УДК 517.51

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ ЧАСТНЫХ СУММ ФУРЬЕ—ЯКОБИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВИДА

Ф. М. Коркмасов

Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН

В работе показано, что если $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ $(\alpha,\beta>-1, m=0,1,2,\dots)$ — классические многочлены Якоби, то система многочленов двух переменных $\{\Psi_{mn}^{\alpha,\beta}(x,y)\}_{m,n=0}^{r}=\{P_m^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y)\}_{m,n=0}^{r}$ $(r=m+n\le N-1)$ является ортогональной на множестве $\Omega_{N\times N}=\{(x_i,y_j)\}_{i,j=0}^{N}$, где x_i, y_j — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. Для произвольной непрерывной на квадрате $[-1,1]^2$ функции $f(x,y)$ построены дискретные частные суммы Фурье—Якоби прямоугольного вида $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ по введенной выше ортонормированной системе. Доказано, что порядок констант Лебега $\left\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\right\|$ дискретных сумм $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ при $-1/2<\alpha,\beta<1/2$, $m+n\le N-1$ есть $O((mn)^{q+1/2})$, где $q=\max\{\alpha,\beta\}$. Как следствие этого результата рассмотрены некоторые аппроксимативные свойства дискретных сумм $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$.

Ключевые слова: многочлены Якоби, функция Лебега, константа Лебега, дискретное множество, наилучшее приближение, дискретные частные суммы Фурье—Якоби, числа Кристоффеля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача хранения, сжатия и передачи информации была и остается одной из важных научно-технических задач. Необходимость сжатия данных диктуется не только научными, но и экономическими требованиями. Например, актуальным является вопрос о сжатии информации при обработке сигналов, получаемых с космических летательных аппаратов, при создании банков данных геофизических и сейсмических исследований, полученных в результате полевых инструментальных измерений, и т.д.

В настоящее время хорошо известным и часто применяемым методом для сжатия информации является спектральный метод обработки информации. Суть его заключается в следующем. Вместо того, чтобы запоминать матрицу значений функции $f(t,\tau)$ запоминаются несколько первых коэффициентов Фурье c_{mn} разложения функции $f(t,\tau)$ по полной ортонормальной системе функций $\omega_{mn}(t,\tau)=x_m(t)y_n(\tau)$, $m,n=0,1,\dots$:

$$f(t,\tau)=\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{mn}\omega_{mn}(t,\tau),$$

где скалярное произведение

$$(\omega_{mn},\omega_{kl})=\begin{cases}0, \text{ если } (m,n)\ne(k,l),\\ 1, \text{ если } (m,n)=(k,l).\end{cases} \qquad (1)$$

Если функция $f(t,\tau)$ задается своими табличными значениями $f(t_i,\tau_j)$, $i,j=1,\dots,N$, то при вычислении коэффициентов c_{mn} более удобно использовать такие системы ортонормальных систем $\omega_{mn}(t,\tau)$, для которых скалярное произведение имеет вид суммы:

$$(\omega_{mn},\omega_{kl})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\rho_{ij}\omega_{mn}(t_i,\tau_j)\omega_{kl}(t_i,\tau_j).$$

Так как условие ортогональности (1) со скалярным произведением в виде суммы имеет место для ортонормальных многочленов дискретной переменной, то эти многочлены удобно использовать для сжатия информации.

Пусть H^n — пространство алгебраических многочленов $p_n=p_n(x)$ степени не выше n, $C_{[-1,1]}$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций. $\Omega=\{x_0,x_1,\dots,x_n,\dots\}$ — сетка — дискретное множество, состоящее из конечного или бесконечного числа различных точек действительной оси $\mathbf{R}$. В работе [1] с помощью квадратурной формулы Гаусса была определена система многочленов Якоби $\{P_i^{\alpha,\beta}(x)\}_{i=0}^{N-1}$ $(\alpha,\beta>-1,\ N=2,3,\dots)$, ортогональная на сетке $\Omega_N=\{x_1,x_2,\dots,x_N\}$ относительно скалярного произведения $(f,g)=\sum_{x\in\Omega_N}\mu(x)f(x)g(x)$ $(\mu(x_j)=\mu_j)$,

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_j P_m^{\alpha,\beta}(x_j)P_n^{\alpha,\beta}(x_j)=h_n^{\alpha,\beta}\delta_{mn}, \qquad (2)$$

где $x_j\in\Omega_N$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, μ_j — числа Кристоффеля или веса квадратурной формулы Гаусса, $h_n^{\alpha,\beta}=\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\times$ $\times\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, δ_{mn} — символ Кронекера.

Полагая

$$\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(x),$$

для произвольной функции $f(x) \in C_{[-1,1]}$ можно определить дискретную частную сумму Фурье—Якоби порядка $n \le N-1$ по ортонормированной системе $\{\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{N-1}$:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} \hat{P}_k^{\alpha,\beta}(x), \qquad (3)$$

где $\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=1}^{N} \mu_j f(x_j) \hat{P}_k^{\alpha,\beta}(x_j)$ — дискретные коэффициенты Фурье—Якоби.

