УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ ЛОТКИ—ВОЛЬТЕРРА

О. Н. Масина, О. В. Дружинина

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук

В работе получены достаточные условия существования устойчивых состояний равновесия обобщенных систем Лотки—Вольтерра, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, и изучены предельные свойства решений указанных систем.

1. Введение. Системы Лотки—Вольтерра возникают в задачах математической биологии при изучении динамики численности взаимодействующих популяций, а также в задачах других областей науки при описании эволюции взаимодействующих объектов [1—6]. Для классической системы Лотки—Вольтерра получены многочисленные результаты в направлении развития качественной теории и, в первую очередь, теории устойчивости решений [3—11]. Для обобщенных систем Лотки—Вольтерра получено значительно меньше результатов (см., например, [5, 9, 10]). В работе [5] показана эффективность применения функций Ляпунова для изучения устойчивости решений указанных систем. Данная работа посвящена исследованию задачи существования устойчивых состояний равновесия обобщенных систем Лотки—Вольтерра, описываемых нелинейными многомерными дифференциальными уравнениями. С помощью методов теории устойчивости и качественной теории дифференциальных уравнений, а также методов математического программирования изучаются ряд свойств решений указанных систем.

Классическая модель Лотки—Вольтерра описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i\left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j - a_i\right], i = 1,\ldots,n, \quad (1.1)$$

где x_i – i-я фазовая переменная, d/dt – производные по времени t, постоянные a_i и p_{ii} – коэффициенты роста i-й компоненты в отсутствие других, а постоянные p_{ij} при $i \neq j$ характеризуют влияние взаимодействия между компонентами на скорость роста. Матрица $P = (p_{ij})$ называется матрицей взаимодействия.

Рассмотрим обобщенную модель Лотки—Вольтерра, задаваемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i\left[g_i(t,x_1,\ldots,x_n) - a_i\right], i = 1,\ldots,n, \quad (1.2)$$

где $g_i(t,x_1,\ldots,x_n) = g_i(t,x)$ – функции, описывающие взаимодействия между компонентами фазового пространства.

В векторно-матричной форме система (1.2) записывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -X\left[g(t,x) - a\right], \quad (1.3)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^*$ – n-мерный вещественный вектор, $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ – диагональная вещественная ($n \times n$) матрица, $a = (a_1, \ldots, a_n)^*$ — n-мерный вещественный постоянный вектор, $g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_n(t,x))^*$ — n-мерная непрерывная функция.

Решение системы (1.2) с произвольными неотрицательными начальными значениями $x_i(0) = x_i0 \geq 0, i = 1,\ldots,n$, будет неотрицательно и в последующем, т. е. $\forall t \in R^+$, где R^+ означает множество всех неотрицательных действительных чисел, $x_i(t) \geq 0$. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только неотрицательные решения системы (1.2).

2. Определения и предварительный анализ. Пусть $x = (x_1,\ldots,x_n)^*, y = (y_1,\ldots,y_n)^*$ — векторы из n-мерного евклидова пространства R^n, где * — знак транспонирования. Тогда записи $x \geq y$ и $x > y$ означают, что $x_i \geq y_i$ и $x_i > y_i$ (i=1, ..., n) соответственно. Вектор x называется *положительным* (или *неотрицательным*), если $x > 0$ (или $x \geq 0$). Через $|x|$ обозначим евклидову норму вектора x. Далее, через $E^n = \{x : x \in R^n, x > 0\}$, $E_0^n = \{x : x \in R^n, x \geq 0\}$ обозначим положительный и неотрицательный ортанты пространства R^n, а через e^j — единичный вектор из R^n.

Пусть α и β – подмножества множества индексов $\{1, \ldots, n\}$, причем $\alpha \cup \beta = \{1,\ldots,n\}$; $E_\alpha^n = \{x : x \in R^n, x_i \geq 0, i \in \alpha, x_j > 0, j \in \beta\}$; $q = (q_1,\ldots,q_n)$ — неотрицательное состояние равновесия, где $q_i \geq 0, i \in a$; $q_j > 0, j \in b$.

