УДК 514.83+514.7

КЛАССЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, ДОПУСКАЮЩИХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ БИВРАЩЕНИЯ

А. С. Иванова, М. А. Паринов

Ивановский государственный университет

Описаны классы электромагнитных волн, допускающих группы, содержащие одномерную подгруппу пропорциональных бивращений.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжено начатое в [2—5] описание классов электромагнитных волн, допускающих подгруппы группы Пуанкаре [1]. Здесь представлены классы электромагнитных волн, допускающих одномерную группу пропорциональных бивращений в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$ следующего вида

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= x^3 \sin a + x^1 \cos a, & \tilde{x}^2 &= x^2 \operatorname{ch} \lambda a + x^4 \operatorname{sh} \lambda a,\\ \tilde{x}^3 &= x^3 \cos a - x^1 \sin a, & \tilde{x}^4 &= x^2 \operatorname{sh} \lambda a + x^4 \operatorname{ch} \lambda a\end{aligned} \tag{1}$$

(здесь $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$, a — групповой параметр). При этом используется классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [7, 8]. Электромагнитная волна трактуется в соответствии с [6] как пространство Максвелла, задаваемое непостоянным по времени тензором F_{ij} ($\partial F_{ij}/\partial x^4 \neq 0$) на пространстве Минковского, удовлетворяющим уравнениям Максвелла

$$\partial_{[i} F_{jk]} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla_k F^{ik} = 0. \tag{3}$$

Базис алгебры Ли группы Пуанкаре, а также все используемые в статье обозначения соответствуют [7, 8]. В частности, подгруппы группы Пуанкаре из списка в [1] и соответствующие алгебры Ли векторных полей обозначены $G_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l}$. Через $\{x^i\}$ обозначены галилеевы координаты. Выражение $L\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1,\ldots,\xi_k$. Компоненты всех тензоров отнесены к галилеевым координатам, даже если выражены как функции других координат.

Класс электромагнитных волн, допускающих группу $G_{k,l}$, обозначен через $W_{k,l}$. Он состоит из кососимметричных тензорных полей F_{ij}, удовлетворяющих уравнениям (2), (3) и условиям инвариантности F_{ij} относительно группы $G_{k,l}$:

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \quad (\alpha = 1,\ldots,k = \dim \mathcal{L}_{k,l}) \tag{4}$$

(L_ξ — производная Ли, $\mathcal{L}_{k,l} = L\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$). Можно также сказать, что класс $W_{k,l}$ есть подкласс класса пространств Максвелла $C_{k,l}$, задаваемых тензорами F_{ij}, удовлетворяющими второму уравнению Максвелла (3) с нулевым током.

Цель настоящей работы состоит в описании классов $W_{k,l}$ электромагнитных волн, инвариантных относительно групп $G_{k,l}$, алгебры Ли которых содержат вектор $e_{13} + \lambda e_{24}$, задающий группу (1). Для решения системы уравнений (2), (3) и (4) мы используем замену координат $\{x^i\} \mapsto \{r, \rho, \theta, \varphi\}$,

$$\begin{aligned}x^1 &= r\cos(\theta - \varphi), & x^2 &= \rho(\lambda\varphi),\\ x^3 &= r\sin(\theta - \varphi), & x^4 &= \rho(\lambda\varphi),\end{aligned} \tag{5}$$

которая переводит инфинитезимальный оператор

$$X = x^3\partial_1 + \lambda x^4 \partial_2 - x^1 \partial_3 + \lambda x^2 \partial_4, \tag{6}$$

соответствующий вектору $e_{13} + \lambda e_{24}$, в дифференцирование по φ. Ввиду громоздкости вычислений приведены только результаты.

КЛАССЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1. *Класс* $W_{1,5}$. Алгебре $\mathcal{L}_{1,5} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}\}$ соответствует одномерная группа $G_{1,5}$ пропорциональных бивращений (1).

Теорема 1 *Класс* $W_{1,5}$ *электромагнитных волн, допускающих группу* $G_{1,5}$, *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned}F_{12} &= (-c_1\lambda\varphi - c_2\lambda\varphi)\sin\varphi + (c_3\lambda\varphi + c_4\lambda\varphi)\cos\varphi,\\ F_{14} &= (c_2\lambda\varphi + c_1\lambda\varphi)\sin\varphi - (c_4\lambda\varphi + c_3\lambda\varphi)\cos\varphi,\\ F_{23} &= (c_1\lambda\varphi + c_2\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_3\lambda\varphi + c_4\lambda\varphi)\sin\varphi,\\ F_{34} &= (c_2\lambda\varphi + c_1\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_4\lambda\varphi + c_3\lambda\varphi)\sin\varphi,\end{aligned} \tag{7}$$

$$F_{13} = F_{13}(\rho, r, \theta), \quad F_{24} = F_{24}(\rho, r, \theta), \tag{8}$$