Пусть теперь $C_{[-1,1]^2}$ — пространство непрерывных на квадрате $[-1,1]^2 = [-1,1]\times[-1,1]$ функций $f(x,y)$ с нормой $\|f\| = \max_{(x,y)\in[-1,1]^2} |f(x,y)|$. Покажем, что система многочленов двух переменных $\{\Psi_{mn}^{\alpha,\beta}(x,y)\}_{m,n=0}^{r} = \{P_m^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y)\}_{m,n=0}^{r}$ $(r = m+n \le N-1)$ является ортогональной на сетке $\Omega_{N\times N} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^{N}$ относительно скалярного произведения

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j \Psi(x_i, y_j) \Phi(x_i, y_j), \qquad (4)$$

где x_i, y_j — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. Действительно, учитывая (2) и (4), имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j \Psi_{mn}^{\alpha,\beta}(x_i, y_j) \Psi_{kl}^{\alpha,\beta}(x_i, y_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \mu_i P_m^{\alpha,\beta}(x_i) P_k^{\alpha,\beta}(x_i) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{N} \mu_j P_n^{\alpha,\beta}(y_j) P_l^{\alpha,\beta}(y_j) = h_m^{\alpha,\beta}\delta_{mk} h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nl} =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } (m,n) \ne (k,l), \\ (h_n^{\alpha,\beta})^2, \text{ если } (m,n) = (k,l). \end{cases}$$

Полагая

$$\hat{\Psi}_{mn}^{\alpha,\beta}(x,y) = \{h_m^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} \Psi_{mn}^{\alpha,\beta}(x,y), \quad (5)$$

определим для произвольной функции $f(x,y) \in C_{[-1,1]^2}$ дискретную частную сумму Фурье—Якоби прямоугольного вида

$$S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) =$$
$$= \sum_{k\le m, l\le n} \hat{f}_{k,l,N}^{\alpha,\beta} \hat{\Psi}_{kl}^{\alpha,\beta}(x,y) = \qquad (6)$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} \hat{f}_{k,l,N}^{\alpha,\beta} \hat{\Psi}_{kl}^{\alpha,\beta}(x,y),$$

где $\hat{f}_{k,l,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j f(x_i, y_j) \hat{\Psi}_{kl}^{\alpha,\beta}(x_i, y_j)$ — дискретные коэффициенты разложения функции $f(x,y)$ в двойной ряд Фурье—Якоби.

В настоящей работе мы остановимся на вопросе сходимости прямоугольных частных сумм $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ при $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $m+n \le N-1$, который в свою очередь сводится к изучению поведения констант Лебега $\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\|$ — норм оператора $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta} : C_{[-1,1]^2} \to C_{[-1,1]^2}$.

Отметим, что для двойных рядов Фурье понятие схоимости можно определить по-разному, в частности, наиболее употребительными являются следующие виды сходимости: прямоугольные (квадратные), треугольные и сферические (см. [2]). Так, в тригонометрическом двумерном случае для прямоугольных частных сумм Фурье $S_{m,n}(f) = S_{m,n}(f;x,y) = \sum_{|\mu|\le m, |\nu|\le n} c_{\mu,\nu} e^{i(\mu x + \nu y)}$ справедливо равенство

$$\|S_{m,n}\| = \sup_{|f(x,y)|\le 1} \|S_{m,n}(f)\| =$$
$$= 16\pi^{-4} \ln m \ln n + O(\ln m + \ln n),$$

которое является следствием хорошо известной оценки одномерных констант Лебега. Случай треугольных частных сумм двойных рядов Фурье $S_{m,n}^{\Delta}(f) = S_{m,n}^{\Delta}(f;x,y) = \sum_{|\mu|/m + |\nu|/n \le 1} c_{\mu,\nu} e^{i(\mu x + \nu y)}$ рассматривался в работах [3], [4]. В частности, в [3] было доказано, что

$$\|S_{m,m}^{\Delta}\| = 16\pi^{-4} \ln^2 m + O(\ln m),$$

а в [4] получено более общее утверждение:

$$\|S_{m,n}^{\Delta}\| = 32\pi^{-4} \ln m \ln n - 16\pi^{-4} \ln^2 m + O(\ln n)$$

для $m, n = 1, 2, \ldots$, $l = n/m$. Обобщая эти результаты, в работах [5], [6] были получены оценки констант Лебега частных сумм по гомотетично расширяющимся многогранникам в $\mathbf{R}^m$.

Для случая прямоугольных частных сумм двойных рядов Фурье по ортогональной системе многочленов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$

$$S_{m,n}^{\square}(f) = S_{m,n}^{\square}(f;x,y) =$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho(s)\rho(t) K_m^{\alpha,\beta}(x,s) K_n^{\alpha,\beta}(t,y)\, ds\, dt,$$

где $\rho(u) = (1-u)^{\alpha}(1+u)^{\beta}$, $K_k^{\alpha,\beta}(u,v) = \sum_{i=0}^{k} \hat{P}_i^{\alpha,\beta}(u) \hat{P}_i^{\alpha,\beta}(v)$, оценку $\|S_{m,n}^{\square}\|$, нетрудно получить, используя соотношения для одномерных функций Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(x) = \int_{-1}^{1} \rho(t)\, |K_n^{\alpha,\beta}(x,t)|\, dt$, полученных в работах [7], [8].

Переходя к вопросу об оценке констант Лебега $\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\|$, предварительно перепишем (6) в следующем виде:

$$S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu_i\mu_j\hat{\Psi}_{kl}^{\alpha,\beta}(x_i,y_j)f(x_i,y_j)\right)\times$$
$$\times\hat{\Psi}_{kl}^{\alpha,\beta}(x,y) = \hat{P}_0^{\alpha,\beta}(x)\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(x_i)\sum_{j=1}^{N}\mu_j f(x_i,y_j)K_n^{\alpha,\beta}(y_j,y)\right)+$$
$$+\hat{P}_1^{\alpha,\beta}(x)\times \tag{7}$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(x_i)\sum_{j=1}^{N}\mu_j f(x_i,y_j)K_n^{\alpha,\beta}(y_j,y)\right)+\ldots$$
$$\ldots+\hat{P}_m^{\alpha,\beta}(x)\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(x_i)\sum_{j=1}^{N}\mu_j f(x_i,y_j)K_n^{\alpha,\beta}(y_j,y)\right)=$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}f(x_i,y_j)\mu_i\mu_j K_m^{\alpha,\beta}(x_i,x)K_n^{\alpha,\beta}(y_j,y).$$

Из (7) получаем

$$\left\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\right\| = \sup_{\|f\|\le 1}\left\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)\right\| = \left\|V_{m,n,N}\right\|_{[-1,1]^2}, \tag{8}$$

где

$$V_{m,n,N} = V_{m,n,N}(x,y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\mu_i\left|K_m^{\alpha,\beta}(x_i,x)\right|\cdot\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|K_n^{\alpha,\beta}(y_j,y)\right| = \tag{9}$$
$$= L_{m,N}^{\alpha,\beta}(x)L_{n,N}^{\alpha,\beta}(y),$$

$L_{m,N}^{\alpha,\beta}(x)$ — функция Лебега дискретных сумм Фурье—Якоби $S_{m,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$, определенных равенством (3).