Состояние равновесия q дифференциальной системы (1.2) называется:

1) устойчивым относительно множества E_α^n, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что если $|x_0 - q\,\| < \delta$, то $|x(t) - q| < \varepsilon$, $\forall t \in R^+$, $x(t) \in E_\alpha^n$;

2) асимптотически устойчивым относительно множества E_α^n, если оно устойчиво относительно множества E_α^n и, кроме того, выполнено условие: если $x^0 \in E_\alpha^n$, то каждое решение $x(t)$, исходящее из точки x^0, стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия q.

Для доказательства теорем о существовании асимптотически устойчивых состояний равновесия будут использованы некоторые факты математического программирования. Рассмотрим сначала задачу нахождения вектора $x \in R^n$, удовлетворяющего условиям:

$$x \geq 0,\ g(x) + c \geq 0,\ x^*(g(x) + c) = 0$$

для заданного отображения $g : E_0^n \to R^n$ и заданного вектора $c \in R^n$. Для краткости эту задачу назовем задачей $(g(x), c)$. Из результатов работы [11] следует, что задача нахождения неотрицательного состояния равновесия p системы

$$\frac{dx}{dt} = -X\left[g(x) - a\right],$$

удовлетворяющего условию $g(p) - a \geq 0$, равносильна нахождению решения задачи $(g(x), -a)$.

Лемма 1 [11]. *Пусть функция* $g : E_0^n \to R^n$ *непрерывна и удовлетворяет условию монотонности* (A) *существует число* $r > 0$ *такое, что для любой пары* $x \in E_\alpha^n$ *и* $y \in E_\alpha^n$ *выполнено неравенство*

$$(x - y)^*[g(x) - g(y)] \geq r\,|x - y|^2.$$

Тогда существует единственное решение s *задачи* $(g(x), 0)$ *такое, что*

$$s \geq 0,\ g(s) \geq 0,\ s^* g(s) = 0.$$

Рассмотрим теперь непрерывную по (t, x) функцию $g : E_0^1 \times E_0^n \to R^n$, для которой выполнено условие монотонности (B) *существует число* $d > 0$ *такое, что для любой пары* $x \in E_\alpha^n$ и $y \in E_\alpha^n$ *выполнено неравенство*

$$(x - y)^*[g(t,x) - g(t,y)] \geq d\,|x - y|^2.$$

Поставим теперь следующую задачу: найти вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий для всех $t \in E_0^1$ условиям:

$$x \geq 0,\ g(t,x) + c \geq 0,\ x^*(g(t,x) + c) = 0 \quad (2.1)$$

для заданного отображения $g : E_0^1 \times E_0^n \to R^n$ и заданного вектора $c \in R^n$. Для краткости эту задачу назовем задачей $(g(t, x), c)$.

Легко видеть, что задача нахождения неотрицательного стационарного по времени состояния равновесия q системы (1.2), удовлетворяющего условию $g(t,q) - a \geq 0$ для всех $t \in E_0^1$, равносильна нахождению решения задачи $(g(t,x), -a)$.

Из леммы 1 и свойств функции $g(t, x)$ вытекает следующая

Лемма 2. *Пусть непрерывная по* (t, x) *функция* $g : E_0^1 \times E_0^n \to R^n$ *удовлетворяет условию монотонности* (B). *Тогда существует единственное решение* z *задачи* $(g(t, x), 0)$ *такое, что*

$$z \geq 0,\ g(t,z) \geq 0,\ z^* g(t,z) = 0,\ \forall t \in E_0^1.$$

3. Теорема о существовании асимптотически устойчивого состояния равновесия системы (1.2). Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть для стационарного по времени решения задачи* $(g(t,x), -a)$ *выполнены условия леммы* 2. *Пусть существует стационарное по времени состояние равновесия* q *системы* (1.2), *устойчивое относительно множества* E_α^n. *Тогда каждое решение системы* (1.2), *начинающееся в* E_α^n, *сходится при* $t \to +\infty$ *к* q.

Доказательство. Так как $g(t, x)$ удовлетворяет условию монотонности (B), то для каждой точки $a \in R^n$ и всех $t \in E_0^1$ функция $g(t, x) - a$ также будет удовлетворять этому условию. По лемме 2 существует единственное решение q задачи $(g(t, x), -a)$ для каждой точки $q \in R^n$ и всех $t \in E_0^1$. Это единственное решение q есть единственное неотрицательное состояние равновесия системы (1.2), удовлетворяющее условию $g(t,q) - a \geq 0$ для каждой точки $a \in R^n$ и всех $t \in E_0^1$. Поэтому достаточно показать, что точка q асимптотически устойчива.

