РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА, ХРАНЕНИЯ И СБЫТА ПРОДУКЦИИ В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ФУНКЦИИ СПРОСА И НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ОТНОШЕНИЙ

М. Г. Матвеев, М. Е. Семенов, Т. В. Рудченко*

Воронежская государственная технологическая академия
* *Воронежский государственный университет*

При моделировании производственной деятельности учет гистерезисного характера спроса требует заново решать практически важную задачу оптимального производства, хранения и сбыта продукции.. Разработана модель оптимального производства, хранения и сбыта продукции в условиях гистерезисной функции спроса и нестационарности потребительских отношений, разработан алгоритм решения соответствующей задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об управлении процессом производства, хранения и сбыта продукции с точки зрения теории оптимального управления широко применяется в реальной экономике и требует детального изучения.

Очевидно, что для решения этой задачи необходимо иметь представление о покупательской способности населения, его степени заинтересованности в приобретении данного товара и т.д., т.е. решение этой задачи должно начинаться с построения модели функции спроса. В различных работах [3, 7, 6] эта функция выбиралась в виде детерминированной зависимости объема продаж от различных факторов: цены, качества товара, количества произведенного товара, количества товара у потребителя и т.д. Следствием такого выбора явилось то обстоятельство, что внешние параметры однозначно определяли функцию продаж, а это, как показывают многочисленные исследования [2, 10, 11], не всегда верно, т.к. состояние экономической системы в момент времени t_0 зависит не только от значений внешних параметров в этот момент времени, но и от динамики их изменения в прошлом. Это обстоятельство побудило выбрать в качестве модели функции продаж некоторый преобразователь гистерезисного типа, учитывающий предысторию изменений внешних параметров и, что еще более важно, инертность покупательского спроса.

Поэтому в дальнейших построениях функция спроса будет выбрана в виде гистерезисного преобразователя.

1. ПРИМЕНЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ СПРОСА

Предлагается следующая модель: на первом этапе предполагается, что темп продаж $P(t)$ зависит в момент времени t только от цены $C(t)$ следующим образом. Отношение индивидуального потребителя к некоторому товару определим функцией $R(c(t))$, принимающей значения 0 или 1 по правилу:

$$R(c(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t) \le \alpha(t), \\ 0, & \text{если } c(t) \ge \beta(t), \\ 0 & \text{или } 1, \text{ если } \alpha(t) < c(t) < \beta(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Т.е. функция $R(c(t))$ принимает значения равные единице, если товар покупается и нуль в противном случае. Функцию $R(c(t))$ удобно трактовать как выход некоторого преобразователя $R[\alpha(t), \beta(t), R_0]$, аналогичного неидеальному реле с инверсией роли пороговых чисел α, β, на вход которого поступает сигнал $c(t)$ $(t \ge 0)$. Взаимосвязь между входом и выходом иллюстрирует рис. 1

Здесь учтено, что отношение потребителя к товару может меняться со временем. В модели этому соответствует зависимость от времени пороговых чисел $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Если обозначить через γ_i темп покупок i-го потребителя $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то для системы из n

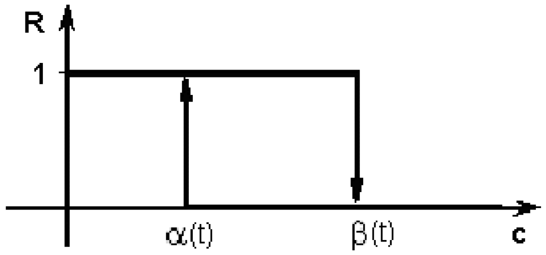

Рис. 1. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя R

любых потребителей функция продаж будет иметь вид:

$$P(c(t)) = \sum \gamma_i R[\alpha_i(t), \beta_i(t), R_{0i}]c(t)\,. \qquad (2)$$

В континуальном случае функция продаж будет аналогична преобразователю Прейзаха-Гилтая [5,9] с инверсией нулей и единиц т.е.