В настоящей работе получены оценка функции Лебега $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ дискретных сумм Фурье—Якоби (теорема 1) и, как следствие этого результата, асимптотическое соотношение для $\left\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\right\|$ (теорема 2), а также отмечены некоторые аппроксимативные свойства сумм $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем без доказательства следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a_1,b_1]$ и $\{t_j\}_{j=0}^m$ — сетка, такая что $a_1 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < b_1$. Пусть $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$. Тогда, если*

1) $f(x)$ монотонно возрастает на $[a_2,b_2]$, то

$$\sum_{a_2\le t_j\le b_2} f(t_j)\Delta t_j \le \int_{a_2}^{b_2} f(x)dx + f(b_2)\Delta^*, \tag{10}$$

2) $f(x)$ монотонно убывает на $[a_2,b_2]$, то

$$\sum_{a_2\le t_j\le b_2} f(t_j)\Delta t_j \le \int_{a_2}^{b_2} f(x)dx + f(a_2)\Delta^*, \tag{11}$$

где $\Delta^* = \max_j \Delta t_j$.

Лемма 2 [9, п.15.3]. *Если $x_j = \cos\theta_j$ $(0 < \theta_j < \pi)$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, то для чисел Кристоффеля μ_j справедливы следующие оценки*

$$\mu_j \le \frac{\lambda}{N}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}\ (0 < \theta_j \le \pi-\delta), \tag{12}$$

$$\mu_j \le \frac{\lambda}{N}(\sin\theta_j)^{2\beta+1}\ (\delta \le \theta_j < \pi), \tag{13}$$

где δ и $\lambda = \lambda(\delta)$ — фиксированные положительные числа, $j = 1,2,\ldots,N$.

Нам понадобятся некоторые свойства многочленов Якоби [9]. Для удобства ссылок мы соберем их в этом параграфе.

Справедливы следующие равенства:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(-x), \tag{14}$$

$$P_n^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\times \frac{(n+\alpha+1)P_n^{\alpha,\beta}(x)-(n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{1-x}, \tag{15}$$

$$P_n^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\times \frac{(n+\beta+1)P_n^{\alpha,\beta}(x)+(n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{1+x}, \tag{16}$$

Для $-1\le x\le 1$, $n\ge 1$ справедлива следующая оценка [см., напр., 8]:

$$|P_n^{\alpha,\beta}(x)| \le \frac{c(\alpha,\beta)}{n^{1/2}}\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2}\times \left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}. \tag{17}$$

Здесь и далее через $c_k, c(\alpha,\beta,\ldots,\omega)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Если $x_j = cos\theta_j$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $-1/2\le\alpha,\beta\le 1/2$, занумерованные в убывающем порядке:

$$1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_N > -1,$$
$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_N < \pi,$$

то [9]

$$\frac{2j-1}{2N+1}\pi \le \theta_j \le \frac{2j}{2N+1}\pi\ (j = 1,2,\ldots,N). \tag{18}$$

Отсюда

$$\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j \geq \frac{\pi}{2N+1}, \tag{19}$$

$$\Delta\theta_j \leq \frac{3\pi}{2N+1}. \tag{20}$$

При $-1 \leq u, v \leq 1$, $u \neq v$ имеют место следующие равенства [10]:

$$K_n^{\alpha,\beta}(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \hat{P}_k^{\alpha,\beta}(u)\hat{P}_k^{\alpha,\beta}(v) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} P_k^{\alpha,\beta}(u)P_k^{\alpha,\beta}(v) =$$
$$= \frac{1}{2^{\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta+2)} \times \tag{21}$$
$$\times \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \times$$
$$\times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(u)P_n^{\alpha,\beta}(v) - P_n^{\alpha,\beta}(u)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(v)}{u-v}.$$

3. ОЦЕНКА ФУНКЦИИ И КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ—ЯКОБИ

Функции Лебега линейных процессов аппроксимации многочленами играют важную роль при исследовании вопросов сходимости рядов Фурье непрерывных функций. Оценки функций Лебега позволяют устанавливать достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам на всем промежутке ортогональности. В разное время вопросы, связанные с оценкой функции Лебега классических сумм Фурье, рассматривались в работах [7—16] и др. В частности, в работе [7] для функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ классических сумм Фурье—Якоби при $x \in [-1,1]$, $\alpha, \beta > -1/2$ было получено соотношение

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) \asymp \ln\left[n(1-x)^{\varepsilon(\alpha)}(1+x)^{\varepsilon(\beta)} + 1\right] +$$
$$+\sqrt{n}\left[\,|\,P_n^{\alpha,\beta}(x)\,| + |\,P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\,|\,\right],$$

в том смысле, что отношение этих выражений заключено между двумя положительными постоянными, зависящими от α и β, где $\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} 1/2 \text{ при } \gamma \neq 1/2, \\ 0 \text{ при } \gamma = 1/2. \end{cases}$ Из этого результата видно, что порядок роста $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ на отрезке $[-1,1]$ есть $O(n^{q+1/2})$, где $q = \max\{\alpha, \beta\}$, а на любом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ порядок равен $O(\ln n)$.