где функции $c_i = c_i(\rho, r, \theta)$, $F_{13}(\rho, r, \theta)$ и $F_{24}(\rho, r, \theta)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial F_{24}}{\partial r}+\frac{c_1}{\lambda\rho}-\frac{c_4}{\rho}-$$
$$-\frac{\partial c_4}{\partial\rho}-\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial\theta}=0,$$
$$\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial F_{24}}{\partial r}-\frac{c_3}{\lambda\rho}-\frac{c_2}{\rho}-$$
$$-\frac{\partial c_2}{\partial\rho}-\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial\theta}=0, \qquad (9)$$
$$\cos\theta\frac{\partial c_1}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial c_3}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta}-\frac{\partial F_{13}}{\partial\rho}=0,$$
$$\cos\theta\frac{\partial c_2}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial c_4}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta}=0$$

и

$$\frac{\partial c_1}{\partial\rho}+\frac{c_1}{\rho}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_2}{\partial\theta}+\frac{c_4}{\lambda\rho}+$$
$$+\frac{\partial F_{13}}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}=0, \qquad (10a)$$
$$\frac{\partial c_3}{\partial\rho}+\frac{c_3}{\rho}-\frac{c_2}{\lambda\rho}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_4}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{\partial F_{13}}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}=0, \qquad (10b)$$
$$-\frac{\partial c_1}{\partial r}\sin\theta-\frac{\partial c_1}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}+\frac{\partial c_3}{\partial r}\cos\theta-$$
$$-\frac{\partial c_3}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta}=0, \qquad (10c)$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial c_2}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\partial c_4}{\partial r}\cos\theta+$$
$$+\frac{\partial c_4}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{24}}{\partial\rho}=0. \qquad (10d)$$

2. *Класс* $W_{2,9}$. Алгебре $\mathcal{L}_{2,9}=L\{e_{13}+\lambda e_{24},e_2-e_4\}$ соответствует группа $G_{2,9}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций вдоль изотропного направления. Класс $W_{2,9}$ является подклассом класса $W_{1,5}$.

Теорема 2 *Тензор* F_{ij} *класса* $W_{2,9}$ *электромагнитных волн, допускающих группу* $G_{2,9}$, *определяется формулами* (7) *и*

$$F_{13}=F_{13}(\rho,r,\theta),\quad F_{24}=\mathrm{const} \qquad (11)$$

при выполнении (10a), (10b) и следующих условий

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial\rho}-\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}(c_1+c_2)=0,\ \frac{\partial}{\partial\rho}(c_3+c_4)=0,$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial\rho}-\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial\theta}-\frac{c_2}{\rho}-\frac{c_3}{\lambda\rho}=0,$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial\rho}-\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_2}{\partial\theta}-\frac{c_1}{\rho}-\frac{c_4}{\lambda\rho} \qquad (12)$$
$$\frac{\partial c_3}{\partial\rho}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial\theta}+\frac{c_4}{\rho}-\frac{c_1}{\lambda\rho}=0,$$
$$\frac{\partial c_4}{\partial\rho}+\frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_4}{\partial\theta}+\frac{c_3}{\rho}-\frac{c_2}{\lambda\rho}=0,$$

$$-\sin\theta\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta}\right)+\cos\theta\left(\frac{\partial c_3}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta}\right)=0,$$
$$\sin\theta\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta}\right)+\cos\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial c_2}{\partial r}-\frac{\partial c_4}{\partial r}\right)=0. \qquad (13)$$

3. *Класс* $W_{2,10}$. Алгебре $\mathcal{L}_{2,10}=L\{e_{13},e_{24}\}=L\{e_{13}+e_{24},e_{13}\}$ соответствует группа $G_{2,10}$, состоящая из композиций поворотов и псевдовращений, либо поворотов и бивращений при $\lambda=1$. Так как в последнем случае $\mathcal{L}_{1,5}\subset\mathcal{L}_{2,10}$, то $W_{2,10}\subset W_{1,5}$.

