УДК 517.956

О СХОДИМОСТИ ПОЛУДИСКРЕТНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА*

Е. В. Шепилова

Воронежский государственный университет

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается линейная задача типа Шредингера в вариационной форме. Проводится дискретизация задачи по пространству методом Галеркина. Устанавливается сходимость в различных нормах приближенных решений к точному решению и получены оценки скорости сходимости.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство симметричных полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Предположим, что для всех $u, v \in V$ функция $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и для $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$| a(t,u,v) | \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad a(t,u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Кроме того, почти всюду на $[0,T]$

$$| \partial a(t,u,v) / \partial t | \le M_2 \|u\|_V \|v\|_V. \quad (2)$$

Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = (A(t)u, v)$ и $\|A(t)\|_{V \to V'} \le M_1$. Здесь под выражением (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Кроме того, если $z \in H$, то выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в H.

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + iA(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0 \in V. \quad (3)$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

Вопрос о существовании и единственности решения задачи (3), при различных предположениях на u^0 и f, рассматривался в [1] и [2].

Определим приближенную задачу. Пусть V_h — конечномерное подпространство V. Функцию $u_h(t)$, определенную на $[0,T]$ со значениями в V_h, назовем приближенным решением задачи (3), если для всех $v_h \in V_h$ почти при всех $t \in [0,T]$ выполнено

$$(u_h'(t), v_h) + ia(t, u_h(t), v_h) = (f(t), v_h). \quad (4)$$

Считаем, что элементы $u_h(0) = u_h^0 \in V_h$.

Пусть P_h — ортогональный проектор в пространстве H на V_h. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\| u_h \|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|_V = 1} | (u_h, v_h) |.$$

Оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_h : V' \to V_h'$ [3].

Запишем (4) в операторном виде

$$u_h'(t) + i\bar{P}_h A(t) u_h(t) = \bar{P}_h f(t). \quad (5)$$

Далее определим для $t \in [0,T]$ гильбертовы пространства $V(t) = \{u, v \in V \mid (u,v)_{V(t)} = a(t,u,v)\}$. Рассмотрим $Q_h(t)$ — ортогональный проектор в пространстве $V(t)$ на V_h. Заметим, что для $u \in V, v_h \in V_h$ верно, что $a(t,u,v_h) = a(t, Q_h(t)u, v_h)$. Тогда для любого $u \in V$

$$\bar{P}_h A(t) u = \bar{P}_h A(t) Q_h(t) u. \quad (6)$$

Известно [4], что $Q_h(t)$ имеет производную $Q_h'(t)$ и справедливы оценки для любого $u \in V$

$$\|[I - Q_h(t)]u\|_V \le r_1 \|[I - Q_h]u\|_V, \quad (7)$$

$$\|Q_h'(t)u\|_V \le r_2 \|[I - Q_h]u\|_V, \quad (8)$$

где Q_h — ортогональный проектор в пространстве V на V_h, а r_1 и r_2 не зависят от h. Отметим, что неравенство (7), в котором справа и слева записаны разные операторы, справедливо в силу эквивалентности норм в V и $V(t)$ (это следует из (1)).

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ В НОРМЕ $C([0,T],H)$

Теорема 1. *Пусть функция $f \in L_2(0,T,H)$ и $u(t)$ — решение задачи (3) такое, что $u' \in L_2(0,T,V)$. Пусть $u_k(t)$ — решение приближенной задачи (4), где $u_h^0 = P_h u^0$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \le c_1 \max_{0 \le t \le T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_H^2 + c_2 \int_0^T (\|[I - Q_h]u(t)\|_V^2 + \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|_H^2) dt. \quad (9)$$

* Работа выполнена при содействии РФФИ, проект № 04-01-00141.