В работе [8] функция Лебега классических сумм Фурье—Якоби оценивалась при $x \in [-1,1]$ в случае, когда по крайней мере одно из чисел α и β принадлежит интервалу $(-1, -1/2)$, в частности,

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) = O(1)\left[1 + \ln\left[1 + n^2\left(1 - x^2\right)\right]\right],$$
$$(\alpha, \beta \in (-1, -1/2));$$

$$L_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) = O(1)\left[\ln\left[1 + n^2(1-x)\right] + \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}\right],$$
$$(\alpha \in (-1, -1/2), \beta \geq -1/2);$$

где $O(1)$ зависит от α и β.

Отметим также, что при $x \in [-1,1]$, $\alpha = \beta = -1/2$ (см., например, [10], [12])

$$L_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) = O(\ln n).$$

В данном параграфе нами доказано (теорема 1), что функция Лебега

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \left|\sum_{k=0}^{n} \hat{P}_k^{\alpha,\beta}(x)\hat{P}_k^{\alpha,\beta}(x_j)\right| \tag{22}$$

дискретных частных сумм Фурье—Якоби $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$, определенных равенством (3), на отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ имеет порядок $O(\ln n)$, а на отрезках $[-1, -1+\varepsilon]$ и $[1-\varepsilon, 1]$, соответственно, имеет порядок $O(n^{\beta+1/2})$ и $O(n^{\alpha+1/2})$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $-1/2 < \alpha$, $\beta < 1/2$; $n \leq N-1$, $n \geq 1$, *тогда для всех* $x \in [-1,1]$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = O(1)\Big[\ln n + n^{1/2} \times$$
$$\times\left(|\,P_n^{\alpha,\beta}(x)\,| + |\,P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\,|\right) + 1\Big], \tag{23}$$

где $O(1)$ *зависит от* α *и* β.

Доказательство. Оценим величину $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $x \in [-1,1]$. Рассмотрим случаи: 1) $x \in [0,1]$, 2) $x \in [-1,0]$.

1) Запишем нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ в убывающем порядке $-1 < x_N < x_{N-1} < \ldots < x_1 < 1$ и сделаем замену $x = \cos\varphi$, $x_j = \cos\theta_j$. С учетом оценки (19) из (22) следует, что

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) \leq \frac{2N+1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\mu_j \times$$
$$\times\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\hat{P}_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j. \tag{24}$$

Положим $\Delta_1 = \left[\frac{3\pi}{5}, \pi\right)$, $\Delta_2 = \left[\varphi + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{5}\right)$, $\Delta_3 = \left(\varphi - \frac{1}{n}, \varphi + \frac{1}{n}\right)$, $\Delta_4 = \left(0, \varphi - \frac{1}{n}\right]$.

Тогда величина $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)$ оценится по следующей схеме:

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) \le \frac{2N+1}{\pi}\times$$
$$\times\left(\sum_{\theta_j\in\Delta_1}+\sum_{\theta_j\in\Delta_2}+\sum_{\theta_j\in\Delta_3}+\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\right)= \qquad (25)$$
$$=U_1+U_2+U_3+U_4.$$

Если окажется, что $\varphi \le \frac{1}{n}$, то сумма U_3 берется по промежутку $\left(0,\varphi+\frac{1}{n}\right]$, а сумму U_4 рассматривать не надо.

Преобразуем выражение (21). Для этого приведем без доказательства следующее

Утверждение 1. [9] *При фиксированном p имеет место равенство*

$$\frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)}=m^p\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right],\ m\to\infty, \qquad (26)$$

основанное на хорошо известной формуле Стирлинга.

В силу этого утверждения ($-1/2<\alpha,\beta<1/2$)

$$\left|K_n^{\alpha,\beta}(u,v)\right|=\frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\times \qquad (27)$$
$$\times\left|\frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(u)P_n^{\alpha,\beta}(v)-P_n^{\alpha,\beta}(u)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(v)}{u-v}\right|\le$$
$$\le\frac{3}{5}c_1(n+1)\left|\frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(u)P_n^{\alpha,\beta}(v)-P_n^{\alpha,\beta}(u)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(v)}{u-v}\right|.$$

Учитывая (27), каждую из сумм U_i $(i=1,2,4)$ оценим так:

$$U_i\le\frac{3}{5\pi}c_1(n+1)(2N+1)\times$$
$$\times\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)-P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\right|\Delta\theta_j. \qquad (28)$$

Преобразуем числитель в правой части формулы (28) с помощью равенства (15):

$$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)-P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\times$$
$$\times P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)=\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\times$$
$$\times[(1-\cos\theta_j)P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\theta_j)P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)-$$
$$-(1-\cos\varphi)P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)].$$

Тогда

$$U_i\le\frac{3}{5\pi}c_1(n+1)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)(2N+1)\times$$
$$\times\left[\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j(1-\cos\theta_j)\times\right.$$
$$\times\left|\frac{P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\theta_j)}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\right|\Delta\theta_j+(1-\cos\varphi)\times \qquad (29)$$
$$\left.\times\left|P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)\right|\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\right|\Delta\theta_j\right].$$

Для определенности в лемме 2 будем считать $\delta=\frac{2\pi}{5}$. Поэтому на интервале Δ_1 будем пользоваться оценкой (12), а на интервалах Δ_2, Δ_3, Δ_4 — оценкой (13).

