УДК 534.26

ОБОБЩЕННЫЕ МОДЫ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Б. Г. Кацнельсон

Воронежский государственный университет

Предлагается обобщение метода адиабатических мод на случай нерегулярных звуковых каналов в мелком море. Вводится и обсуждается понятие обобщенных мод.

ВВЕДЕНИЕ

При описании распространения волн любой природы в волноводных или волноводо-подобных средах одним из основных методов является метод представления волнового поля в виде разложения по собственным функциям т.н. поперечной задачи Штурма—Лиувилля (или по нормальным или волноводным модам) [1]. Рассмотрим, например, распространение низкочастотных звуковых волн в океанической среде. Моделью такой среды является волновод, ограниченный поверхностью и дном моря. Источники, используемые для изучения распространения, как правило, имеют размеры много меньше длины волны (более нескольких метров) и могут рассматриваться, как точечные. Тогда поле источника с фиксированной частотой (тональный источник) представляет собой функцию Грина соответствующего волнового уравнения (или стационарного уравнения Гельмгольца).

$$[\Delta + k^2(\vec{r},z)]\Psi(\vec{r},z) = -\delta(\vec{r})\delta(z-z_s), \qquad (1)$$

где $\vec{r} = (x,y)$ радиус вектор в горизонтальной плоскости, ось z направлена вертикально вниз, предполагается, что точечный источник расположен в точке с координатами $\vec{r} = \vec{r}_s = 0,\ z = z_s$. В достаточно распространенном приближении используется модель подводного звукового канала, обладающая цилиндрической симметрией. Допустим, кроме этого, что волновод ограничен дном $z = H$ и поверхностью $z = 0$, плотность и скорость звука в водном слое $(0 < z < H)$ равны, соответственно, $\rho(z),\ c(z)$, в донном слое $(z > H)$ $\rho_1,\ c_1$. Соответственно можно построить показатели преломления в дне и водном слое. Вообще говоря, указанные параметры волновода могут зависеть от координаты $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (нерегулярный канал), эту зависимость в дальнейшем мы предполагаем достаточно плавной (критерии плавности обсуждаются ниже).

Двумерное уравнение распространения волн, которое получается из (1) имеет вид

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(r,z)\right]\Psi(r,z) = -\delta(z-z_s)\frac{\delta(r)}{2\pi r} \qquad (2)$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{1}{\rho\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}}\right|_{H-0} = \left.\frac{1}{\rho\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}}\right|_{H+0}, \qquad (3)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ это нормаль к поверхности дна, в случае постоянной глубины она совпадает с производной по z.

Если величина $H = const$, а величины $c,\ \rho$ зависят только от переменной z, то стандартная форма представления решения уравнения (2) есть разложение по собственным функциям ψ_n задачи Штурма—Лиувилля:

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2} + \left[k^2(z) - \xi_n^2\right]\psi_n = 0; \qquad (4)$$

$$\psi_n(0) = 0,$$

$$\left.\frac{1}{\rho\psi_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial z}\right|_{H-0} = \left.\frac{1}{\rho\psi_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial z}\right|_{H+0},$$

где собственные значения ξ_n могут быть комплексными вследствие потерь при распространении, описываемом комплексным значением скорости звука в дне c_1. Вместе с тем, мы будем в дальнейшем анализе рассматривать только вещественные собственные значения, учесть малые поправки за счет потерь нетрудно. Функция Грина для такого регулярного канала хорошо известна, она имеет вид [1]:

$$\Psi(r,z) = \frac{i}{4}\sum_n \psi_n(z_s)\psi_n(z)H_0^{(1)}(\xi_n r), \qquad (5)$$

где $H_0^{(1)}(\xi_n r)$ функция Ханкеля.

Поскольку, как правило, поле (функция Грина) рассматривается на расстояниях больших по сравнению с длиной волны $(\xi_n r >> 1)$, мы можем вместо функции Ханкеля воспользоваться ее асимптотическим выражением и тогда:

$$\Psi(r,z)=\sum_n \frac{C_n\psi_n(z)}{\sqrt{\xi_n r}}\exp(i\xi_n r), \qquad (6)$$

где

$$C_n=\sqrt{\frac{i}{8\pi}}\psi_n(z_s). \qquad (7)$$

Физический смысл выражения (6) состоит в том, что поле представляет собой сумму (суперпозицию) волноводных мод с амплитудами, определяемыми выражением (7) не меняющимися при распространении и определяемыми положением источника и параметрами волновода. Экспериментально коэффициенты (7) могут быть измерены с использованием вертикальных приемных антенн.

Основное внимание в данной работе привлечено к нерегулярному волноводу, когда его параметры (глубина, профиль скорости звука) являются функциями расстояния r. В этом случае решение уравнения (2) ищется в виде (6) где разложение производится по функциям $\psi_n(r;z)$, зависящим от r, как от параметра и являющихся решением задачи Штурма—Лиувилля (4) в каждом сечении волновода. Мы будем называть их локальными собственными функциями (функции сравнения). Коэффициенты C_n в этом методе также предполагаются функциями от r и удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка [1] или (в приближении рассеяния вперед) системе уравнений первого порядка. Таким образом, физическая интерпретация такого подхода состоит в том, что по мере распространения волн в нерегулярном волноводе модовый состав излучения меняется, это трактуется, как процесс взаимодействия мод.