Доказательство. Обозначим $w_h(t) = Q_h(t)u(t)$, где $u(t)$ — решение задачи (3). Рассмотрим равенство

$$w_h'(t) + i\bar{P}_h A(t) w_h(t) = w_h'(t) + P_h f(t) - \bar{P}_h u'(t), \quad (10)$$

которое справедливо в силу предположения на u', и получается применением оператора $\bar{P}_h$ к (3) с использованием свойства (6). Вычтем (5) из (10) и рассмотрим тождество

$$\begin{aligned}[][w_h(t) - u_h(t)]' + i\bar{P}_h A(t)[w_h(t) - u_h(t)] = \\ = w_h'(t) - \bar{P}_h u'(t).\end{aligned} \quad (11)$$

В [1] была получена оценка

$$\|u_h(t)\|_H^2 \le K_1 \left\{ \|u_h^0\|_H^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt \right\}, \quad (12)$$

где $u(t)$ — решение приближенной задачи (4). Применяя (12) к (11), оценим

$$\begin{aligned}\|w_h(t) - u_h(t)\|_H^2 &\le K_1 \|w_h(0) - u_h^0\|_H^2 + \\ &+ K_1 \int_0^T \|w_h'(t) - \bar{P}_h u'(t)\|_H^2 \, dt = \\ &= K_1 \|Q_h(0)u^0 - u_h^0\|_H^2 + \\ &+ K_1 \int_0^T \|Q_h'(t)u(t) + Q_h(t)u'(t) - \bar{P}_h u'(t)\|_H^2 \, dt \le \\ &\le K_1 \|Q_h(0)u^0 - u_h^0\|_H^2 + 2K_1 \int_0^T \|Q_h'(t)u(t)\|_H^2 \, dt + \\ &+ 2K_1 \int_0^T \|[Q_h(t) - \bar{P}_h]u'(t)\|_H^2 \, dt.\end{aligned}$$

Учитывая (8), продолжим оценку

$$\begin{aligned}\|w_h(t) - u_h(t)\|_H^2 &\le K_1 \|Q_h(0)u^0 - u_h^0\|_H^2 + \\ &+ c_1 \int_0^T \|[I - Q_h]u(t)\|_V^2 \, dt + \\ &+ 2K_1 \int_0^T \|P_h(Q_h(t) - I)u'(t)\|_H^2 \, dt \le \\ &\le K_2 \left\{ \|Q_h(0)u^0 - u_h^0\|_H^2 + \right. \\ &\left. + \int_0^T \|[I - Q_h]u(t)\|_V^2 \, dt \right\} + \\ &+ K_2 \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|_H^2 \, dt.\end{aligned} \quad (13)$$

С помощью (13) получим оценку погрешности

$$\begin{aligned}\|u(t) - u_h(t)\|_H^2 &\le 2\|u(t) - w_h(t)\|_H^2 + \\ + 2\|w_h(t) - u_h(t)\|_H^2 &\le K_3 \{ \|Q_h(0)u^0 - P_h u^0\|_H^2 + \\ &+ \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_H^2 + \\ + \int_0^T \Big(\|[I - Q_h]u(t)\|_V^2 &+ \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|_H^2 \Big) dt \}.\end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\|Q_h(0)u^0 - P_h u^0\|_H &\le \|u^0 - Q_h(0)u^0\|_H \le \\ &\le \max_{0 \le t \le T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_H .\end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, учитывая (15), из (14) следует необходимая нам оценка (9).

Для получения сходимости погрешности к нулю предположим, что задана последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$ — предельно плотная в V т., е. $\|[I - Q_h]v\| \to 0$ при $h \to 0$ для всех $v \in V$. Тогда непосредственно из теоремы 1 получим

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть* $\{V_h\}$ *предельно плотная в* V *последовательность подпространств. Тогда при* $h \to 0$

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t) - u_h(t)\|_H \to 0.$$

Определим множество

$$D[A(t)] = \{ v \in V \mid A(t)v \in H \}. \quad (16)$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D[A(t)] \subset E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ [1]. Потребуем от оператора $A(t)$ выполнение следующего естественного свойства: существует $\gamma > 0$, что для $t \in [0, T]$

$$\|u\|_E \le \gamma \|A(t)u\|_H, \quad u \in D[A(t)]. \quad (17)$$

В приложениях в качестве оператора $A(t)$ можно брать симметричный эллиптический оператор второго порядка в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей, порожденный дифференциальным выражением второго порядка и первым краевым условием. Тогда $H = L_2(\Omega), V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), V' = W_2^{-1}(\Omega), E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задано третье краевое условие, то $H = L_2(\Omega), V = W_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega)$.

