УДК 539.3:534.1

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ОДНОЙ СВОБОДНОЙ КРОМКОЙ

Е. В. Власова

Российский государственный открытый технический университет путей сообщения

В работе предложен приближенный метод расчета спектра частот собственных колебаний прямоугольных пластин, основанный на эффективном задании аппроксимирующих функций. Для их построения используются самосопряженные одномерные дифференциальные уравнения, параметры которых оптимизируются. Целью варьирования параметрами является приведение к диагональному виду основной матрицы системы линейных алгебраических уравнений, получаемой по методу Ритца. Расчеты модельных задач показывают хорошую эффективность предлагаемых расчетных формул.

1. Введение. Общепринятый подход к определению собственных частот прямоугольных пластин с одной или несколькими свободными кромками заключается в использовании метода Релея—Ритца или различных численных методов. Однако для решения ряда динамических задач теории упругости важное практическое значение имеет получение решения рассматриваемой задачи в замкнутом аналитическом виде.

Предлагаемый в работе подход к получению аналитического решения задачи является обобщением подхода использованного в работах [1—3] для получения аналитического решения задачи о собственных колебаниях защемленной по контуру прямоугольной пластинки. В указанных работах аппроксимирующие функции для форм собственных колебаний должны были точно удовлетворять всем краевым условиям задачи. Предлагаемый ниже подход не связан такими ограничениями, что и позволяет использовать его для расчета пластин с одной свободной кромкой.

2. Математическая постановка задачи. Как известно, задача определения частот собственных поперечных колебаний изотропной прямоугольной пластинки размером $a \times b$ сводится к нахождению при определенных краевых условиях собственных значений λ дифференциального уравнения

$$L(w) = \nabla^2\nabla^2 w - \lambda w = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $w = w(x, y)$ — амплитуда гармонических колебаний.

Пусть край пластины $x = 0$ свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ — жестко заделаны. Тогда краевые условия задачи имеют следующий вид:

$$\left.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad (2)$$

$$w|_{x=a} = 0,\quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \qquad (3)$$

$$w|_{y=0,\,y=b} = 0,\quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0,\,y=b} = 0, \qquad (4)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

3. Изложение подхода к решению задачи. Согласно [4], рассматриваемой задаче на собственные значения соответствует вариационная задача о минимуме интеграла

$$\int_0^a\int_0^b\left\{(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right\}dxdy - \lambda\int_0^a\int_0^b w^2 dxdy \qquad (5)$$

при свободных граничных условиях.

Будем искать приближенное решение поставленной экстремальной задачи в виде

$$w = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} c_{mn} w_{mn}, \qquad (6)$$

где $w_{mn}(x, y) = U_m(x) V_n(y)$.

Как было указано выше, при таком подходе к решению задачи для аппроксимации функции w можно использовать системы функций $\{w_{mn}\}$

со свободными граничными значениями. Однако, следует отметить, что функции w_{mn} целесообразно подбирать таким образом, чтобы они удовлетворяли всем или почти всем краевым условиям задачи. В этом случае, как мы увидим в дальнейшем, значительно упрощается нахождение неизвестных коэффициентов c_{mn} разложения (6).

В связи с вышеизложенным, в качестве функций $U_m(x), V_n(y)$ в данном случае будем использовать собственные функции следующих самосопряженных краевых задач, содержащих свободные параметры α и β:

$$U^{(4)} + 2\alpha U'' - \gamma^2 U = 0, \tag{7}$$

$$U''(0) + \mu\alpha U(0) = 0,\; U'''(0) + (2-\mu)\alpha U'(0) = 0, \tag{8}$$

$$U(a) = 0,\; U'(a) = 0, \tag{9}$$

$$V^{(4)} + 2\beta V'' - \nu^2 V = 0, \tag{10}$$

$$V(0) = 0,\; V'(0) = 0,\; V(b) = 0,\; V'(b) = 0. \tag{11}$$

Здесь γ и ν — собственные значения краевых задач (7)—(9) и (10), (11) соответственно.

С целью упрощения дальнейших преобразований, будем считать, что функции $U_m(x)$ и $V_n(y)$ нормированы следующим образом:

$$\int_0^a U_m^2(x)\,dx = 1,\quad \int_0^b V_n^2(y)\,dy = 1$$
$$(m = 1,2,\ldots,N,\, n = 1,2,\ldots,N).$$

Видно, что при таком выборе образующих краевых задач для функций $U_m(x)$ и $V_n(y)$ каждая аппроксимирующая функция w_{mn} удовлетворяет краевым условиям (3) и (4). Кроме того, для дальнейшего изложения важно отметить, что из самосопряженности образующих краевых задач следует полнота системы аппроксимирующих функций $\{w_{mn}\}$ при любом выборе значений параметров α и β. Таким образом, наличие параметров α и β в образующих краевых задачах позволит нам в дальнейшем оптимизировать вариационный базис, т.е. подобрать такие значения параметров, которые обеспечат минимальную относительную погрешность предлагаемого в работе приближенного решения рассматриваемой задачи на собственные значения.

