УДК 517.988

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОЛУКВАЗИОДНОРОДНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В. Р. Зачепа

Воронежский государственный педагогический университет

В работе исследуется устойчивость по Ляпунову состояния равновесия дифференциального уравнения с полуквазиоднородной правой частью:

$$x = X(x),\, x \in R^n,\, X(0) = 0.$$

Получены достаточные признаки асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову в зависимости от показателей квазиоднородности правой части и знаков коэффициентов.

Общеизвестно, сколь важны математические разработки, связанные с проблемой существования периодических и условно периодических решений ОДУ и изучением их свойств. Особенно большой интерес представляют новые результаты по вопросам теории бифуркаций циклов и инвариантных торов из сложного фокуса, обобщающие классические результаты Пуанкаре, Биркгофа, Дюлака, Андронова и Хопфа.

Среди наиболее часто используемых в наше время методов исследования бифурцирующих решений выделяется метод нормальных форм (А. Пуанкаре, Дж. Биркгоф, В. И. Арнольд, А. Д. Брюно и др.) и метод Ляпунова—Шмидта с его многочисленными модификациями.

Несмотря на значительные достижения в развитии теории периодических и условно периодических решений систем ОДУ, многие ее задачи остаются недостаточно исследованными. В частности, недостаточно изучен случай параметрического возмущения системы вблизи вырожденной точки покоя при наличии сильных резонансов, мало разработано алгоритмов приближенного построения и качественного анализа условно периодических решений, бифурцирующих из сложного фокуса динамической системы в ситуации многомодового вырождения. Системы с такими особенностями появляются в теории бифуркаций решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в радиофизике при исследовании автоколебаний в RC-генераторах, в реальных моделях экономики, популяционной динамики, химической кинетики и в др. разделах современного естествознания.

Многие разработки в области конструктивного анализа задач такого типа основаны на идее усреднения (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Б. И. Мосеенков, Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, М. Н. Киоса, С. В. Миронов и др.). Большинство созданных на этой идее подходов достаточно эффективно работает лишь в случаях систем стандартного вида. Задача же приведения произвольного уравнения к стандартному виду, вообще говоря, не тривиальна. В настоящее время нет универсальных алгоритмов ее решения. И даже для уравнений стандартного вида трудно признать полностью завершенной конструктивную теорию условно периодических решений. Это связано с наличием большого разнообразия свойств решений, обусловленных различными типами нелинейностей и наличием так называемых «малых знаменателей».

Алгоритмы, основанные на применении теоремы Плисса—Кэли о центральном подмногообразии с последующими нормализациями и огрублениями уравнения, суженного на центральное подмногообразие (например, предложенные в работах Ю. Н. Бибикова, Г. Ю. Любасовой и др.), также не являются универсальными, так как основаны на некоторых упрощающих предположениях.

Таким образом, поиск алгоритмов, эффективных для построения и анализа устойчивости условно периодических решений тех или иных классов ОДУ остается по—прежнему актуальной задачей.

Центральную методологическую идею, вокруг которой сгруппировано содержание многих работ, можно сформулировать как *сведение задачи изучения существования и устойчивости бифурцирующих решений дифференциального уравнения к аналогичной задаче для упрощен-*

ной аналитической системы уравнений [1, 2]. При этом важнейшим элементом общего анализа поведения редуцированной динамической системы является выяснение устойчивости ее нулевой точки покоя при критических значениях (управляющих) параметров.

В данной работе предложен достаточно простой, но весьма эффективный алгоритм определения устойчивости нулевой точки системы ОДУ, на основе которого можно исследовать устойчивость бифурцирующих решений и выяснять условия сосуществования решений с различными типами устойчивости (индексами неустойчивости) [3—7].

В зависимости от взаимного расположения многогранников Ньютона правых частей системы, а также условий на некоторые коэффициенты, получены признаки асимптотической (абсолютной) устойчивости по Ляпунову и неустойчивости состояния равновесия системы. При этом, функция Ляпунова находится в явном виде. В более общем случае рассматриваюся динамичесике системы с полуквазиоднородными правыми частями конечной гладкости.

СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрение динамической системы на плоскости позволит получить наглядный геометрический смысл признака асимптотической устойчивости по Ляпунову, что, в свою очередь, даст возможность обобщить результат на n-мерный случай.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что функции $P(x), Q(x)$ являются аналитическими в окрестности нуля. Следовательно, их можно разложить в степенные ряды:

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} a_{mn} x_1^m x_2^n, \ \ (x_1, x_2) = \sum_{m,n \geq 0} b_{mn} x_1^m x_2^n.$$

Построим диаграммы Ньютона (P) и (Q) для компонент системы.

Пусть ε_i, δ_j — угловые коэффициенты соответственно i-го звена ломаной (P) и j-го звена ломаной (Q). Напомним, что угловой коэффициент звена определяется как отношение проекции звена на ось OX к проекции на ось OY. Рассмотрим

$$P(x_1, 0) = a x_1^{m_1} + \omega_1(x_1, 0),$$

$$Q(0, x_2) = b x_2^{m_2} + \omega_2(0, x_2),$$

$$\deg \omega_1(x_1, 0) > m_1,$$

$$\deg \omega_2(0, x_2) > m_2.$$

Тогда

$$P(x_1, x_2) = a x_1^{m_1} + \omega_1(x_1, x_2),$$

$$Q(x_1, x_2) = b x_2^{m_2} + \omega_2(x_1, x_2).$$

Теорема 1. *Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:*

1. $a < 0, b < 0$*;*

2. Числа m_1 *и* m_2 *— нечетные;*

3. $\delta_s > \varepsilon_1$*, где* δ_s *— угловой коэффициент верхнего звена диаграммы* (Q)*, а* ε_1 *— угловой коэффициент нижнего звена диаграммы* (P)*.*

Тогда состояние равновесия $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Проведем некоторые геометрические построения. Диаграмму (Q) параллельно перенесем вдоль оси (x_2) на достаточно большое целочисленное расстояние $2p+1$ в точку A. Из точки A проведем лучи параллельные звеньям (P_1) и (Q_s) до пересечения оси (x_1) в точках B и C.

Легко видеть, что при достаточно больших значениях $2p+1$, на отрезке BC найдется точка D, расстояние от которой до m_1 — нечетно. Обозначим это расстояние через $2q+1$. Пере-

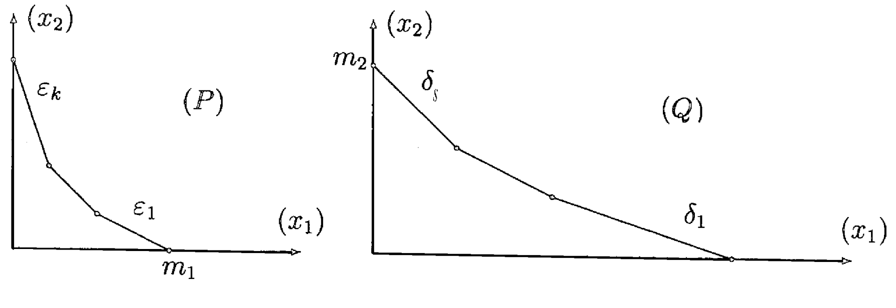

Рис. 1

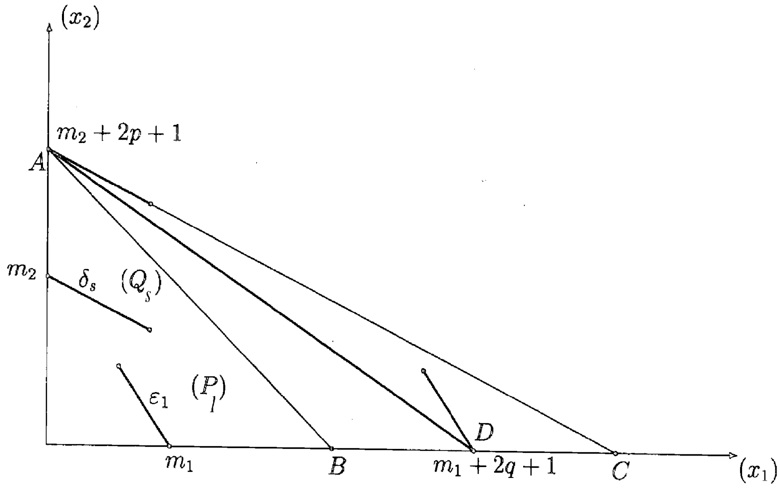

Рис. 2

несем диаграмму (P) параллельно вдоль оси (x_1) в точку D. Соединим точки A и D. Легко видеть, что диаграммы, полученные параллельными переносами лежат выше отрезка AD.