Предположим теперь, что семейство конечномерных подпространств $V_h \subset V$ обладает следующим аппроксимационным свойством

$$\|[I - Q_h]v\|_V \le ch\|v\|_E, \quad (18)$$

для всех $v \in E$. Заметим, что условие (18) типично для подпространств V_h типа «конечных элементов».

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* (18). *Пусть дополнительно решение задачи* (3) $u \in L_2(0, T, E)$. *Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2 \le \le ch^2\left\{\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_V^2+\int_0^T\left(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_V^2\right)dt\right\}. \quad (19)$$

Доказательство. Необходимая нам оценка следует из (9), (18) и оценки

$$\|[I-Q_h(t)]u\|_H \le M_1\alpha r_1 h\,\|[I-Q_h]u\|_V\,, \quad (20)$$

для всех $u\in V$ из [5].

Далее покажем, что можно освободиться от условия $u'\in L_2(0,T,V)$. Для этого наложим на подпространства V_h дополнительные требования.

Теорема 2. *Пусть функция f такая, что* $f\in L_2(0,T,H)$ *и существует* $f'\in L_2(0,T,V')$. *Пусть* $\{V_h\}$ *последовательность конечномерных подпространств такая, что* $\|P_h\|_{V\to V}$ *равномерно по h ограничены. Пусть также в задаче* (4) $u_h^0=P_hu^0$. *Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2 \le \|u^0-P_hu^0\|_H^2 + +cK(u_0,f)\left(\int_0^T\|[I-Q_h]u(t)\|_V^2\,dt\right)^{1/2}, \quad (21)$$

где

$$K^2(u_0,f)=\|u^0\|_V^2+\int_0^T\left(\|f(t)\|_H^2+\|f'(t)\|_{V'}^2\right)dt.$$

Доказательство. Пусть u и u_h — решения задач (3) и (4) соответственно. Тогда для всех $v_h\in V_h$

$$(u'(t),v_h)+ia(t,u(t),v_h)=(f(t),v_h), \quad (22)$$

$$(u_h'(t),v_h)+ia(t,u_h(t),v_h)=(f(t),v_h). \quad (23)$$

Вычтем (23) из (22) и возьмем $v_h=Q_h(t)u-$ $-u_h\in V_h$, тогда

$$([u(t)-u_h(t)]',Q_h(t)u(t)-u_h(t))+ +ia(t,u(t)-u_h(t),Q_h(t)u(t)-u_h(t))=0. \quad (24)$$

Выражение (24) преобразуем к виду

$$(u'(t)-u_h'(t),u(t)-u_h(t)) +ia(t,Q_h(t)u(t)-u_h(t),Q_h(t)u(t)-u_h(t))= =(u'(t)-u_h'(t),u(t)-Q_h(t)u(t)). \quad (25)$$

От (25) возьмем удвоенную вещественную часть и проинтегрируем от 0 до t

$$\|u(t)-u_h(t)\|_H^2=\|u^0-u_h^0\|_H^2 +2\int_0^t(u'(s)-u_h'(s),u(s)-Q_h(s)u(s))ds. \quad (26)$$

Из (26) следует

$$\|u(t)-u_h(t)\|_H^2\le\|u^0-u_h^0\|_H^2+ +\left(\int_0^T\|u'(t)-u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt\right)^{1/2}\times \times\left(\int_0^T\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_V^2)dt\right)^{1/2}. \quad (27)$$