Для определения неизвестных коэффициентов разложения (6) используем идею метода Ритца. Подставим разложение (6) в функционал (5). Приравнивая нулю производные этого выражения по c_{ij}, получаем систему уравнений

$$\int_0^a\int_0^b \left\{ \Delta w \Delta w_{ij} - (1-\mu)\times \right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x\partial y}\right)dxdy\right\} -$$
$$-\lambda\int_0^a\int_0^b w w_{ij}\,dxdy = 0,$$

где $i = 1,2,\ldots,N,\; j = 1,2,\ldots,N$.

Нетрудно показать, что, используя двукратное интегрирование по частям, эту систему уравнений можно привести к виду:

$$\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \lambda w\right) w_{ij}\,dxdy -$$
$$-\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial w_{ij}}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0} dy + \tag{12}$$
$$+\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y^2}\right) w_{ij}\right]\Bigg|_{x=0} dy = 0.$$

Отметим, что отсутствие в уравнениях системы (12) ряда контурных интегралов связано с тем, что аппроксимирующие функции w_{ij} удовлетворяют краевым условиям (3) и (4).

Перепишем систему уравнений (12) в матричной форме: $Ac = \lambda c$, где c — искомый вектор коэффициентов разложения c_{mn} ($m = 1,2,\ldots,N$, $n = 1,2,\ldots,N$). Это уравнение эквивалентно уравнению $(A - \lambda E)c = 0$, где E — единичная матрица. Таким образом, получаем следующее уравнение для нахождения приближенных собственных значений λ рассматриваемой задачи

$$\det(A - \lambda E) = 0\,. \tag{13}$$

Видно, что корни уравнения (13) являются собственными числами матрицы A. Однако, вычисление собственных чисел матрицы общего вида является достаточно сложной задачей. Как отмечалось выше, целью варьирования свободными параметрами α и β в предлагаемом подходе является диагонализация матрицы A. В связи с этим исследуем элементы матрицы A, а также влияние на их величину значений параметров α и β.

Рассмотрим недиагональные элементы матрицы A. Для случая, когда

$$n = j = 1,\quad m \neq i, \tag{14}$$

имеем

$$A_{lk} = \int_0^a U_m^{(4)}(x)\,U_i(x)dx +$$

$$+2\int_0^a U_m''(x)U_i(x)dx\int_0^b V_1''(y)V_1(y)\,dy-$$
$$-U_i'(0)\left(U_m''(0)+\mu U_m(0)\int_0^b V_1''(y)V_1(y)\,dy\right)+ \qquad (15)$$
$$+U_i(0)\left(U_m'''(0)+(2-\mu)U_m'(0)\int_0^b V_1''(y)V_1(y)\,dy\right).$$

Здесь $l=N(i-1)+j$, $k=N(m-1)+n$.

Используя краевые условия (8), получаем

$$U_m''(0)+\mu\alpha U_m(0)=0,$$
$$U_m'''(0)+(2-\mu)\alpha U_m'(0)=0. \qquad (16)$$

Кроме того, из (7) следует, что

$$\int_0^a U_m^{(4)}(x)U_i(x)\,dx+2\alpha\int_0^a U_m''(x)U_i(x)dx=$$
$$=\gamma_{mi}^2\int_0^a U_m(x)U_i(x)dx,$$

поэтому в рассматриваемом случае

$$\int_0^a U_m^{(4)}(x)U_i(x)\,dx+2\alpha\int_0^a U_m''(x)U_i(x)dx=0. \qquad (17)$$

Из сопоставления соотношений (15), (16) и (17) видно, что, если взять в качестве параметра α

$$\alpha=\int_0^b V_1''(y)V_1(y)\,dy, \qquad (18)$$

то все A_{lk}, определяемые (15), будут равны нулю.

