УДК 621.3.019

НЕНАГРУЖЕННОЕ КРАТНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТАМИ С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ОТКАЗОВ

В. И. Костылев, М. П. Сличенко

Воронежский государственный университет

В работе рассматривается один из способов повышения надежности радиотехнической системы — ненагруженное кратное резервирование произвольным числом элементов с различными характеристиками надежности. Получены точные аналитические выражения для интенсивности отказа и вероятности безотказной работы рассматриваемой системы. Проанализировано поведение данных характеристик в различных случаях. Сделаны некоторые обобщающие выводы.

Проблема обеспечения надежности в ее современном виде была сформулирована более полувека назад применительно к радиоэлектронным устройствам, построенным из большого числа элементов. Надежностью устройства называют свойство, обеспечивающее возможность выполнения этим устройством заданных функций с заданными характеристиками в определенных условиях и в течение требуемого интервала времени. В настоящей работе отказ устройства предполагается случайным событием в том смысле, что заданная структура устройства и условия его эксплуатации не определяют точно моменты и место возникновения отказов.

Два основных способа соединения элементов в системе с точки зрения надежности – последовательный и параллельный — определяются влиянием отказа элемента на отказ системы. В случае параллельного соединения отказ лишь всех элементов приводит к отказу системы. Параллельные элементы в системе являются избыточными и приводят к повышению надежности. Данный метод повышения надежности системы введением избыточных (резервных) элементов называется резервированием. В настоящей работе рассматривается ненагруженный режим резервных элементов, при котором резервные элементы отключены.

Так как отказ по принятой концепции является случайным событием, то интервал времени от момента включения устройства до первого отказа представляет случайную величину ξ. Основной характеристикой безотказности принято считать вероятность безотказной работы на заданном интервале. Принимая момент первого включения за начало отсчета, запишем вероятность безотказной работы в виде [1]

$$p(t) = P\{\xi > t\}, \ \ t \ge 0,$$

а интенсивность отказов

$$\lambda(\tau) = -\frac{1}{p(\tau)}\frac{dp(\tau)}{d\tau}.$$

Для длительности безотказной работы часто используется модель экспоненциального распределения. Она обладает очень важным свойством: если устройство проработало без отказов до некоторого момента времени τ, то и дальнейшее распределение времени безотказной работы устройства будет таким же, как и в момент его включения. Данная модель часто используется для априорного анализа, так как позволяет не очень сложными расчетами получить простые соотношения для сравнения различных вариантов построения системы. На стадии апостериорного анализа должна проводиться проверка соответствия экспоненциальной модели результатам испытаний. Можно показать [1], что данный закон распределения длительности безотказной работы следует из общего предположения о стационарности потока отказов и об отсутствии в нем последействия.

Рассмотрим общий случай, когда имеется не один, а $m-1$ резервных элементов. Предполагается, что все резервные элементы находятся в ненагруженном режиме и переключающее устройство работает мгновенно и безотказно. Момент включения каждого устройства – случайная величина, представляющая момент отказа предыдущего устройства. При этом мы пренебрегаем временем переключения и вхождения устройства в нагруженный режим.

© Костылев В. И., Сличенко М. П., 2007

Обозначим через τ_i момент отказа i-го устройства, а ξ_i — интервал времени между $(i-1)$-м и i-м отказом, $i = 2, 3, \dots, m$. Ясно, что

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{i} (\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=1}^{i} \xi_k. \qquad (1)$$

Вероятность безотказной работы системы в этом случае равна

$$P_m(t) = \int_t^{\infty} w_m(x)dx, \qquad (2)$$

где $w_m(x)$ — плотность вероятности случайной величины τ_m.