Из (5) получим оценку для $\|u_h'(t)\|_{V'}$, воспользовавшись предположением о равномерной ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$ и оценкой $\|\bar P_h\|_{V'\to V'}\le\|P_h\|_{V\to V}\le c.$

$$\|u_h'(t)\|_{V'}\le\|\bar P_hA(t)u_h(t)\|_{V'}+\|P_hf(t)\|_{V'}\le \le c\,\|A(t)u_h(t)\|_{V'}+c\,\|f(t)\|_H\le \le c_1\|u_h(t)\|_V+c_2\|f(t)\|_H\,. \quad (28)$$

Из (28) и оценки $\int_0^T\|u_h(t)\|_V^2\,dt$ в [2] запишем

$$\int_0^T\|u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt\le c(\|P_hu^0\|_V^2+ +\int_0^T\left(\|f(t)\|_H^2+\|f'(t)\|_{V'}^2\right)dt)\le cK^2(u_0,f). \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27) и учитывая оценку $\int_0^T\|u'(t)\|_{V'}^2\,dt$ из [2], получим

$$\|u(t)-u_h(t)\|_H^2\le\|u^0-P_hu^0\|_H^2+ +cK(u_0,f)\left(\int_0^T\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_V^2\,dt\right)^{1/2}. \quad (30)$$

Таким образом, из (7) и (30) следует необходимая нам оценка (21).

Заметим, что для подпространств V_h типа «конечных элементов» условие равномерной ограниченности по h операторов $\|P_h\|_{V\to V}$ означает равномерное разбиение области изменения пространственных переменных.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть* $\{V_h\}$ *предельно плотная в V при* $h\to0$ *последовательность конечномерных подпространств. Тогда при* $h\to0$

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_H\to0.$$

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть выполнено условие* (18) *и* $u\in L_2(0,T,E)$, *тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2\le c_1h^2\|u^0\|_V^2+ +c_2hK(u_0,f)\left(\int_0^T\|u(t)\|_E^2)dt\right)^{1/2}. \quad (31)$$

Далее покажем, что если потребовать выполнение дополнительных условий, то порядок по h можно увеличить.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2. При этом в задаче* (4) $u_h^0=Q_h(0)u^0$. *Дополнительно предположим, что* $\partial a(t,u,v)/\partial t$ *— абсолютно непрерывна, а* $\partial^2a(t,u,v)/\partial t^2$ *такая, что*

$$\left|\partial^2a(t,u,v)/\partial t^2\right|\le M_3\|u\|_V\|v\|_V\,. \quad (32)$$

Пусть функция f такая, что $f' \in L_2(0,T,H)$, $f'' \in L_2(0,T,V')$ *и* $f(0) \in V$. *Считаем, что* $A(0)u^0 \in V$. *Пусть выполнены условия (17) и (18), и решение* $u \in L_1(0,T,E)$. *Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T} \left\|u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 \le c_1 h^2 \left\|u^0\right\|_V^2 + +c_2 h^2 M(u_0, f)\int_0^T \left\|u(t)\right\|_E dt, \tag{33}$$

где

$$M^2(u_0, f) = \left\|u^0\right\|_V^2 + \left\|f(0)\right\|_V^2 + \left\|A(0)u^0\right\|_V^2 + +\int_0^T (\left\|f(t)\right\|_H^2 + \left\|f'(t)\right\|_H^2 + \left\|f''(t)\right\|_{V'}^2)dt.$$

Доказательство. Из (26) следует, что

$$\left\|u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 \le \left\|u^0 - Q_h(0)u^0\right\|_H^2 + +2\int_0^t \left\|u'(s) - u_h'(s)\right\|_H \left\|[I - Q_h(s)]u(s)\right\|_H ds \le$$

$$\le \left\|u^0 - Q_h(0)u^0\right\|_H^2 + +2c\int_0^T (\left\|u'(t)\right\|_H + \left\|u_h'(t)\right\|_H) \left\|[I - Q_h(t)]u(t)\right\|_H dt.$$

Заметим, что в [2] была получена оценка

$$\left\|u_h'(t)\right\|_H^2 \le c(\left\|u^0\right\|_V^2 + \left\|f(0)\right\|_V^2 + \left\|A(0)u^0\right\|_V^2 + +\int_0^T (\left\|f(t)\right\|_H^2 + \left\|f'(t)\right\|_H^2 + +\left\|f''(t)\right\|_{V'}^2)dt) = cM^2(u_0, f). \tag{34}$$