ОБОБЩЕННЫЕ МОДЫ

В данной работе предлагается использовать другой подход построения поля в волноводе, основанный на введении иных базисных функций для разложения поля типа (6). Подобные функции получили название адиабатических функций в [2], построенных таким образом, что их композиция не изменяется при распространении, иначе говоря, модальные амплитуды C_n являются постоянными.

Итак, будем считать, что мы имеем модель волновода, указанную выше с параметрами (скорость звука. глубина и пр.) зависящими от расстояния.

Будем строить решение уравнения (2) с граничными условиями (3) в виде

$$\Psi(r,z)=$$
$$=\sum_n \frac{C_n(r)}{\sqrt{\eta_n r}}\Phi_n(r,z)\exp\left\{i\int_0^r \eta_n(\tau)d\tau\right\}, \qquad (8)$$

где функции $\Phi_n(r,z)$ и $\eta_n(r)$ пока не определены.

Подставив (8) в (2). получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\eta_n}}\left(\left(2i\eta_n\frac{\partial\Phi_n}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2}+\right.\right.\\ \left.+[k^2(r,z)-\eta_n^2(r)]\Phi_n\right)C_n(r)+\\ \left.+2i\eta_n\Phi_n\frac{dC_n}{dr}\right)\exp\left(i\int_0^r\eta_n(\tau)d\tau\right)+\\ +\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\eta_n}}\left\{\frac{d^2C_n}{dr^2}\Phi_n+2\frac{dC_n}{dr}\frac{\partial\Phi_n}{\partial r}+\right.\\ +C_n\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial r^2}+\frac{3}{4\eta_n^2}C_n\Phi_n\frac{d\eta_n}{dr}-\frac{1}{\eta_n}\frac{d\eta_n}{dr}\frac{\partial\Phi_n}{\partial r}+\\ \left.+iC_n\Phi_n\frac{d\eta_n}{dr}\right\}\exp\left(i\int_0^r\eta_n(\tau)d\tau\right)=0.\end{gathered} \qquad (9)$$

Предположим, что изменения параметров волновода в продольном направлении являются достаточно плавными. В этом случае можно проанализировать порядок малости членов, исходя из этого обстоятельства. Введем характерную длину изменчивости Λ поля вдоль направления распространения. В частности

$$\left|\frac{dC_n}{dr}\right|,\left|\frac{C_n}{2\xi_n}\frac{d\xi_n}{dr}\right|,\left|\frac{\partial\Phi_n}{\partial r}\right|\sim 1/\Lambda, \qquad (10)$$

для вторых производных по расстоянию и произведения первых производных имеем соотношения

$$\left|\frac{d^2C_n}{dr^2}\right|,\left|\frac{dC_n}{dr}\frac{\partial\Phi_n}{\partial r}\right|,\left|\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial r^2}\right|,\left|\frac{\partial\eta_n}{\partial r}\right|\sim 1/\Lambda^2. \qquad (11)$$

В соответствии с указанными параметрами малости все члены во второй сумме формулы (9) малы и ими можно пренебречь. Тогда в первом порядке по указанному параметру малости остается только первая сумма. Отметим, что если бы в качестве функций $\Phi_n(r,z)$ мы взяли собственные функции задачи (4), то для коэффициентов $C_n(r)$ можно было получить упомянутую выше систему дифференциальных уравнений — уравнений взаимодействия мод [1]. Основная идей работы состоит в том, что мы будем искать тогда функции $\Phi_n(r,z)$ таким образом, чтобы их амплитуда не менялась по мере распространения, то есть $\frac{dC_n}{dr}=0$. В этом случае для функций $\Phi_n(r,z)$ получаем уравнение

$$2i\eta_n \frac{\partial\Phi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2} + \left[k^2(r,z) - \eta_n^2(r)\right]\Phi_n. \quad (12)$$

Это уравнение параболического типа, из которого следует получить неизвестную функцию $\Phi_n(r,z)$ и функцию $\eta(r)$.

Можно сказать, что функции $\Phi_n(r,z)$ играют роль волноводных мод для нерегулярного канала. В работе [2] они называются «адиабатическими модами». Уравнение (12) должно быть дополнено граничными условиями на дне и поверхности и «начальными» условиями при $r=0$. В качестве последнего естественно выбрать условие совпадения адиабатической моды с обычной модой.

$$\Phi_n(0,z) = \psi_n(z). \quad (13)$$

В этом случае в отсутствие нерегулярности мы будем иметь в качестве решения уравнения (12) нормальные моды регулярного волновода.