При оценивании величины U_1 будем учитывать, что $(\sin\theta_j)^{2\beta+1}=(1-\cos\theta_j)^{\beta+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2}$ и для $\theta_j\in\Delta_1$ будет $(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+\beta+1/4}\le 2$, $\cos\varphi-\cos\theta_j\ge-\cos\frac{3\pi}{5}\ge\frac{3}{10}$, $(1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4}\le 1$. Принимая во внимание (13), (17), имеем из (29)

$$U_1\le\frac{8}{\pi}c(\alpha,\beta)c_1\lambda n^{1/2}\frac{2N+1}{N}\times$$
$$\times\left[\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|+\left|P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|\right]\times$$
$$\times\sum_{\theta_j\in\Delta_1}(1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4}\Delta\theta_j\le \qquad (30)$$
$$\le\frac{48}{5}c(\alpha,\beta)c_1\lambda n^{1/2}\times$$
$$\times\left[\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|+\left|P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|\right].$$

Оценим величину U_2. Предварительно докажем следующее

Утверждение 2. *Если* $-1/2<\alpha<1/2$, $n\le N-1$, *то*

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\theta_j^{\alpha-1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\le\varphi^{\alpha-1/2}\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right), \qquad (31)$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\le\frac{3\pi}{2}\left(\frac{4}{5(2\alpha+1)}+1\right)+ \qquad (32)$$
$$+\varphi^{\alpha+1/2}\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right).$$

Доказательство. Поскольку функции $g_1(\theta)=\frac{1}{\theta-\varphi}$ и $g_2(\theta)=(\theta-\varphi)^{\alpha-1/2}$ монотонно убывают на промежутке $(\varphi,\pi]$, то с учетом оценок (11), (20) имеем

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\theta_j^{\alpha-1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\le\varphi^{\alpha-1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{1}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\le$$

$$\le\varphi^{\alpha-1/2}\left[\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{3\pi/5}\frac{d\theta}{\theta-\varphi}+n\frac{3\pi}{2N}\right]\le$$

$$\le\varphi^{\alpha-1/2}\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\le$$

$$\le\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{(\theta_j-\varphi)^{\alpha+1/2}+\varphi^{\alpha+1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j=$$

$$=\sum_{\theta_j\in\Delta_2}(\theta_j-\varphi)^{\alpha-1/2}\Delta\theta_j+$$

$$+\varphi^{\alpha+1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{1}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\le$$

$$\le\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{3\pi/5}(\theta-\varphi)^{\alpha-1/2}d\theta+\frac{3\pi}{2}n^{-\alpha-1/2}+$$

$$+\varphi^{\alpha+1/2}\left[\int\limits_{\varphi+\frac{1}{n}}^{3\pi/5}\frac{d\theta}{\theta-\varphi}+\frac{3\pi}{2}\right]\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot\frac{3\pi}{5}+\frac{3\pi}{2}+\varphi^{\alpha+1/2}\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right)\le$$

$$\le\frac{3\pi}{2}\left(\frac{4}{5(2\alpha+1)}+1\right)+\varphi^{\alpha+1/2}\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right).$$

Утверждение 2 доказано.

При оценивании U_i ($i=2,3,4$) будем пользоваться равенством $(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}=$ $=(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}$, а при оценке U_2 учтем, что $1-\cos\varphi\le\varphi^2$ и для $\theta_j\in\Delta_2$ будет $(1+\cos\theta_j)^{\alpha-\beta/2+1/4}\le 2$, $(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+3/4}\le 2\theta_j^{\alpha+3/2}$, $(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}\le\sqrt{2}\theta_j^{\alpha+1/2}$. Заметим также, что для $\varphi\in(0,\pi/2]$, $\theta_j\in(\varphi,3\pi/5]$ справедливо неравенство

$$\cos\varphi-\cos\theta_j=2\sin\frac{\theta_j-\varphi}{2}\sin\frac{\theta_j+\varphi}{2}\ge$$

$$\ge 2\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\theta_j-\varphi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\theta_j+\varphi}{2}= \qquad (33)$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left(\theta_j^2-\varphi^2\right)=\frac{2}{\pi^2}(\theta_j-\varphi)(\theta_j+\varphi).$$

Учитывая (12), (15), (31), (32), (33), имеем из (29)

$$U_2\le\frac{36}{5\pi}c(\alpha,\beta)c_1\lambda n^{1/2}\Big[\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|\times$$

$$\times\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+3/4}}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j+$$

$$+(1-\cos\varphi)\left|P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)\right|\times$$

$$\times\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j\Big]\le$$

$$\le\frac{36\pi}{5}c(\alpha,\beta)c_1\lambda n^{1/2}\times$$

$$\times\Bigg[\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j+ \qquad (34)$$

$$+\frac{\varphi^2}{\sqrt{2}}\left|P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)\right|\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\theta_j^{\alpha-1/2}}{\theta_j-\varphi}\Delta\theta_j\Bigg]\le$$

$$\le\frac{36\pi}{5}c(\alpha,\beta)c_1\lambda n^{1/2}\left[\frac{3\pi}{2}\left(\frac{4}{5(2\alpha+1)}+1\right)\times\right.$$

$$\times\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|+$$

$$+\left(\varphi^{\alpha+1/2}\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|+\frac{\varphi^{\alpha+3/2}}{\sqrt{2}}\left|P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)\right|\right)\times$$

$$\left.\times\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Из (15) при $0<\frac{1}{n}<\varphi\le\pi/2$

$$\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|\le\frac{c(\alpha,\beta)}{n^{1/2}}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\le$$

$$\le\frac{\sqrt{2}c(\alpha,\beta)}{n^{1/2}}(\sin\varphi)^{-\alpha-1/2}\le\frac{\pi c(\alpha,\beta)}{\sqrt{2}n^{1/2}}\varphi^{-\alpha-1/2}.$$

Аналогично

$$\left|P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)\right|\le\frac{\pi^2c(\alpha,\beta)}{2\sqrt{2}n^{1/2}}\varphi^{-\alpha-3/2}.$$

Поэтому из (34) получаем оценку

$$U_2\le\frac{54\pi^2}{5}\left(\frac{4}{5(2\alpha+1)}+1\right)\times$$

$$\times c(\alpha,\beta)c_1\lambda n^{1/2}\left|P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right|+ \qquad (35)$$

$$+\frac{9\pi^2}{5}(2\sqrt{2}+\pi)c^2(\alpha,\beta)c_1\lambda\left(\ln\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{2}\right).$$