Учитывая (34), получим

$$\left\|u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 \le \left\|u^0 - Q_h(0)u^0\right\|_H^2 + +cM(u_0, f)\int_0^T \left\|[I - Q_h(t)]u(t)\right\|_H dt \le \tag{35}$$

$$\le c_1 h^2 \left\|u^0\right\|_V^2 + c_2 M(u_0, f)\int_0^T \left\|[I - Q_h(t)]u(t)\right\|_H dt.$$

Таким образом, из (35), (18) и (17) следует оценка погрешности (33).

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ В НОРМЕ $C([0,T],V)$.

Лемма 1. *Пусть* $a(t,u,v)$ *удовлетворяет свойствам* (1), (2). *Пусть* $\partial a(t,u,v)/\partial t$ *— абсолютно непрерывна, а* $\partial^2 a(t,u,v)/\partial t^2$ *удовлетворяет условию* (32). *Тогда для всех* $u \in V$ *функция* $t \to Q_h'(t)u \in V_h$ *абсолютно непрерывна и при почти всех* $t \in [0,T]$ *справедлива оценка*

$$\left\|Q_h''(t)u\right\|_V \le c\left\|[I - Q_h]u\right\|_V . \tag{36}$$

Кроме того, для $u \in V, v_h \in V_h$ *выполнено тождество*

$$a(t, Q_h''(t)u, v_h) = = a_2(t, [I - Q_h(t)]u, v_h) - 2a_1(t, Q_h'(t)u, v_h), \tag{37}$$

где

$$a_1(t,u,v) = \partial a(t,u,v)/\partial t, a_2(t,u,v) = \partial^2 a(t,u,v)/\partial t^2.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что функция $t \to Q_h'(t)u \in V_h$ удовлетворяет условию Липшица по $t \in [0,T]$. Для $t, t+\Delta t \in [0,T]$ обозначим $z_h = Q_h'(t+\Delta t)u - Q_h'(t)u \in V_h$. Далее заметим, что

$$\delta\left\|z_h\right\|_V^2 \le a(t+\Delta t, z_h, z_h) =$$
$$= a(t+\Delta t, Q_h'(t+\Delta t)u, z_h) - a(t, Q_h'(t)u, z_h) =$$
$$= a_1(t+\Delta t, [I - Q_h(t+\Delta t)]u, z_h) -$$
$$-a_1(t, [I - Q_h(t)]u, z_h) = \{a_1(t+\Delta t, u, z_h) -$$
$$-a_1(t, u, z_h)\} + \{a_1(t, Q_h(t)u, z_h) -$$
$$-a_1(t+\Delta t, Q_h(t+\Delta t)u, z_h)\} \le$$
$$\le |\Delta t| M_2 \left\|u\right\|_V \left\|z_h\right\|_V + \{a_1(t, Q_h(t)u, z_h) -$$
$$-a_1(t, Q_h(t+\Delta t)u, z_h)\} +$$
$$+\{a_1(t, Q_h(t+\Delta t)u, z_h) -$$
$$-a_1(t+\Delta t, Q_h(t+\Delta t)u, z_h)\} \le$$
$$\le |\Delta t| M_2 \left\|u\right\|_V \left\|z_h\right\|_V +$$
$$+M_2 \left\|[Q_h(t+\Delta t) - Q_h(t)]u\right\|_V \left\|z_h\right\|_V +$$
$$+|\Delta t| M_2 \left\|Q_h(t+\Delta t)u\right\|_V \left\|z_h\right\|_V \le$$
$$\le |\Delta t| M_2\{\left\|u\right\|_V + \delta^{-3/2}M_1^{1/2}M_2 \left\|[I - Q_h]u\right\|_V +$$
$$+\left\|Q_h(t+\Delta t)u\right\|_V\}\left\|z_h\right\|_V .$$

Таким образом, получим оценку

$$\left\|z_h\right\|_V \le 2\delta^{-1}M_2\{\left\|u\right\|_V + +\delta^{-3/2}M_1^{1/2}M_2 \left\|[I - Q_h]u\right\|_V\} |\Delta t| . \tag{38}$$

Так как пространство V_h конечномерно, то из (38) следует абсолютная непрерывность функции $t \to Q_h'(t)u \in V_h$, но тогда она почти всюду на $[0,T]$ дифференцируема.