$$P(c(t)) = \int_{\alpha\le\beta} \omega(\alpha(t), \beta(t), t)d\mu(t), \qquad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\omega(\alpha(t), \beta(t), t) &= \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]c(t) = \\ &= R[\alpha(\gamma, t), \beta(\gamma, t), R_0(\gamma)]c(t).\end{aligned} \qquad (4)$$

и

$$\gamma \in P_{\alpha,\beta}\,.$$

Как и в случае с конечным множеством потребителей, континуальный аналог учитывает возможность изменения индивидуальных отношений потребителя к товару. Этим возможным изменениям в модели соответствует зависимость меры μ от t.

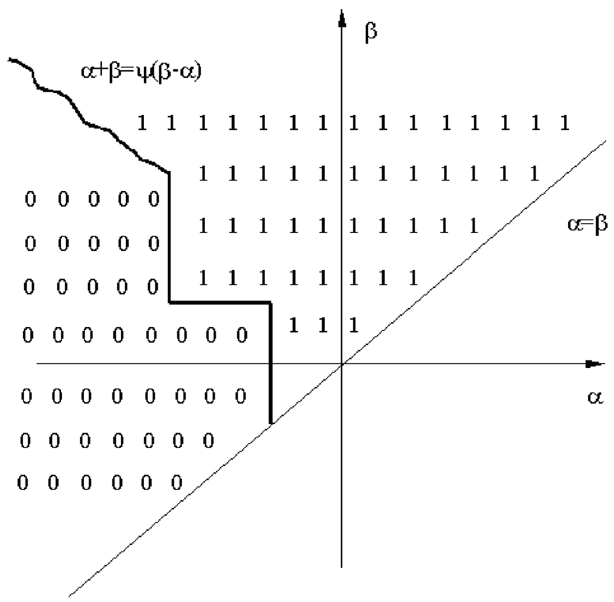

Рис. 2

2. ЗАДАЧА О ПРОИЗВОДСТВЕ, СБЫТЕ И ХРАНЕНИИ ТОВАРА

Рассмотрим теперь задачу о производстве хранении и сбыте товара в общей постановке. Обозначим через $Z(t)$ — количество товара на складе у производителя, $V(t)$ — количество товара у потребителя, $U(t)$ — темп производства, $P(t)$ — темп продаж (количество продаж в единицу времени), k_1 — коэффициент потребления, k_2 — коэффициент затрат на хранение единицы товара, $c(t)$ — цена единицы товара. Динамика изменений введенных величин описывается следующей системой дифференциально-операторных уравнений.

$$\dot{Z} = U - P,\ Z(0) = 0, \qquad (5)$$

$$\dot{V} = P - k_1 V,\ V(0) = 0, \qquad (6)$$

$$P(t) = Z(t)\int_{\alpha<\beta} \omega(\alpha.\beta, t)d\mu(t), \qquad (7)$$

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]c(t), \qquad (8)$$

(В дальнейшем, для упрощения выкладок будем предполагать, что себестоимость производства товара равна единице.) Также будем считать, что темп производства ограничен некоторым максимальным значением u_0, т.е. $u(t) \in [0; u_0]$. Рассмотрим процесс производства сбыта и хранения на конечном временном промежутке $[0,T]$. Общий доход $J(t)$ с учетом введенных обозначений определяется равенством

$$J(T) = \int_0^T (c(t)P(t) - U(t) - k_1 Z(t))dt \qquad (9)$$

Таким образом, задача о производстве сбыте и хранении товара сводится к задаче оптимального управления: найти такие функции $U(t)$, $c(t)$ $(t \in [0,T])$, удовлетворяющая системе (5)—(7) при которых функционал (9) максимален. Очевидно что, если $U(t) \equiv 0$ (производство не включается) то $J(T) = 0$. Такое решение называется тривиальным. Поэтому нужно найти такие ограничения на параметры задачи, при которых можно получить ее оптимальное решение отличное от тривиального, и такие, что $J(T) > 0$.