Оценим величину U_3 при $\varphi>\frac{1}{n}$. Из (24), используя (12) и (21), имеем

$$U_3 \le \lambda \frac{2N+1}{N\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=0}^{n} \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} \times$$

$$\times |P_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)| \cdot |P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)| \Delta\theta_j =$$

$$= \frac{3\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j + \qquad (36)$$

$$+ \frac{3\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=1}^{n} \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} \times$$

$$\times |P_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)| \cdot |P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)| \Delta\theta_j =$$

$$= U_3^{(1)} + U_3^{(2)}.$$

Оценим сумму $U_3^{(1)}$. Учитывая, что для $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$ (см. (2))

$$\{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} = \frac{\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \le$$

$$\le \frac{\Gamma(3)}{[\Gamma(1,462)]^2} \le 2.56,$$

получаем

$$U_3^{(1)} \le \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j \le$$

$$\le \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \Delta\theta_j \le \frac{15.36\lambda}{\pi}. \qquad (37)$$

Для оценки величины $U_3^{(2)}$ заметим, что в силу утверждения 1 величина $\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1}$ имеет порядок $O(k)$, так что $\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} \le c_2 k$. Так как для $\theta_j \in \Delta_3$ будет $(1+\cos\theta_j)^{\alpha-\beta/2+1/4} \le 2$, из (36) с учетом (17) получаем

$$U_3^{(2)} \le \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} \sum_{k=1}^{n} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times$$

$$\times \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \Delta\theta_j \le$$

$$\le \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} \sum_{k=1}^{n} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times$$

$$\times \left[\left(1-\cos\left(\varphi - \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} + \right.$$

$$\left. + \left(\cos\left(\varphi - \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} \right] \frac{2}{n} \le$$

$$\le \frac{12\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi n} \sum_{k=1}^{n} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times$$

$$\times \left[\left(1-\cos\left(\varphi - \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} + \right.$$

$$\left. + \left(2\sin\varphi \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2+1/4} \right] \le \frac{12\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi n} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1-\cos\left(\varphi - \frac{1}{n}\right)}{1-\cos\varphi} \right)^{\alpha/2+1/4} + \right.$$

$$\left. + 2(\sin\varphi)^{-\alpha/2-1/4} n^{-\alpha/2-1/4} \right] \le$$

$$\le \frac{12(1+\sqrt{2\pi})\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi n} \sum_{k=1}^{n} 1 \le$$

$$\le \frac{12(1+\sqrt{2\pi})}{\pi} \lambda c_2 c^2(\alpha,\beta). \qquad (38)$$

Объединяя (37), (38), получим

$$U_3 \le \frac{\lambda}{\pi} \left[12(1+\sqrt{2\pi}) c_2 c^2(\alpha,\beta) + 15.36 \right]. \qquad (39)$$

Если же $\varphi \le \frac{1}{n}$, то величина U_3 берется по промежутку $\Delta_5 = \left(0, \varphi + \frac{1}{n}\right]$. В этом случае $U_3^{(1)}$ оценится аналогично как при $\varphi > \frac{1}{n}$, а $U_3^{(2)}$ с учетом оценки $|P_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)| \le c(\alpha,\beta) n^{\alpha}$ оценится так:

$$U_3^{(2)} \le \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha+1/2} \right) \times$$

$$\times \sum_{\theta_j \in \Delta_5} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \Delta\theta_j \le$$

$$\le \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} n^{\alpha+3/2} \times$$

$$\times \left(1-\cos\left(\varphi + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta_5} \Delta\theta_j \le \qquad (40)$$

$$\le \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} n^{\alpha+3/2} \times$$

$$\times \left(\varphi + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1/2} \frac{2}{n} \le \frac{24\lambda}{\pi} c_2 c^2(\alpha,\beta).$$

В итоге получаем

$$U_3 \le \frac{\lambda}{\pi} \left[12(1+\sqrt{2\pi}) c_2 c^2(\alpha,\beta) + 15.36 \right]. \qquad (41)$$

Оценим величину U_4. Проводя те же рассуждения, что при оценке величины U_2, получим

$$U_4 \le \frac{36\pi}{5} c(\alpha,\beta) c_1 \lambda n^{1/2} \times$$
$$\times \left[| P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) | \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{\theta_j^{\alpha+3/2}}{\varphi(\varphi-\theta_j)} \Delta\theta_j + \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi^2}{\sqrt{2}} | P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi) | \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\varphi(\varphi-\theta_j)} \Delta\theta_j \right] \le$$
$$\le \frac{36\pi}{5} c(\alpha,\beta) c_1 \lambda n^{1/2} \times$$
$$\times \left[\varphi^{\alpha+1/2} | P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) | + \frac{\varphi^{\alpha+3/2}}{\sqrt{2}} | P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi) | \right] \times$$
$$\times \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{1}{\varphi-\theta_j} \Delta\theta_j. \tag{42}$$

Поскольку функция $g(\theta) = \dfrac{1}{\varphi-\theta}$ монотонно убывает на промежутке $(0,\varphi)$, то, используя оценки (11) и (20), можно записать

$$\sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{1}{\varphi-\theta_j} \Delta\theta_j \le \int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi-\theta} + \frac{3\pi}{2} \le$$
$$\le \ln \varphi n + \frac{3\pi}{2} \le \ln \frac{\pi}{2} n + \frac{3\pi}{2}. \tag{43}$$

С учетом оценки (43) из (42) получим

$$U_4 \le \frac{36\pi}{5} c(\alpha,\beta) c_1 \lambda n^{1/2} \times$$
$$\times \left[\varphi^{\alpha+1/2} | P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) | + \right. \tag{44}$$
$$\left. + \frac{\varphi^{\alpha+3/2}}{\sqrt{2}} | P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi) | \right] \left(\ln \frac{\pi}{2} n + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Так как $\varphi \le \dfrac{1}{n}$, то из (15) имеем $\left| P_n^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) \right| \le$ $\le \dfrac{\pi c(\alpha,\beta)}{\sqrt{2} n^{1/2}} \varphi^{-\alpha-1/2}$ и $\left| P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi) \right| \le \dfrac{\pi^2 c(\alpha,\beta)}{2\sqrt{2} n^{1/2}} \varphi^{-\alpha-3/2}$.