Определим для системы (1.2) функцию Ляпунова

$$V(x) = \sum_{i\in\alpha} x_i + \sum_{j\in\beta}\left[x_j - q_j - q_j \ln\frac{x_j}{q_j}\right]. \quad (3.1)$$

Функция (3.1) непрерывно дифференцируема. Здесь $q_i \geq 0$, $i \in \alpha$, $q_j > 0$, $j \in \beta$. Вычислим и оценим производную $\dot V(x)$ функции $V(x)$ вдоль решений системы (1.2):

$$\dot{V}(x) = -(x-q)^*[g(t,x)-a] =$$
$$= -[(x_1-q_1)(g_1(t,x)-a_1)+\ldots+$$
$$+(x_n-q_n)(g_n(t,x)-a_n)] =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[x_i g_i(t,x) - x_i a_i - q_i g_i(t,x) + q_i a_i\right] =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\Big[x_i g_i(t,x) - q_i g_i(t,x) - x_i a_i + q_i a_i + x_i g_i(t,q_i) -$$
$$-q_i g_i(t,q_i) + q_i g_i(t,q_j) - x_i g_i(t,q_i)\Big] =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}(x_i-q_i)[g_i(t,x)-g_i(t,q_i)] -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(x_i-q_i)[g_i(t,q_i)-a_i] =$$
$$= -(x-q)^*[g(t,x)-g(t,q)] - (x-q)^*[g(t,q)-a] \le$$
$$\le -d|x-q|^2 - x_\alpha^*[g_\alpha(t,0,q_\beta)-a_\alpha]. \quad (3.2)$$

Точка $q=(t,0,q_\beta)^*$ есть решение задачи $(g(t,x),-a)$.

Рассмотрим множество

$$D = \{(t,x) : t\in E_0^1, x_i \ge 0, i\in \alpha, \quad x_j > 0, j\in b, V(x) \le L(t,x(0))\}, \quad (3.3)$$

где $L(t,x(0))$ — положительное число, удовлетворяющее неравенству $L(t,x(0)) \ge V(x(0))$ для всех $t\in E_0^1$. Первый член в (3.2) отрицателен, кроме $(t,q)\in D$. Поэтому $\dot{V}$ отрицательна на множестве D, кроме точки (t, q). Очевидно, что каждое решение системы (1.2) остается на множестве D при всех $t\in E_0^1$, если начальная точка его принадлежит D. Поэтому все решения, начинающиеся в D, приближаются к точке q при $t\to\infty$. Кроме того, точка q устойчива относительно множества D, так как каждое решение, начинающееся в D, остается в D. Множество D приближается к $E_0^1 \times E_\alpha^n$ при $L(t,x(0))\to+\infty$ при всех $t\in E_0^1$. Следовательно, точка q асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует положительное инвариантное множество* $M=\{x : g(t,x)-a \ge 0, x\in R^n\}$ *такое, что* $M\subseteq E_\alpha^n$. *Кроме того, каждое стационарное по времени состояние равновесия q асимптотически устойчиво относительно множества M.*

Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МД-1199.2005.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lotka A.* Elements of physical ecology. Baltimora: Williams and Wilkins, 1925.

2. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.

3. *Колмогоров А.Н.* Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. Вып. 25. М.: Наука, 1972. С. 100—106.

4. *Смит Дж. М.* Модели в экологии: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 267 с.

5. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 184 с.

6. *Свирежев Ю. М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 256 с.

7. *Меренков Ю.Н., Масина О.Н.* Об устойчивости равновесия в экосистеме трех взаимосвязанных популяций // Вестник Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина. Вып. 6: Серия «Математика. Компьютерная математика». Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2005. С. 60—64.

8. *Базыкин А.Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 386 с.

9. *Takeuchi Y., Adachi N., Tokumaru H.* Global stability of ecosystems of the generalized Volterra type // Math. Biosci. 1978. V. 42. № 1/2. P. 119—136.

10. *Takeuchi Y., Adachi N., Tokumaru H.* The stability of generalized Volterra equations // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 62. № 3. P. 453—473.

11. *Karamardian S.* The nonlinear complimentarity problem with application. Part 1 // J. of Optimization theory and applications. 1969. V. 4. № 2. P. 87—98.

Поступила в редакцию 08.06.2006