Рассмотрим функцию:

$$\Phi(x_1,x_2)=\frac{x_1^{2q+2}}{2q+2}+\frac{x_2^{2p+2}}{2p+2},$$

которая, очевидно, является положительно определенной.

Рассмотрим производную функции $\Phi(x_1,x_2)$ в силу системы (1):

$$\dot{\Phi}(x_1,x_2)=x_1^{2q+1}P(x_1,x_2)+x_2^{2p+1}Q(x_1,x_2)=$$

$$=ax_1^{m_1+2q+1}+bx_2^{m_2+2p+1}+\omega(x_1,x_2),$$

где $\omega(x_1,x_2)=x_1^{2q+1}\omega_1(x_1,x_2)+x_2^{2p+1}\omega_2(x_1,x_2)$.

Так как всем слагаемым $\omega(x_1,x_2)$ соответствуют точки, лежащие выше отрезка AD, и выполнены условия 1., 2. теоремы 1, функция $\dot{\Phi}(x_1,x_2)$ является отрицательно определенной. Следовательно, Φ — функция Ляпунова, и состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Следствие. *Пусть $ab\neq 0$, выполнено условие 3 теоремы и не выполнено хотя бы одно из условий 1., 2. Тогда состояние равновесия $(x_1,x_2)=(0,0)$ системы (1) неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_1,x_2)=$$

$$=-\frac{|a|}{a}\frac{x_1^{2q+2+\delta(m_1)}}{(2q+2+\delta(m_1))}-\frac{|b|}{b}\frac{x_2^{2p+2+\delta(m_2)}}{(2p+2+\delta(m_2))},$$

где

$$\delta(m)=\begin{cases}1, & m \text{ — четное,}\\ 0, & m \text{ — нечетное.}\end{cases}$$

Тогда производная функции $\Phi(x_1,x_2)$ в силу системы (1) имеет следующий вид:

$$\dot{\Phi}(x_1,x_2)=$$

$$=-|a|\,x_1^{m_1+2q+1+\delta(m_1)}-|b|\,x_2^{m_2+2p+1+\delta(m_2)}+\omega(x_1,x_2),$$

где

$$\omega\left(t^{\frac{1}{m_1+2q+1+\delta(m_1)}}x_1,t^{\frac{1}{m_2+2p+1+\delta(m_2)}}x_2\right)=o(t)$$

при $t\to 0$.

Очевидно, что функция $\dot{\Phi}(x_1,x_2)$ является отрицательно определенной.

Пусть не выполнено условие 1. теоремы, например, $a>0$, тогда $\Phi(x_1,0)<0$ при $x_1>0$.

Если не выполнено условие 2. теоремы, например, m_1 четное, тогда $\Phi(x_1,0)<0$ при $x_1>0,\ a>0$ и при $x_1<0,\ a<0$.

Следовательно, состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову.

Заметим, что условие 3 теоремы геометрически означает, что каждое звено диаграммы (P) "круче" каждого звена диаграммы (Q).

Условие 3. можно переформулировать с использованием показателей квазиоднородности функций $P(x)$ и $Q(x)$. Для этого, представим эти функции в виде:

$$P(x_1,x_2)=R_1(x_1,x_2)+\omega_1(x_1,x_2),$$

$$Q(x_1,x_2)=R_2(x_1,x_2)+\omega_2(x_1,x_2),$$

где $R_i(x_1,x_2)$ — квазидиодная функция степени 1 с рациональными показателями α_{1i},α_{2i},

$m_i = \dfrac{1}{\alpha_{ii}}$, $\omega_i(t^{\alpha_{1i}}x_1, t^{\alpha_{2i}}x_2) = o(t)$, при $t \to 0$, $i = 1,2$, $\dfrac{o(t)}{t} \to 0$, при $t \to 0$.

