пб.: С-ПбГУ, 2005. — 260 с.

4. *Подгорный А.И.* О сравнении положения источника микроволнового излучения с положением токового слоя, вычисленным из данных предвспышечного состояния активной области при помощи МГД моделирования / А. И. Подгорный, И. М. Подгорный, Н. С. Мешалкина // Всероссийская конференция «Многоволновые исследования Солнца и современные проблемы солнечной активности», Нижний Архыз, 28 сент. — 2 окт. 2006. — П. Нижний Архыз, 2006. — С. 50.

5. *Глушко В.П.* Операторы неглавного типа и задача с косой производной / В. П. Глушко, С. Д. Махортов // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 202—203.

6. *Глушко В.П.* Пространства функций с дробными весовыми производными и граничные задачи переменного порядка / В. П. Глушко // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск, 1981. — С. 46—53.

7. *Махортов С.Д.* О некоторых свойствах вырождающихся и весовых псевдодифференциальных операторов / С. Д. Махортов; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1985. — 49 с. — Деп. в ВИНИТИ 4.12.85, № 8327 — В.

8. *Махортов С.Д.* Весовые псевдодифференциальные операторы в пространствах типа Соболева — Слободецкого — Ароншайна / С. Д. Махортов; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1986. — 38 с. — Деп. в ВИНИТИ 2.06.86, № 3950-В.

9. *Махортов С.Д.* Непрерывные операции в весовых пространствах основных и обобщенных функций / С. Д. Махортов // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: тр. семинара С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1984. — № 2. — С. 109-121.

10. *Грушин В.В.* Псевдодифференциальные операторы / В. В. Грушин. — М.: МИЭМ, 1975. — 107 с.

*Поступила в редакцию 16.10.2006*