Для решения этой задачи применим принцип максимума Л. С. Понтрягина. Составим функцию Гамильтона.

$$\begin{aligned}&H(Z, V, P, p_1, p_2, U, c) = \\ &= p_1(U - P) + p_2(P - k_1 V) - cP + U + k_2 Z = \\ &= U(p_1 + 1) + P(p_2 - p_1 - c) + k_1 p_2 V + k_2 Z\end{aligned} \qquad (10)$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$ — вспомогательные функции. В силу линейности гамильтониана по U его минимум по этой переменной в зависимости от знака $p_1(t)+1$ достигается либо при $U \equiv 0$ либо при $U \equiv U_0$, т.е.

$$U^*(t) = \begin{cases} 0, \ p_1(t)+1>0 \\ U_0, \ p_1(t)+1<0. \end{cases} \qquad (11)$$

Отметим, что выбор зависимости функции продаж от цены не позволяет найти min Гамильтониана стандартными методами дифференциального исчисления. В общем случае преобразователь (7)—(8), рассматриваемый как оператор из $C_{(0,T)}$ в себя не имеет даже слабой производной Гато. Поэтому для нахождения min функции (10) по c необходимы другие методы. Для упрощения выкладок рассмотрим отдельное выражение

$$\Psi(c) = -P(c+p_1-p_2). \qquad (11)$$

При фиксированных значениях p_1 и p_2 min этого выражения достигается на одном из двух «крайних» состояниях преобразователя (7)–(8) показанных на рис. 3, 4; при одном и том же значении цены

Рассмотрим первый случай, т.е. когда $p_1 - p_2 > 0$. В силу детерминированности и статичности преобразователя (7)—(8) достаточно рассмотреть значение выражения (11) при $c(t) = c = \mathrm{const}$. Тогда

$$\Psi(c\ ) = -\left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)\left(c+p_1-p_2\right). \qquad (12)$$

Находя производную (12) и приравнивая ее к нулю, получим уравнение

$$\frac{3}{4}c^2 + \frac{p_1-p_2}{2}c - \frac{a^2}{2} = 0, \qquad (13)$$

Откуда $c = \frac{1}{3}(p_2 - p_1 \pm \sqrt{(p_1-p_2)^2 + a^2})$. Т.к. диапазон изменений цены лежит на отрезке [0; $\frac{a}{\sqrt{2}}$], то нас будет интересовать лишь положительный корень уравнения (13). Непосредственной проверкой можно убедиться, что этот корень c^* удовлетворяет неравенству $c^* < a\sqrt{2}$, и поэтому является допустимым значением цены.

Во втором случае

$$\Psi(c) = -\left(a - \frac{c^2}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(c+p_1-p_2\right). \qquad (14).$$

Приравняв к нулю производную (14), получим

$$\left(\sqrt{2}a - c\right)\left(3c + 2p_1 - 2p_2 - a\sqrt{6}\right) = 0.$$

Откуда $c_1 = a\sqrt{2}$ и $c_2 = \frac{2(p_2-p_1)+a\sqrt{6}}{3}$.

Если выполнено неравенство $p_2 - p_1 < a\sqrt{2}$, то min (14) достигается в точке

$$c^* = \frac{2(p_2-p_1)+a\sqrt{6}}{3}.$$

В противном случае *min* достигается в точке $c_* = a\sqrt{2}$, что соответствует абсурдному предположению, когда товар вовсе не покупается. Поэтому, впредь, при выполнении неравенства $p_2 - p_1 > 0$ будем считать выполненным дополнительное неравенство

$$p_2 - p_1 < a\sqrt{2}. \qquad (15)$$

С учетом сказанного min H по c достигается при

$$c^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(p_2 - p_1 + \sqrt{(p_1-p_2)^2 + 6a^2}), \text{ если } p_1 - p_2 > 0, \\ \frac{2(p_1-p_2)+a\sqrt{6}}{3}, \text{ если } p_2 - p_1 > 0. \end{cases} \qquad (16)$$

