УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. В. Юргелас

Воронежский государственный университет

Установлены достаточные условия разрешимости задачи Неймана для одномерного уравнения Шредингера с постоянным потенциалом и полиномиальной нелинейностью.

Рассмотрим задачу Неймана следующего вида

$$\begin{cases} -\ddot{x} + \omega^2 x = \sum\limits_{0 \le k \le m} a_k(t) x^k \equiv f(t,x) & (1) \\ \dot{x}(0) = 0 = \dot{x}(T), & (2) \end{cases}$$

в которой ω — ненулевой вещественный параметр, а функции $a_0(t), ..., a_m(t)$ непрерывны на промежутке $[0,T]$.

Задачи подобного рода возникают, например, при моделировании некоторых процессов в гидродинамике (см. [1] и имеющуюся там библиографию).

Покажем, что полиномиальность нелинейности $f(t,x)$ по фазовой переменной позволяет достаточно простыми средствами обосновать разрешимость граничных задач типа (1)—(2).

Введем предварительно некоторые обозначения:

$$l_{\pm} = e^{\omega t} \pm e^{\omega(2T-t)}, \ 0 \le t \le T, \ \omega \ne 0,$$

$$a_* = \max\{\|a_0\|_c ; \ldots ; \|a_m\|_c\},$$

где под $\|x\|_c$ понимается чебышевская норма элемента $x(t)$ банахова пространства $C[0,T]$ непрерывных на $[0,T]$ функций: $\|x\|_c = \max|x(t)|$, $0 \le t \le T$.

Далее, через $\mathcal{H}_\omega$ обозначим линейный интегральный оператор, действующий в пространстве $C[0,T]$ по правилу

$$(\mathcal{H}_\omega x)(t) = \int_0^T H(t,s;\omega) x(s) ds, \ 0 \le t \le T,$$

в котором

$$H(t,s;\omega) = \begin{cases} -\dfrac{l_+(t)(\omega s)}{\omega l(0)} & \text{при } 0 \le s \le t \le T, \\ -\dfrac{(\omega t) l_+(s)}{\omega l_-(0)} & \text{при } 0 \le t \le s \le T. \end{cases}$$

Лемма 1. *Норма оператора* $\mathcal{H}_\omega : C[0,T] \to \to C[0,T]$ *вычисляется по формуле*

$$\|H_\omega\| = \frac{1}{\omega^2}, \ \omega \ne 0. \tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ядро оператора $\mathcal{H}_\omega$ положительно для любых ненулевых значений параметра ω и всех $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$ с учетом очевидного неравенства $\omega l_-(0) < 0$ $(\omega \ne 0)$. А так как $\mathcal{H}_\omega$ ограничен, то

$$\|H_\omega\| = \max_{0 \le t \le T} \int_0^T H(t,s;\omega) ds.$$

Прямые вычисления приводят к следующему выражению для интеграла справа:

$$\int_0^T H(t,s;\omega) ds = -\frac{1}{\omega l_-(0)} (l_+(t) \int_0^t (\omega s) ds + (\omega t) \int_t^T l_+(s) ds) =$$

$$= -\frac{1}{\omega^2 l_-(0)} (l_+(\omega t) - (\omega t) l_-(t)) = \frac{1}{\omega^2},$$

откуда следует (3).

Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^T H(t,s;\omega) f(s, x(s)) ds \tag{4}$$

и установим достаточные условия его разрешимости в пространстве $C[0,T]$.

Лемма 2. *Если для заданных* a_*, ω *и* m *множество положительных решений неравенства*

$$\frac{a_*}{\omega^2} \cdot \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1} \le r \tag{5}$$

непусто, то уравнение (4) *имеет по крайней мере одно непрерывное на* $[0,T]$ *решение.*

Доказательство. Если формулой $(Fx)(t) = =f(t,x(t))$ определить действующий в $C[0,T]$ нелинейный оператор F, а через $\mathcal{H}_\omega * F$ обозначить суперпозицию операторов $\mathcal{H}_\omega$ и F, то в операторной форме уравнение (4) примет вид

$$x = (\mathcal{H}_\omega * F)(x). \tag{6}$$

Оператор F, как нетрудно видеть, непрерывен и ограниченные множества пространства

$C[0,T]$ переводит в ограниченные. Стандартными рассуждениями можно доказать компактность оператора $\mathcal{H}_\omega$ и, как следствие, получить компактность суперпозиции $\mathcal{H}_\omega * F$.

Далее, по заданным $\omega \neq 0$ и a_* можно указать такое $r > 0$, что для образа замкнутого шара $\bar{S}(\theta, r) \subset C[0,T]$ (здесь $\theta = \theta(t) \equiv 0 \forall t \in [0,T]$ — нуль пространства $C[0,T]$) будет справедливо включение $(\mathcal{H}_\omega * F)\bar{S}(\theta, r) \subseteq \bar{S}(\theta, r)$, поскольку неравенство (5), следующее из очевидной цепочки для $x \in \bar{S}(\theta, r)$

$$\|(\mathcal{H}_\omega * F)(x)\|_c \leq \|\mathcal{H}_\omega\| \|F(x)\|_c \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega^2} \sum_{0 \leq k \leq m} \|a_k\|_c \|x\|_c^k \leq \frac{a_*}{\omega^2} \cdot \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1},$$

имеет по условию хотя бы одно положительное решение.