Определим плотность вероятности суммы независимых величин с помощью метода характеристических функций, имея в виду, что в этом случае характеристическая функция суммы случайных величин равна произведению функций слагаемых. Введем характеристическую функцию $\Theta_k(j\eta)$ интервала безотказной работы k-ого резервного устройства. Тогда характеристическая функция случайной величины τ_m равна

$$\Theta_{\tau_m}(j\eta) = \prod_{k=1}^{m} \Theta_k(j\eta).$$

Далее предполагается что m устройств представлены в виде n различных наборов с одинаковыми параметрами безотказности элементов. Обозначим K_i — число идентичных устройств i-ого набора, причем справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = m. \qquad (3)$$

Устройства каждого i-го набора являются однотипными и характеризуются постоянной интенсивностью отказов λ_i. Так как характеристическая функция экспоненциального распределения равна

$$\Theta(j\eta) = (1 - j\eta\Lambda)^{-1}, \qquad (4)$$

где $\Lambda = \lambda^{-1}$, то характеристическая функция случайного момента τ_m отказа m-го элемента равна

$$\Theta_{\tau_m}(j\eta) = \prod_{i=1}^{n} (\Theta_i(j\eta))^{K_i} = \prod_{i=1}^{n} (1 - j\eta\Lambda_i)^{-K_i}. \qquad (5)$$

Выражение (5) с помощью разложения правой части на простые дроби можно записать в следующем виде

$$\Theta_{\tau_m}(j\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i} \beta_i^k \left(\Theta_i(j\eta)\right)^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i} \beta_i^k \Theta_\gamma(j\eta, \Lambda_i, k), \qquad (6)$$

где $\Theta_\gamma(j\eta, \Lambda_i, k)$ — характеристическая функция гамма распределения с параметрами Λ_i и k:

$$\Theta_\gamma(j\eta, \Lambda_i, k) = (1 - j\eta\Lambda_i)^{-k}.$$

Из (6) видно, что плотность вероятности момента отказа системы является гипер-гамма распределением. Нами была получена формула для коэффициентов β_i^k:

$$\beta_i^{K_i - N} = (-1)^{K_i} \alpha_i^{K_i - N} \lambda_i^{-N} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} \lambda_s^{-K_s}, \qquad (7)$$

где

$$\alpha_i^{K_i - N} = \frac{-1}{N!\,\varphi_i(\Lambda_i)} \times \left\{ \left[\sum_{r=0}^{N-1} (N - r + 1)_r \alpha_i^{K_i - r} \varphi_i^{(N-r)}(\Lambda_i) \right] - \delta_{0N} \right\}, \qquad (8)$$

$$\varphi_i(\Lambda) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} \left(\Lambda - \Lambda_r\right)^{K_r}, \qquad (9)$$

$N = 0, 1, \dots, K_i - 1$; $f^{(h)}(x) \equiv \dfrac{d^h f(x)}{dx^h}$, $(a)_h$ — символ Похгаммера [2].

Формулы (7) и (8) позволяют вычислять коэффициенты β_i^k при фиксированном i по порядку начиная с $\beta_i^{K_i}$ до β_i^1, а для различных i одновременно.

Теперь нетрудно найти вероятность безотказной работы рассматриваемой системы:

$$P_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\Theta_i(j\eta)\right)^{K_i} e^{-j\eta x} d\eta dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i} \beta_i^k \left[1 - \frac{\Gamma\left(k, \lambda_i t\right)}{\Gamma\left(k\right)} \right], \qquad (10)$$

где $\Gamma(a, b)$ — неполная гамма функция [2].

Далее найдем выражение для интенсивности отказов:

$$\lambda(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i} \frac{\lambda_i \beta_i^k}{\Gamma(k)} \left(\lambda_i t\right)^{k-1} \exp\left(-\lambda_i t\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i} \beta_i^k \exp\left(-\lambda_i t\right) \left[\sum_{R=0}^{k-1} \frac{\left(\lambda_i t\right)^R}{R!} \right]}. \qquad (11)$$

Из (11) можно получить:

$$\lambda(0) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i^1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i} \beta_i^k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i^1, \qquad \lambda(\infty) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \exp\left(-\lambda_i t\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\lambda_i t\right)} \right). \qquad (12)$$

Учитывая свойства коэффициентов β_i^j получим следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_i}\beta_i^k = 1,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\beta_i^1 = 0,$$
$$\lambda(0) = 0,\ \lambda(\infty) = \min\{\lambda_i\}.$$

Из формул (11)—(13) видно, что интенсивность отказов системы при ненагруженном кратном резервировании растет от значения $\lambda(0) = 0$ до своего максимального значения, равного минимальной из всех интенсивностей отказов резервных элементов.