Аналогично, можно показать, что если взять в качестве параметра β

$$\beta=\mu\int_0^a U_1''(x)U_1(x)\,dx-(1-\mu)\int_0^a U_1'(x)U_1'(x)\,dx, \qquad (19)$$

то будут равны нулю все элементы матрицы A, определяемые соотношениями

$$m=i=1,\quad n\neq j.$$

Таким образом, выбор значений параметров в соответствии с условиями (18) и (19) обеспечивает равенство нулю всех недиагональных элементов матрицы A, расположенных на пересечении первых N строк и N столбцов, а эти элементы, очевидно, являются наиболее значимыми при нахождении первых N собственных чисел матрицы A.

Так как для диагональных матриц собственные числа совпадают с диагональными элементами, получаем следующее приближенное выражение для нахождения собственных чисел

$$\lambda_{mn}=\int_0^a U_m^{(4)}(x)U_m(x)dx+$$
$$+2\int_0^a U_m''(x)U_m(x)dx\int_0^b V_n''(y)V_n(y)\,dy+$$
$$+\int_0^b V_n^{(4)}(y)V_n(y)\,dy- \qquad (20)$$
$$-U_m'(0)\left(U_m''(0)+\mu U_m(0)\int_0^b V_n''(y)V_n(y)\,dy\right)+$$
$$+U_m(0)\left(U_m'''(0)+(2-\mu)U_m'(0)\int_0^b V_n''(y)V_n(y)\,dy\right).$$

Отметим, что предлагаемую расчетную формулу (20) можно переписать в более компактном виде

$$\lambda_{mn}=\int_0^a U_m''(x)U_m''(x)dx+\int_0^b V_n''(y)V_n''(y)\,dy+$$
$$+2\mu\int_0^a U_m''(x)U_m(x)dx\int_0^b V_n''(y)V_n(y)\,dy+ \qquad (21)$$
$$+2(1-\mu)\int_0^a U_m'(x)U_m'(x)dx\int_0^b V_n'(y)V_n'(y)\,dy.$$

4. Результаты численных расчетов. В таблице приведены результаты численного исследования погрешности расчетной формулы (21) для случая расчета квадратной пластины со стороной $a=b=1$. Здесь

$$\delta(\alpha,\beta)=\left|\lambda_i^{\text{Р}}-\lambda_i^{\text{прибл.}}\right|/\left|\lambda_i^{\text{Р}}\right|\cdot 100\%,$$

где λ_i^P — собственные числа, полученные по методу Ритца; $\lambda_i^{\text{прибл.}}$ — собственные числа, полученные по формуле (21). Предполагается, что собственные числа упорядочены по возрастанию. Отметим, что значения параметров α^* и β^* определяются соотношениями (18) и (19).

Наряду с погрешностью $\delta(\alpha^*,\beta^*)$ в табл. приведены погрешности $\delta(0,0)$. Случай $\alpha=\beta=0$ интересен тем, что при таких значениях параметров предлагаемые в работе базисные функции $U_m(x)$ и $V_n(y)$ совпадают с функциями формы колебаний балки [4], которые часто применяются при решении вариационных задач механики.

Видно, что для собственных значений краевых задач, получаемых с помощью предлагаемого подхода, характерна приемлемая для инженерных расчетов точность и вид, удобный для последующего обобщения и использования при решении многих проблем на стадии проектирования и расчета конструкций. Погреш-

Таблица

Относительные погрешности собственных чисел λ_i ($i = 1, 2, 3$), полученных с помощью формулы (21)

	λ_1	λ_2	λ_3
$\delta(\alpha^*, \beta^*)$, %	0.04	0.80	0.27
$\delta(0,0)$, %	1.65	2.46	1.47

ности $\delta(\alpha^*, \beta^*)$ и $\delta(0,0)$ в каждом из рассмотренных случаев существенно отличаются, что свидетельствует об эффективности использования предлагаемых в работе базисных функций. Аналогичные выкладки могут быть проведены и для других краевых условий при выборе соответствующих систем аппроксимирующих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барановский, Г. К.* Свободные колебания жесткозакрепленной прямоугольной пластины [Текст] / Г. К. Барановский, И. Г. Кадомцев // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. — 2000. — № 3. — С. 170—178.

2. *Алейников, И. А.* О приближенном решении краевой задачи для неоднородного бигармонического уравнения [Текст] / И. А. Алейников, Е. В. Власова // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 8. — С. 94—98.

3. *Алейников, И. А.* Об одном эффективном подходе к построению систем базисных функций при решении краевых задач [Текст] / И. А. Алейников, Е. В. Власова; РГОТУПС. — М., 2005. — 11 с. — Деп. в ВИНИТИ 13.04.2005, № 493-В2005.

4. *Канторович, Л. В.* Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — 3-е изд., перераб. — М., Л.: ГИТЛ, 1949. — 695 с.

Поступила в редакцию 04.04.2006