Таким образом, выполнены все условия принципа неподвижной точки Шаудера [2], откуда следует разрешимость уравнения (6) или, что то же, интегрального уравнения (4).

В банаховом пространстве $C^2[0,T]$ дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций выделим линейное многообразие $\tilde{C}$, функции которого удовлетворяют граничным условиям (2).

Теорема 1. Граничная задача (1)—(2) для каждого положительного решения r неравенства (5) имеет по крайней мере одно решение $x_\omega(t) \in \bar{S}(\theta, r) \cap \tilde{C}$.

Доказательство. Согласно лемме 2 достаточно показать, что всякое решение интегрального уравнения (4) является решением задачи (1)—(2). В самом деле, пусть $x_\omega(t)$ — решение интегрального уравнения (4). Тогда, замечая, что

$$\dot{l}_\pm(t) = \omega l_\mp(t) \text{ 8 } \dot{l}_+(0) = 0 = l_-(T),$$

из (4) будем иметь

$$\dot{x}_\omega(t) = -\frac{1}{l_-(0)}(l_-(t)\int_0^t (\omega s) f(s, x_\omega(s))ds +$$

$$+(\omega t)\int_t^T l_+(s) f(s, x_\omega(s))ds).$$

Отсюда следует, что $\dot{x}_\omega(0) = 0 = \dot{x}_\omega(T)$. Далее,

$$\ddot{x}_\omega(t) = -\frac{1}{l_-(0)}(\omega l_+(t)\int_0^t (\omega s) f(s, x_\omega(s))ds +$$

$$+\omega(\omega t)\int_t^T l_+(s) f(s, x_\omega(s))ds + ((\omega t) l_-(t) -$$

$$-(\omega t) l_+(t)) f(t, x_\omega(t))) = \omega^2 x_\omega(t) - f(t, x_\omega(t)),$$

что и завершает доказательство.

В упоминавшейся выше работе [1] исследовался частный случай задачи (1)—(2), когда $f(t,x) = (1 + \sin t)x^2, 0 \leq t \leq \pi, \dot{x}(0) = 0 = \dot{x}(\pi)$, и была установлена ее разрешимость для $\omega > 0$. Из рассуждений леммы 2 и теоремы 1 следует, что в этом частном случае разрешимость будет иметь место при любом ненулевом значении параметра ω, а для нормы решения $x_\omega(t)$ верна оценка: $\|x_\omega\|_c \leq \omega^2 / 2$.

Вернемся к нелинейному интегральному уравнению (4).

Теорема 2. Если скалярное уравнение

$$u - \|\mathcal{H}_\omega\| \left(\|a_0\|_c + \sum_{1 \leq k \leq m} \|a_k\|_c u^k \right) = 0 \qquad (7)$$

имеет два различных положительных корня, то уравнение (4) однозначно разрешимо.

Доказательство. Если через u_* обозначить меньший из корней уравнения (7), то из неравенства

$$\|(\mathcal{H}_\omega * F)(x)\|_c \leq \|\mathcal{H}_\omega\| \left(\|a_0\|_c + \sum_{1 \leq k \leq m} \|a_k\|_c u_*^k \right)$$

следует, что оператор $\mathcal{H}_\omega * F$ переводит шар $\bar{S}(\theta, u_*)$ пространства $C[0,T]$ в себя.

Далее, так как функция

$$\varphi(u) = \|\mathcal{H}_\omega\| \left(\|a_0\|_c + \sum_{1 \leq k \leq m} \|a_k\|_c u^k \right)$$

выпукла на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, то с учетом условия теоремы получаем неравенство

$$0 < \frac{d\varphi}{du}\Big|_{u=u_*} < 1.$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{H}_\omega * F$ на шаре $\bar{S}(\theta, u_*)$ является сжимающим, поскольку

$$\|(\mathcal{H}_\omega * F)(x) - (\mathcal{H}_\omega * F)(y)\|_c \leq \varphi'(u_*) \|x - y\|_c$$

для произвольных $x, y \in \bar{S}(\theta, u_*)$.

Справедливость утверждения теоремы очевидным образом следует теперь из принципа сжимающих отображений.

Стандартными рассуждениями можно показать, что всякое решение задачи (1)—(2) является решением интегрального уравнения (4), так что в условиях теоремы 2 эта задача однозначно разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Torres P.J.* Some remarks on a Neumann boundary value problem arising in fluid dynamics // ANZIAM J. — 2004. —V. 45, № 3. — P. 327—332.

2. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 2002. — 488 с.