При таком подходе достаточно потребовать лишь конечную гладкость функций $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$

Очевидно, что $\varepsilon_1 = \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}, \delta_s = \dfrac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}}$. Следовательно, условие 3. теоремы 1 эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} > \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}.$$

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НА n-МЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассматривается система дифференциальных уравнений в пространстве R^n:

$$\dot{x}_i = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1,2,\ldots,n; \qquad (2)$$

$$P_i(0,0,\ldots,0) = 0.$$

Предположим, что правые части $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются полуквазиоднородными функциями степени один с рациональными показателями $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$.

Другими словами, $P_i(x) = R_i(x) + \omega_i(x)$, где

$$R_i(t^{\alpha_{1i}}x_1, t^{\alpha_{2i}}x_2, \ldots, t^{\alpha_{ni}}x_n) = tR_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$\omega_i(t^{\alpha_{1i}}x_1, t^{\alpha_{2i}}x_2, \ldots, t^{\alpha_{ni}}x_n) = o(t) \text{ при } t \to 0.$$

Рассмотрим $P_i(0,\ldots,0,x_i,0\ldots,0) = a_i x_i^{m_i}$. Очевидно, что

$$m_i = \frac{1}{\alpha_{ii}},\ \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Заметим, что здесь, в отличие от классического многогранника Ньютона, координаты точек многогранника могут быть рациональными числами.

Заметим также, что, если рассмотреть многогранник Ньютона функции $P_i(x)$, то $R_i(x)$ состоит из всех слагаемых $a_{ki}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$, показателями степеней которых $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ лежат на грани многогранника, пересекающей координатную ось $(0,\ldots,0,x_i,0\ldots,0)$ в точке m_i.

Теорема 2. *Пусть для системы* (2) *выполнены следующие условия:*

1. $a_i < 0$ *при* $i = 1,2,\ldots,n$*;*

2. m_i *— нечетные натуральные числа, при* $i = 1,2,\ldots,n$*;*

3. существует $s(1 \le s \le n)$ *такое, что* $\dfrac{\alpha_{si}}{\alpha_{sj}} > \dfrac{\alpha_{ji}}{\alpha_{jj}}$*, при* $i \ne j, j \ne s$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ *системы асимптотически (абсолютно) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. В терминах ряда Тейлора $R_i(x) = \sum_k a_{ki}x^k$ все показатели $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ненулевых слагаемых лежат на гиперплоскости

$$\Gamma_i = \{k \mid \alpha_{1i}k_1 + \alpha_{2i}k_2 + \ldots + \alpha_{ni}k_n = 1\},\ \ k_i \ge 0.$$

Рассмотрим $R_i'(x) = x_i^{p_i}R_i(x)$ где p_i — некоторые натуральные числа, $i = 1,2,\ldots,n$. Соответствующая гиперплоскость имеет вид:

$$\Gamma_i' = \{k \mid \alpha_{1i}k_1 + \alpha_{2i}k_2 + \ldots + \alpha_{ni}k_n = 1 + \alpha_{ii}p_i\}.$$

Очевидно, что точка $(0,\ldots,0,m_i + p_i,0,\ldots,0)$ принадлежит Γ_i'.

Рассмотрим следующую гиперплоскость

$$\Gamma = \left\{k \mid \frac{\alpha_{11}}{1+\alpha_{11}p_1}k_1 + \frac{\alpha_{22}}{1+\alpha_{22}p_2}k_2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}}{1+\alpha_{nn}p_n}k_n = 1\right\}.$$

Легко видеть, что точки $(0,\ldots,0,m_i + p_i,0,\ldots,0)$ принадлежат Γ, при всех $i = 1,2,\ldots,n.$

Покажем, что при соответствующем выборе чисел p_i, все гиперплоскости $\Gamma_i'(i = 1,2,\ldots,n)$ имеют с Γ по одной общей точке $(0,\ldots,0,m_i + p_i,0,\ldots,0)$ и лежат выше Γ в первом квадранте $(R^+)^n$.

Пусть, например, $s = 1$ (условие 3 теоремы 2.). В качестве p_1 возьмем достаточно большое нечетное число. Выберем числа p_i по следующим формулам:

$$p_i = p_1\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ii}} + \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ii}\alpha_{11}} - \frac{1}{\alpha_{ii}} + \delta_{i-1}, \qquad (3)$$
$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Здесь $\delta_{i-1} \ge 0$ — такие наименьшие рациональные числа, что p_i — нечетные натуральные числа.