Так как момент отказа каждого из элементов системы равен сумме интервалов безотказной работы всех элементов, то выражение для среднего времени безотказной работы системы при ненагруженном кратном резервировании в случае, когда последнее производится элементами с различными характеристиками надежности, можно записать в виде:

$$T_m = \sum_{i=1}^{n} K_i T_{cpi},\ \ T_m = \sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\lambda_i}. \qquad (13)$$

На рис. 1 представлена зависимость вероятности безотказной работы системы в случае ненагруженного кратного резервирования элементами с различными и одинаковыми величинами параметров интенсивности отказов соответственно. Здесь t_0 — некий характерный интервал времени для элементной базы. Видно, что неодинаковость в параметрах надежности элементов системы приводит к уменьшению надежности системы в целом.

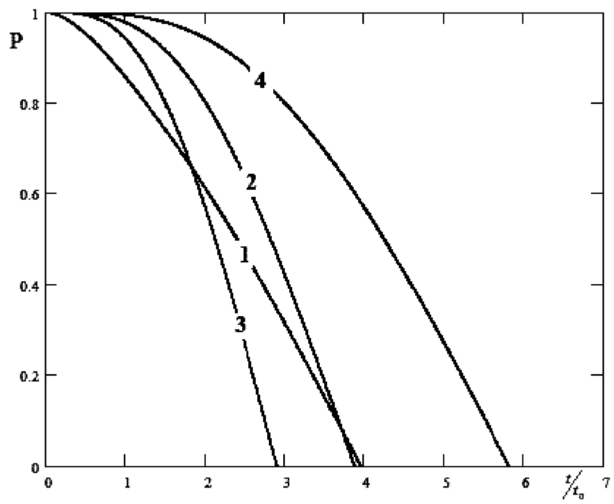

Рис. 1. Вероятность безотказной работы системы в случае резервирования элементами с различными характеристиками интенсивности отказов (1) и с одинаковыми интенсивностями отказов, равными минимальному (4), среднему (2) и максимальному (3) из данных параметров

Обычно реализуется случай, когда резервные элементы имеют различные параметры надежности, а величины ёмкостей резервных наборов невелики. На рис. 2 представлена зависимость интенсивности отказов системы $\lambda(t)$ с различными (1) и одинаковыми (2), равными среднему от значений параметров безотказности λ_i. Видно, что ненагруженное кратное резервирование системы элементами с различными параметрами надежности обеспечивает минимум величины интенсивности отказов системы. С ростом времени интенсивность отказов системы стремится к минимальному из всех значений λ_i. Система как бы сама настраивается на режим с минимальной из интенсивностей отказов.

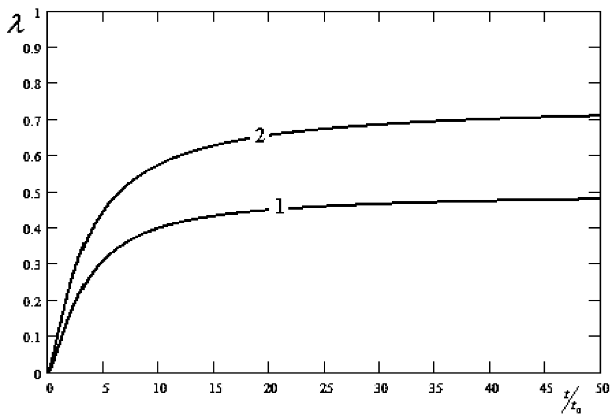

Рис. 2. Интенсивность отказов системы $\lambda(t)$ с различными (1) и одинаковыми (2), равными среднему от значений параметров безотказности λ_i

Таким образом, мы получили обобщение формул для характеристик ненагруженного кратного резервирования на случай резервирования элементами с различными интенсивностями отказов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин Б.Р.* Теория надежности радиотехнических систем / Б. Р. Левин. — М.: Советское радио, 1978. — 264 с.

2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица, И. М. Стиган. — М.: Наука, 1979.