Теорема 3 *Тензор* F_{ij} *класса* $W_{2,10}$ *электромагнитных волн, допускающих группу* $G_{2,10}$, *определяется формулами* (7) *и*

$$F_{13}=F_{13}(\rho,r),\ \ F_{24}=F_{24}(\rho,r), \qquad (14)$$

причем

$$c_1=-k_3\sin\theta+k_4\cos\theta,$$
$$c_2=-k_1\sin\theta+k_2\cos\theta, \qquad (15)$$
$$c_3=k_3\cos\theta+k_4\sin\theta,$$
$$c_4=k_1\cos\theta+k_2\sin\theta,$$

$$k_2=\frac{K}{r\rho},\ \ k_3=\frac{L}{r\rho}\ \ (K,L=\mathrm{const}), \qquad (16)$$

а функции $F_{13}(\rho,r)$, $F_{24}(\rho,r)$, $k_1=k_1(\rho,r)$ *и* $k_4=k_4(\rho,r)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial k_1}{\partial r}+\frac{k_1}{r}-\frac{\partial F_{24}}{\partial\rho}=0,\ \frac{\partial k_1}{\partial\rho}+\frac{k_1}{\rho}+\frac{\partial F_{24}}{\partial r}=0,$$
$$\frac{\partial k_4}{\partial r}+\frac{k_4}{r}-\frac{\partial F_{13}}{\partial\rho}=0,\ \frac{\partial k_4}{\partial\rho}+\frac{k_4}{\rho}+\frac{\partial F_{13}}{\partial r}=0 \qquad (17)$$

(замену координат (5) *надо взять при* $\lambda=1$*).*

4. *Класс* $W_{3,11}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,11}=L\{e_{13}+\lambda e_{24},e_1,e_3\}$ соответствует группа $G_{3,11}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций в направлениях

векторов двумерной евклидовой плоскости. Класс $W_{3,11}$ также содержится в $W_{1,5}$.

Теорема 4 *Тензор F_{ij} класса $W_{3,11}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{3,11}$, определяется формулами*

$$F_{13} = \text{const}, \quad F_{24} = \text{const}, \tag{18}$$

и (7), *где функции $c_i(\rho)$ имеют вид*

$$\begin{aligned} c_1(\rho) &= -\frac{D}{\rho}\sin\frac{\ln\rho}{\lambda} + \frac{F}{\rho}\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}, \\ c_2(\rho) &= \frac{1}{\rho}\left(A\cos\frac{\ln\rho}{\lambda} + B\sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\right), \\ c_3(\rho) &= \frac{A}{\rho}\sin\frac{\ln\rho}{\lambda} - \frac{B}{\rho}\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}, \\ c_4(\rho) &= \frac{1}{\rho}\left(D\cos\frac{\ln\rho}{\lambda} + F\sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

(A, B, D, F — произвольные константы).

5. *Класс* $W_{3,13}$. Алгебра $\mathcal{L}_{3,13} = L\{e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,10}$, поэтому $W_{3,13} \subset W_{2,10}$.

Теорема 5 *Тензор F_{ij} класса $W_{3,13}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{3,13}$, определяется формулами* (7) *и* (18), *где*

$$c_1 = -c_2 = -\frac{k}{r\rho}\cos\theta, \; c_3 = -c_4 = -\frac{k}{r\rho}\sin\theta \quad (k = \text{const}). \tag{20}$$

6. *Класс* $W_{4,7}$. Алгебра $\mathcal{L}_{4,7} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,11}$, поэтому $P_{4,7} \subset P_{3,11}$.

Теорема 6 *Тензор F_{ij} класса $W_{4,7}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{4,7}$, определяется формулами*

$$\begin{aligned} -F_{12} = F_{14} &= (c_1\sin\varphi - c_2\cos\varphi)e^{\lambda\varphi}, \\ F_{13} &= B = \text{const}, \\ F_{23} = F_{34} &= (c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi)e^{\lambda\varphi}, \\ F_{24} &= E = \text{const}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\rho}\left(A\cos\frac{\ln\rho}{\lambda} + D\sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\right), \\ c_2 &= \frac{1}{\rho}\left(A\sin\frac{\ln\rho}{\lambda} - D\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

(A, D — произвольные постоянные).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца—Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1971. — 1. — С. 5—13.

1. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 1999. — Вып. 2. — С. 50—62.

3. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. — 2004. — 1. — С. 51—62.

4. *Иванова А. С.* Электромагнитные волны, допускающие трансляции в изотропном направлении // Фундаментальная и прикладная математика. — 2004. — Т. 10. — № 1. — С. 49—56.

5. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих гиперболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. — 2005. — 2. — С. 61—72.

6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1967. — 460 с.

7. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна—Максвелла и уравнения Лоренца. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. — 180 с.

8. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. — 2004. Т. 10. — С. 183—237.

Поступила в редакцию 26.05.2006