Поэтому из (44) получаем

$$U_4 \le \frac{9\pi^2}{5} (2\sqrt{2}+\pi) c^2(\alpha,\beta) c_1 \lambda \left(\ln \frac{\pi}{2} n + \frac{3\pi}{2} \right). \tag{45}$$

Собирая оценки (30), (35), (41), (45) и сопоставляя их с (24), при $x \in [0,1]$, $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $n \le N-1$ приходим к оценке

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \le H_1(\alpha,\beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) +$$
$$+ \left[H_2(\alpha,\beta) | P_n^{\alpha,\beta}(x) | + H_3(\alpha,\beta) | P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) | \right] \times \tag{46}$$
$$\times n^{1/2} + H_4(\alpha,\beta),$$

где

$$H_1(\alpha,\beta) = \frac{9\pi^2}{5} (2\sqrt{2}+\pi) c^2(\alpha,\beta) c_1 \lambda,$$
$$H_2(\alpha,\beta) = \frac{6}{5} \left(8 + 9\pi^2 \left(\frac{4}{5(2\alpha+1)} + 1 \right) \right) \times$$
$$\times c(\alpha,\beta) c_1 \lambda,$$
$$H_3(\alpha,\beta) = \frac{48}{5} c(\alpha,\beta) c_1 \lambda,$$
$$H_4(\alpha,\beta) = \frac{\lambda}{\pi} \left[12(1+\sqrt{2\pi}) c_2 c^2(\alpha,\beta) + 15.36 \right].$$

2) Перейдем теперь к случаю $-1 \le x \le 0$. Покажем, что его можно свести к уже рассмотренному случаю $0 \le x \le 1$. Используя свойства (14) и (21), из (22) для произвольного $x \in [0,1]$ имеем

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(-x) = \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} P_k^{\alpha,\beta}(-x) P_k^{\alpha,\beta}(x_j) \right| =$$
$$= \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\beta,\alpha}\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(x) P_k^{\beta,\alpha}(-x_j) \right|. \tag{47}$$

Сделав замену переменных $x = \cos\varphi$, $x_j = \cos\theta_j$, из (47) получим

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(-\cos\varphi) = \sum_{j=1}^N \mu_j \times$$
$$\times \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\beta,\alpha}\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) P_k^{\beta,\alpha}(\cos(\pi-\theta_j)) \right| =$$
$$= \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\beta,\alpha}\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) P_k^{\beta,\alpha}(\cos\xi_j) \right| =$$
$$= \tilde{L}_{n,N}^{\beta,\alpha}(\cos\varphi).$$

Так как $\xi_j = \pi - \theta_j$ имеют одинаковые свойства с θ_j, то, проводя те же рассуждения, что при оценке величины $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)$ и используя равенство (14), выводим, что

$$\tilde{L}_{n,N}^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) \le H_1(\alpha,\beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) +$$
$$+ [H_2(\alpha,\beta) | P_n^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) | + H_3(\alpha,\beta) \times$$
$$\times | P_{n+1}^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) |] n^{1/2} + H_4(\alpha,\beta) =$$
$$= H_1(\alpha,\beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) +$$
$$+ [H_2(\alpha,\beta) | (-1)^n P_n^{\alpha,\beta}(-\cos\varphi) | + H_3(\alpha,\beta) \times \tag{48}$$
$$\times | (-1)^{n+1} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(-\cos\varphi) |] n^{1/2} + H_4(\alpha,\beta) =$$
$$= H_1(\alpha,\beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) +$$
$$+ [H_2(\alpha,\beta) | P_n^{\alpha,\beta}(-\cos\varphi) | + H_3(\alpha,\beta) \times$$
$$\times | P_{n+1}^{\alpha,\beta}(-\cos\varphi) |] n^{1/2} + H_4(\alpha,\beta).$$

Возвращаясь к переменной x, из (47) и (48) получаем

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \le H_1(\alpha,\beta)\left(\ln\frac{3\pi^2}{10}n + 3\pi\right) +$$
$$+[H_2(\alpha,\beta) \mid P_n^{\alpha,\beta}(x) \mid +H_3(\alpha,\beta)\times$$
$$\times \mid P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) \mid]n^{1/2} + H_4(\alpha,\beta)$$

при $x \in [-1,0]$.

В конечном итоге, из оценок (46) и (49) при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2,\ n \le N-1$ для $x \in [-1,1]$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \le H_1(\alpha,\beta)\left(\ln\frac{3\pi^2}{10}n + 3\pi\right) +$$
$$+[H_2(\alpha,\beta) \mid P_n^{\alpha,\beta}(x) \mid +$$
$$+H_3(\alpha,\beta) \mid P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) \mid]n^{1/2} + H_4(\alpha,\beta)$$

или

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = O(1)[\ln n + n^{1/2}(\mid P_n^{\alpha,\beta}(x) \mid +$$
$$+ \mid P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) \mid) + 1].$$

Теорема 1 доказана.