Итак, покажем, что все точки $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \Gamma_i'$, кроме одной, лежат выше гиперплоскости Γ. Другими словами, если

$$k \ne (0,\ldots,m_i + p_i,\ldots,0)$$

и

$$\frac{\alpha_{1i}}{1+\alpha_{ii}p_i}k_1 + \frac{\alpha_{2i}}{1+\alpha_{ii}p_i}k_2 + \ldots + \frac{\alpha_{ji}}{1+\alpha_{ii}p_i}k_j + \ldots + \frac{\alpha_{ni}}{1+\alpha_{ii}p_i}k_n = 1,$$

то

$$\frac{\alpha_{11}}{1+\alpha_{11}p_1}k_1 + \frac{\alpha_{22}}{1+\alpha_{22}p_2}k_2 + \ldots + \frac{\alpha_{jj}}{1+\alpha_{jj}p_j}k_j + \ldots + \frac{\alpha_{nn}}{1+\alpha_{nn}p_n}k_n > 1.$$

Для этого, достаточно показать, что

$$\frac{\alpha_{jj}}{1+\alpha_{jj}p_j} > \frac{\alpha_{ji}}{1+\alpha_{ii}p_i}$$

при всех $i \neq j,\ j \neq 1$.

После замены по формулам (3) и несложных преобразований получим:

$$p_1\left(\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ji}} - \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{jj}}\right) + \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ji}\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{ii}}{\alpha_{ji}}\delta_{i-1} > \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{jj}\alpha_{11}} + \delta_{j-1}.$$

Так как, по условию 3 теоремы 2., (для случая $s = 1$)

$$\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ji}} > \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{jj}},$$

последнее неравенство будет верным при достаточно больших нечетных p_1.

Итак, мы показали, что все гиперплоскости Γ_i' имеют с Γ по одной общей точке $(0,\ldots,0,m_i+p_i,0,\ldots,0)$ и лежат выше Γ в первом октанте $(R^+)^n$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\Phi(x) = \frac{x_1^{p_1+1}}{p_1+1} + \frac{x_2^{p_2+1}}{p_2+1} + \ldots + \frac{x_n^{p_n+1}}{p_n+1},$$

которая, очевидно, является положительно определенной. Рассмотрим производную функции $\Phi(x)$ в силу системы (2):

$$\dot{\Phi}(x) = x_1^{p_1}P_1(x) + x_2^{p_2}P_2(x) + \ldots + x_n^{p_n}P_n(x) =$$

$$= a_1x_1^{m_1+p_1} + a_2x_2^{m_2+p_2} + \ldots + a_nx_n^{m_n+p_n} + \omega(x),$$

где $\omega(x)$ удовлетворяет условию:

$$\omega(t^{\frac{1}{m_1+p_1}}x_1, t^{\frac{1}{m_2+p_2}}x_2, \ldots, t^{\frac{1}{m_n+p_n}}x_n) = o(t),$$

при $t \to 0$.

Геометрически это означает, что первые n слагаемых $\dot{\Phi}$ соответствуют гиперплоскости Γ, остальные соответствуют точкам, лежащим выше Γ. Отсюда, учитывая условия 1., 2. теоремы 2. и нечетность чисел p_i получаем, что функция $\dot{\Phi}$ является отрицательно определенной. Следовательно, Φ — функция Ляпунова и состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Следствие. *Пусть $a_i \neq 0,\ i = 1,\ldots,n$, и выполнено условие 3. теоремы 2. и не выполнено хотя бы одно из условий 1, 2. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = -\frac{|a_1|}{a_1}\frac{x_1^{p_1+1+\delta(m_1)}}{(p_1+1+\delta(m_1))} -$$

$$-\frac{|a_2|}{a_2}\frac{x_2^{p_2+1+\delta(m_2)}}{(p_2+1+\delta(m_2))} - \ldots - \frac{|a_n|}{a_n}\frac{x_n^{p_n+1+\delta(m_n)}}{(p_n+1+\delta(m_n))}.$$

где $\delta(m)$ то же, что и выше.