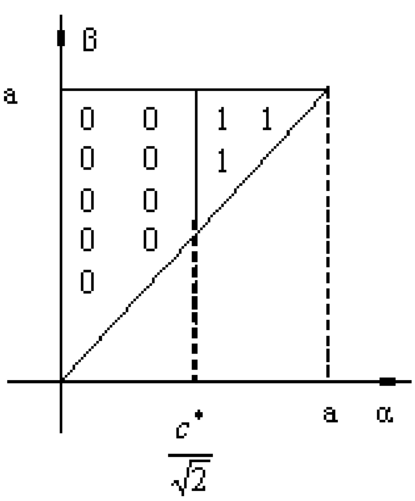

Рис. 3

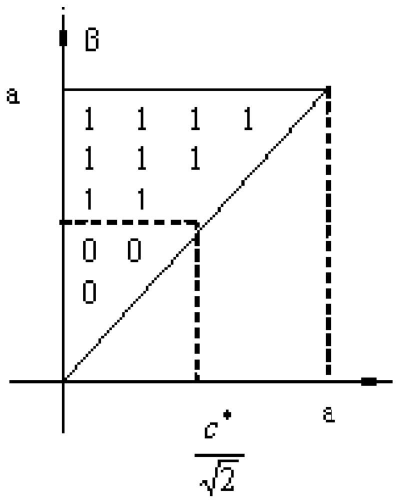

Рис. 4

После подстановки (11) и (16) в (10) получаем гамильтониан

$$H^*(t) = H^*(Z,V,p_2,p_2) = \\ = U^*(p_1+1) - (p_1 - p_2 + c^*)P(c^*) - k_1 p_2 V + k_1 Z = \\ = \mathrm{const}.$$

При этом функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H^*}{\partial z} = -k_2 + \int\limits_{\alpha<\beta} \omega(\alpha,\beta,t)d\alpha d\beta. \quad (17)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H^*}{\partial v} = k_1 p_2 \quad (18)$$

и граничным условиям

$$p_1(T) = p_2(T) = 0. \quad (19)$$

Решение уравнений (18) с учетом условий (19) легко выписывается в явном виде:

$$p_2(t) \equiv 0 \quad 0 \le t \le T.$$

Что касается уравнения (17), то его начальное условие должно удовлетворять неравенству $p_1(0) < -1$, т.е. производство должно включаться в начальный момент времени. Иначе просто можно уменьшить интервал $[0,T]$. Таким образом, для решения поставленной задачи нужно определить условия обеспечивающие существование функций $c(t)$, $p_2(t)$, удовлетворяющие уравнениям (16), (17) и краевому условию (19).

Рассмотрим сначала случай $k_2 = 0$. Тогда функция $p_1(t)$ в силу равенства (17), монотонно возрастает оставаясь отрицательной. Тогда для интересующих нас функций получили систему:

$$c(t) = \frac{-2p_1 + a\sqrt{6}}{3}, \quad (20)$$

$$\dot{p}_1 = \int\limits_{\alpha<\beta} \omega(\alpha,\beta,t)d\alpha d\beta, \quad (21)$$

$$\omega(\alpha,\beta,t) = \Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(t), \quad (22)$$

с граничными условиями:

$$p_1(0) = p_{01} < -1; \; p_1(T) = 0 \quad (23)$$

Из этой системы следует, что функция $c(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$c(t) = \\ = -\frac{2}{3}\int_0^t \int\limits_{\alpha<\beta} \Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(\tau)d\alpha d\beta d\tau - \frac{2}{3}p_{01} + \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad (24)$$