Из утверждения теоремы 1 и (9) следует следующая

Теорема 2. *Пусть* $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m+n \le N-1$, $q = \max\{\alpha,\beta\}$, *тогда при* $m,n \to \infty$

$$\left\|S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\right\| = O\left((mn)^{q+1/2}\right), \qquad (51)$$

где $O(1)$ *зависит от* α *и* β.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$

Пусть $f(x,y)$ — произвольная непрерывная на квадрате $[-1,1]^2 = [-1,1]\times[-1,1]$ функция. Следуя терминологии, принятой в [17], обозначим через

$$p_{mn}(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k} a_{kl}x^{k-l}y^l + \sum_{l=0}^{n} a_{ml}x^{m-l}y^l$$

— алгебраический многочлен двух переменных порядка (m,n). Пусть далее $p_{mn}^*(x,y)$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(x,y)$ в пространстве $C_{[-1,1]^2}$ и $E_{mn}(f) = \max_{(x,y)\in[-1,1]^2} \mid f(x,y) - p_{mn}^*(x,y) \mid$ — наилучшее приближение функции $f(x,y)$ алгебраическими многочленами двух переменных порядка (m,n).

Теорема 3. *Если* $f(x,y) \in C_{[-1,1]^2}$, $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ — *дискретные частные суммы Фурье—Якоби прямоугольного вида,* $\lim\limits_{m,n\to\infty}(mn)^{q+1/2}E_{mn}(f) = 0$, *то при* $-1/2 < \alpha$, $\beta < 1/2$, $m \ge n$, $m+n \le N-1$

$$f(x,y) = \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) \qquad (52)$$

для $(x,y) \in [-1,1]^2$.

Доказательство. Из (6) нетрудно видеть, что дискретные частные суммы Фурье—Якоби прямоугольного вида $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ не изменяют алгебраического многочлена $p_{mn}(x,y)$ порядка (m,n), т.е. $S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(p_{mn};x,y) \equiv p_{mn}(x,y)$. Используя (8), (9), (23) и (51), имеем

$$\begin{aligned}
&\mid f(x,y) - S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) \mid \le \\
&\le \mid f(x,y) - p_{mn}^*(x,y) \mid + \\
&+ \mid p_{mn}^*(x,y) - S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) \mid = \\
&= \mid f(x,y) - p_{mn}^*(x,y) \mid + \\
&+ \mid S_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(p_{mn}^* - f;x,y) \mid \le \\
&\le E_{mn}(f) + E_{mn}(f)V_{m,n,N}(x,y) = \\
&= (1 + V_{m,n,N}(x,y))E_{mn}(f) = \\
&= O((mn)^{q+1/2})E_{mn}(f).
\end{aligned} \qquad (53)$$

Переходя в (53) к пределу при $m,n \to \infty$, получаем утверждение теоремы 3.

Следствие. *Если* $f(x,y) \in C_{[-1,1]^2}$, $S_{m,m,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{m,m,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ — *дискретные частные суммы Фурье—Якоби квадратного вида,* $\lim\limits_{m\to\infty}\ln^2 mE_{mm}(f) = 0$, *то при* $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $2m \le N-1$ *внутри квадрата* $[-1,1]^2$

$$f(x,y) = \lim_{m\to\infty} S_{m,m,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y). \qquad (54)$$

Доказательство. Полагая в равенствах (7)—(9) $m = n$, получим

$$\begin{aligned}
&\mid f(x,y) - S_{m,m,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) \mid \le \\
&\le (1 + V_{m,m,N}(x,y))E_{mm}(f) = \\
&= (1 + L_{m,N}^{\alpha,\beta}(x)L_{m,N}^{\alpha,\beta}(y))E_{mm}(f).
\end{aligned} \qquad (55)$$

Далее, заметим, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ из (17) имеем $\mid P_m^{\alpha,\beta}(x) \mid \le \dfrac{c(\alpha,\beta,\varepsilon)}{m^{1/2}}$. С учетом этого из (23) получим $L_{m,N}^{\alpha,\beta}(x) = O(\ln m)$, а из (55)

$$\mid f(x,y) - S_{m,m,N}^{\alpha,\beta}(f;x,y) \mid \le$$
$$\le (1 + \ln^2 m)E_{mm}(f).$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем (54).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коркмасов Ф.М.* Аппроксимативные свойства средних Валле—Пуссена для дискретных сумм Фурье—Якоби // Сиб. матем. журнал. 2004. Т. 45. № 2. С. 334—355.

2. *Янушаускас А.И.* Кратные тригонометрические ряды. Новосибирск: Наука, 1986. — 272 с.

3. *Даугавет И.К.* О постоянных Лебега для двойных рядов Фурье // В кн. Методы вычислений. Вып. 6. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1970. С. 8—13.

4. *Кузнецова О.И.* Об асимптотическом поведении констант Лебега для последовательности треугольных частных сумм двойных рядов Фурье // Сиб. матем. журнал. 1977. Т. 18. № 3. С. 629—636.

5. *Байбородов С.П.* Константы Лебега многогранников // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 6. С. 817—822.

6. *Подкорытов А.Н.* Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестник ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1982. № 7. С. 110—111.

7. *Агаханов С.А., Натансон Г.И.* Функция Лебега сумм Фурье—Якоби // Вестник Ленингр. ун-та, сер. матем. 1968. Вып. 1. С. 11—23.

8. *Бадков В.М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье—Якоби // Сиб. матем. журнал. 1968. Т. 9. № 6. С. 1263—1283.

9. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.

10. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. — 328 с.

11. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ИЛ, 1948. — 260 с.

12. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.: Гостехиздат, 1949. — 688 с.

13. *Яхнин Б.М.* О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha = \beta = 1/2$; $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$; $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13. № 6. С. 207—211.

14. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

15. *Gronwall T.* Über die Laplacesche Reiche // Math. Ann. 1913. V. 74. P. 213—270.

16. *Rau H.* Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklugen nach Jacobischen Polynomen // J. für Math. 1929. V. 161. P. 237—254.

17. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988. — 384 с.

Поступила в редакцию 06.10.2006 г.