Производная $\dot{\Phi}(x)$ функции $\Phi(x)$ в силу системы (2) имеет следующий вид:

$$-|a_1|x_1^{m_1+p_1+\delta(m_1)} - |a_2|x_2^{m_2+p_2+\delta(m_2)} - \ldots -$$

$$-|a_n|x_n^{m_n+p_n+\delta(m_n)} + \omega(x),$$

где

$$\omega\left(t^{\frac{1}{m_1+p_1+\delta(m_1)}}x_1, t^{\frac{1}{m_2+p_2+\delta(m_2)}}x_2, \ldots t^{\frac{1}{m_2+p_2+\delta(m_2)}}x_2\right) = o(t)$$

при $t \to 0$.

Очевидно, что функция $\Phi(x)$ является отрицательно определенной.

Пусть не выполнено условие 1. теоремы, например, $a > 0$, тогда $\Phi(x_1,0,\ldots,0) < 0$ при $x_1 > 0$.

Если не выполнено условие 2. теоремы, например, m_1 — четное, тогда $\Phi(x_1,0,\ldots,0) < 0$ при $x_1 > 0$, $a > 0$ и при $x_1 < 0$, $a < 0$.

Следовательно, состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову.

В качестве примера, иллюстрирующего теорему 2, рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1^3 + 5x_2^2 - 11x_3^4 + \\ \quad +5x_2x_3^2 + \omega_1(x_1,x_2,x_3), \\ \dot{x}_2 = -7x_1^7 - 5x_2^3 + 3x_3^7 - 13x_1x_3^6 + \\ \quad +5x_1^2x_3^5 + \omega_2(x_1,x_2,x_3), \\ \dot{x}_3 = x_1^7 + 20x_2^4 - 7x_3^7 - 2x_1^2x_3^5 + \\ \quad +4x_1x_3^6 + \omega_3(x_1,x_2,x_3); \end{cases}$$

$$\omega_1\left(t^{\frac{1}{3}}x_1, t^{\frac{1}{2}}x_2, t^{\frac{1}{4}}x_3\right) = o(t),$$

$$\omega_2\left(t^{\frac{1}{7}}x_1, t^{\frac{1}{3}}x_2, t^{\frac{1}{7}}x_3\right) = o(t),$$

$$\omega_3\left(t^{\frac{1}{7}}x_1, t^{\frac{1}{4}}x_2, t^{\frac{1}{7}}x_3\right) = o(t).$$

Проверим выполнение условий теоремы 2:

1. числа $a_1 = -3,\ a_2 = -5,\ a_3 = -7$ — отрицательны;

2. числа $m_1 = 3,\ m_2 = 3,\ m_3 = 7$ — нечетны;

3. при $s = 2$ выполнены неравенства

$$\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} = \frac{2}{3} > \frac{3}{7} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}},\quad \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{21}} = \frac{1}{2} > \frac{3}{7} = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}},$$

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}} = 2 > \frac{7}{4} = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}},\quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}} = \frac{4}{3} > 1 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}.$$

Следовательно, нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marsden J.E.* On the geometry of the Liapunov-Schmidt procedure // Lect. Notes in Math. 1979. V. 755. P. 77—82.

2. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир. 1985. 280 с.

3. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ. 1991. 144 с.

4. *Любасова Г.Ю.* Бифуркации инвариантныых торов из трехкратной особой точки без сильных резонансов // Глобальный и стохастический анализ. — Воронеж: Изд-во. ВГУ. 1985. — С. 57—68.

5. *Любасова Г.Ю.* О бифуркации инвариантныых торов из сложного фокуса при двукратном и трехкратном вырождении без сильных резонансов // Воронеж: Воронеж. гос. ун-т. 1988. 52 с. Деп. в ВИНИТИ 19.04.88, 2962-В88.

6. *Смольянов В.А.* Вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих из сложного фокуса с резонансом 1:3 // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ. Воронеж, ВГПУ. 2001. — С.НИ138—143.

7. *Смольянов В.А.* Дискриминантные множества и bif-расклады для нечетных деформаций двумерных сборок// НИИМ ВГУ, препринт № 7. Воронеж, 2002. — 18 с.

8. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. — 455 с.

9. *Арнольд В.И., Варченко А.М., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М., 1982. — 303 с.

10. *Зачепа В.Р.* Многогранники Ньютона и устойчивость по Ляпунову// Тез. докл. Воронежской матем. школы «Понтрягинские чтения VI». Воронеж 1995. — 36 с.

11. *Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: ВГУ. 2002. — 187 с.

Поступила в редакцию 30.05.2006