и граничным условиям

$$c(0) = \frac{-2p_{01} + a\sqrt{6}}{3}; \;\; c(T) = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (25)$$

Из (24) следует, что функция $c(t)$ должна удовлетворять равенству:

$$\int_0^T \left(\int\limits_{\alpha<\beta} \Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(\tau)d\alpha d\beta \right) d\tau = -p_{01}. \quad (26)$$

Из последнего соотношения, граничных условий (23) и системы (20)—(22) получаем уравнение, которому должно удовлетворять оптимальное значение цены

$$c(t) = \frac{2}{3}\int_t^T \left(\int\limits_{\alpha<\beta} \Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(\tau)d\alpha d\beta \right) d\tau + \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (27)$$

Найдем условия, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (27). Рассмотрим оператор $(Gc)(t)$

$$(Gc)(t) = \\ = \frac{2}{3}\int_t^T \left(\int\limits_{\alpha<\beta} \Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(\tau)d\alpha d\beta \right) d\tau + \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (28)$$

Этот оператор действует из пространства $\tilde{C}_{[0,T]}$ непрерывных монотонных функций в себя. Ясно, что неподвижные точки этого оператора являются решениями уравнения (20), поэтому для доказательства разрешимости этого уравнения достаточно привести условия обеспечивающие существование у оператора (21) хотя бы одной неподвижной точки. Оценим норму разности

$$\left\|(Gc_2)(t) - (Gc_1)(t)\right\|_{C_{[0;T]}} = \\ = \left\| \frac{2}{3}\int_t^T \left(\int\limits_{\alpha<\beta} \left(\Gamma\left[\omega_0(\alpha,\beta)\right]c_1(\tau) - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - \Gamma\left[\omega_0(\alpha,\beta)\right]c_2(\tau) \right) d\alpha d\beta \right) d\tau \right\| \le \quad (29) \\ \le \frac{2}{3}\max_{0\le\tau\le T}\left|c_2(\tau) - c_1(\tau)\right| \frac{1}{\sqrt{2}} aT = \\ = \frac{\sqrt{2}aT}{3}\left\|c_2(t) - c_1(t)\right\|_{C_{[0;T]}}.$$

Таким образом, при выполнении неравенства $\frac{\sqrt{2}aT}{3} < 1$ оператор G является сжимающим. Отметим, что оценка (29) верна лишь для монотонных функций. Из определения оператора (28) следует, что он переводит в себя множество непрерывных монотонных функций

$$\mathrm{M} \equiv \left\{ c(t) : \frac{a\sqrt{6}}{3} \le c(t) \le \frac{a\sqrt{6}}{3} + \frac{a^2 T}{3} \right\}.$$

Из разрешимости уравнения (27) следует существование решения системы (20)—(22), где начальное значение p_{01} должно удовлетворять неравенству (23). Осталось привести условия обеспечивающие выполнение неравенства $p_{01} < -1$. В силу (25) это неравенство эквивалентно

$$c_0 > \frac{a\sqrt{6}+2}{3}. \qquad (30)$$

Поэтому неравенство (30) будет выполнено автоматически, если будет выполнено

$$\sqrt{2}aT + 2 - 2\sqrt{\sqrt{2}aT+1} > \frac{a\sqrt{6}+2}{3}, \qquad (31)$$

которое, в свою очередь, эквивалентно

$$3\sqrt{2}aT + 4 > a\sqrt{6} + 6\sqrt{\sqrt{2}aT+1}. \qquad (32)$$

Таким образом, неравенства $\frac{\sqrt{2}aT}{3} < 1$ и (32) обеспечивают существование и единственность оптимального решения задачи (5)—(8).