Отметим далее, что сами функции $\Phi_n(r,z)$ могут быть разложены по волноводным модам

$$\Phi_n(r,z) = \sum_m \alpha_m^n(r)\psi_m(r,z) \quad (14)$$

подстановка этого выражения в уравнение (12) с учетом ортнормированности собственных функций ψ_n дает систему уравнений взаимодействия мод для коэффициентов α_m^n:

$$\frac{d\alpha_m^n}{dr} = i\left(\xi_m - \xi_n\right)\alpha_m^n - \sum_{p=1}^{N} V_{mp}\alpha_p^n, \quad (15)$$

где

$$V_{mn} = \int \psi_m \frac{\partial\psi_n}{\partial r}\,dz. \quad (16)$$

Построение адиабатических (обобщенных) мод волновода наиболее эффективно производить на основе численного решения уравнения параболического типа (12). В настоящее время разработаны достаточно эффективные методы численного решения параболических уравнений для таких ситуаций [4,5].

Рассмотрим в качестве примера нерегулярной волновод с изменяющейся глубиной $H=H(r)$ и постоянной скоростью звука $c = const$. В качестве граничных условий возьмем простейшие: поле на границе равно нулю, для обобщенных функций это означает $\Phi_n(r,0) = \Phi_n(r,H) = 0$. В этом случае локальные моды волновода имеют вид:

$$\psi_n(r,z) = \sqrt{\frac{2}{H(r)}}\sin\left(\frac{n\pi}{H(r)}z\right). \quad (17)$$

На рис. 1 показано изменение глубинного распределения амплитуды первой обобщенной моды по мере распространения. Видно искажение формы по сравнению с первой локальной модой. Это происходит за счет примеси других локальных мод, главным образом второй, затем третьей и т.д.

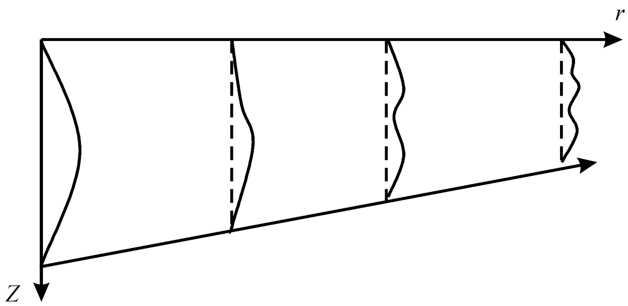

Рис. 1. Изменение вертикального распределения первой обобщенной моды.

Используя решение системы уравнений (15) можно построить амплитуды локальных мод в обобщенной, как функции расстояния до источника. (рис. 2) . На этом рисунке показано изменение модального разложения первой обобщенной моды (то есть моды, которая при $r=0$ совпадает с первой локальной модой). Согласно начальному условию при $r=0$ мы имеем вес первой локальной моды 1, остальные входят с весом 0. Затем, по мере распространения это распределение меняется, видно, что растет доля второй локальной моды и т.д.

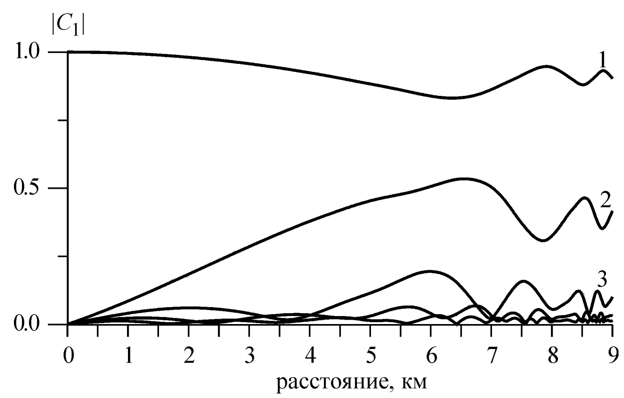

Рис.2. Изменения весов адиабатический (локальных) мод в первой обобщенной моде, как функции расстояния до источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется, что развитый подход для описания звукового поля в нерегулярном звуковом канале может быть эффективным при решении ряда важных задач акустики мелкого моря. Например, при решении задач локализации источника, моделировании флуктуаций звукового поля обусловленных движущимся в волноводе локализованным объектом, и т.д. В этих задачах необходимо многократное вычисление звукового поля для различных (изменяющихся) условий на источнике.

В рамках развитого подхода, после однократного расчета обобщенных адиабатических мод нерегулярного волновода, учет изменяющихся начальных условий осуществляется простым изменением коэффициентов, с которыми адиабатические моды суммируются на приемнике. Таким образом, развитый подход позволяет значительно сократить количество вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М., Наука, 1974.

2. *Гуревич А.В.* Распространение радиоволн в ионосфере. М. Наука. 1973.

3. *Keller J.B., Papadakis J.S.* Wave Propagation and Underwater Acoustics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1979, 227 pp.

4. *Smith K.B., Tappert F.D.* "UMPE: The University of Miami Parabolic Equation Model, Version 1.1" MPL Technical Memorandum 432 May, 1993, 96 pp.

5. *Tappert F.D.* "The parabolic approximation method," in Wave Propagation and Underwater Acoustics, Lecture Notes in Physics, Vol. 70, edited by J. B. Keller and J. S. Papadakis (Springer-Verlag, New York, 1977), Chap. V, P. 224—287.