Рассмотрим теперь случай $k_2 > 0$. Отметим, прежде всего, что при выполнении неравенства $k_2 > a^2/3$ оптимальное решение задачи не существует, т.к. из соотношения (17) следует, что производная $\dot{p}_1(t)$ отрицательна и значение $p_1(T) = 0$ не может быть достигнуто. Если же будет выполнено неравенство $k_2 < a^2/3$, то оптимальное решение тогда определяется как решение системы

$$c(t) = \frac{-2p_1 + a\sqrt{6}}{3}, \qquad (33)$$

$$\dot{p}_1 = \int\limits_{\alpha<\beta} \omega(\alpha,\beta,t)d\alpha d\beta - k_2, \qquad (34)$$

$$\omega(\alpha,\beta,t) = \Gamma[\omega_0(\alpha,\beta)]c(t) \qquad (35)$$

с граничными условиями

$$p_1(0) = p_{01} < -1; \;\; p_1(T) = 0. \qquad (36)$$

Рассмотрение этого случая, аналогично рассмотренному ранее случаю с $k_2 = 0$. Достаточные условия, обеспечивающие существования и единственность решения этой системы сводится к системе неравенств:

$$\frac{aT\sqrt{2}}{3} < 1, \qquad (37)$$

$$3\sqrt{2}aT + 4 > a\sqrt{6} + k_2 + 6\sqrt{\sqrt{2}aT+1}. \qquad (38)$$

Таким образом, построена модель задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте продукции, разработан алгоритм ее решения в условиях гистерезисной функции спроса и нестационарности потребительских отношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горский А.А.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса / А. А. Горский, И. Г. Колпакова, Б. Я. Локшин // Изв. РАН. Теория системы управления. 1998. № 1.

2. *Гэлбрейт Дж.К.* Экономические теории и цели сообщества: Пер. с англ. / Под ред. А. Г. Милейковского. М.: Прогресс, 1976. 406 с.

3. *Данилов В.И., Сотсков А.И.* Рациональный выбор и выпуклые предпочтения // Изв. АН СССР. Сер. техн. Кибернетика. 1985. № 2. С. 14—23.

4. *Жак С.В.* Экономика для инженеров / С. В. Жак // Учебное пособие. — М.: Вузовская книга, 2004. — С. 52—57.

5. *Красносельский М.А.* Системы с гистерезисом. / М. А. Красносельский, А. В. Покровский // М., Наука, 1983. 271 с.

6. *Параев Ю.И.* Решение задач об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара / Ю. И. Параев // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000, № 2, С. 103—117.

7. *Перова А.В.* Модели макроэкономики и устойчивые циклы / А. В. Перова, Т. В. Рудченко, М. Е. Семенов // Сб. трудов Рос. гос. торгово-экономич. университета «Актуальные проблемы экономики предпринимательства». Воронеж: Научная книга, 2004. — № 7. — С. 102—106.

8. *Перова А.В.* Задача об оптимальной производственной стратегии / А. В. Перова, Т. В. Рудченко, Л. В. Кутепова // Межвуз. сб. науч. тр. «Моделирование систем и информационные технологии». Воронеж: Научная книга, 2005. — № 2. — С. 227—230.

9. *Семенов М.Е.* Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в системах с гистерезиснными нелинейностями / М. Е. Семенов // Воронеж . — Издательство ВГУ. — 2002. – 104 с.

10. *Шумпетер И.* Теория экономического развития / И. Шумпетер // Теория экономического развития: Пер. с нем. / Под ред. А. Г. Малейковского. М.: Прогресс, 1982. 456 с.

11. *Hotelhng H.* 1921, A mathematical theory of migration, MA thesis presents at the university of Washington; republished in 1978 in environment and Planning 10: 1223—1239.

12. *Puu T.* 1982, Outline of a trade cycle model in continuous space and time, Geographical analysis 14:1—9.

13. *Puu T.* 1985, A simplified model of spatiotemporal population dynamics, Environment and planning 17: 1269—1269.

14. *Puu T., Weidlich W.* 1986, The stability of hexagonal tessellations, Karlsruhe papers in economic policy research 3: 133—158.

Поступила в редакцию 29.09.2006 г.