Далее установим соотношение (37). Заметим, что для произвольного элемента $v_h \in V_h$ верно равенство

$$a(t, [I - Q_h(t)]u, v_h) = 0. \tag{39}$$

Дифференцируя (39) почти всюду по $t \in [0,T]$ два раза, получим

$$a_1(t, Q_h'(t)u, v_h) + a(t, Q_h''(t)u, v_h) = = a_2(t, [I - Q_h(t)]u, v_h) + a_1(t, [I - Q_h(t)]'u, v_h).$$

Из последнего равенства и вытекает соотношение (37).

Возьмем $v_h = Q_h''(t)u \in V_h$ и оценим (37) следующим образом

$$\delta\left\|Q_h''(t)u\right\|_V^2 \le M_3\left\|[I-Q_h(t)]u\right\|_V\left\|Q_h''(t)u\right\|_V + +2M_2\left\|Q_h'(t)u\right\|_V\left\|Q_h''(t)u\right\|_V.$$

Учитывая (7) и (8), из последнего неравенства и получим оценку (36)

$$\left\|Q_h''(t)u\right\|_V \le c\left\|[I-Q_h]u\right\|_V.$$

Теорема 3. *Пусть f такая, что $f \in L_2(0,T,H)$ и $f' \in L_2(0,T,V')$. Пусть $u(t)$ — решение задачи (3) такое, что $u'' \in L_2(0,T,V)$. Пусть $u_h(t)$ — решение приближенной задачи (4), где $u_h^0 = Q_h u^0$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le c_1\max_{0\le t\le T}\left\|[I-Q_h(t)]u(t)\right\|_V^2 + +c_2\int_0^T(\left\|[I-Q_h]u(t)\right\|_V^2+\left\|[I-Q_h]u'(t)\right\|_V^2 + +\left\|[I-Q_h(t)]u''(t)\right\|_H^2)dt. \tag{40}$$

Доказательство. Определим $w_h(t) = Q_h(t)u(t)$, где $u(t)$ — решение задачи (3). К равенству (11) применим оценку из [2]

$$\left\|u_h(t)\right\|_V^2 \le K\left\{\left\|u_h^0\right\|_V^2+\int_0^T(\left\|f(t)\right\|_H^2+\left\|f'(t)\right\|_{V'}^2)dt\right\},$$

где $u_h(t)$ — решение приближенной задачи (4).

$$\left\|w_h(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le K\left\|w_h(0)-u_h^0\right\|_V^2 + +K\int_0^T(\left\|w_h'(t)-\bar{P}_h u'(t)\right\|_H^2 + +\left\|[w_h'(t)-\bar{P}_h u'(t)]'\right\|_{V'}^2)dt. \tag{41}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (41).

$$\left\|w_h(0)-u_h^0\right\|_V \le \left\|Q_h(0)u^0-Q_hu^0\right\|_V \le \le\left\|[I-Q_h(0)]u^0\right\|_V. \tag{42}$$

$$\int_0^T\left\|w_h'(t)-\bar{P}_h u'(t)\right\|_H^2dt \le \int_0^T\left\|Q_h'(t)u(t)+ +Q_h(t)u'(t)-\bar{P}_h u'(t)\right\|_H^2dt \le \le\int_0^T\left\|Q_h'(t)u(t)\right\|_H^2dt+\int_0^T\left\|[Q_h(t)-\bar{P}_h]u'(t)\right\|_H^2dt \le \le M\int_0^T\left\|[I-Q_h]u(t)\right\|_V^2dt+\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u'(t)\right\|_H^2dt, \tag{43}$$

где последняя оценка получена с помощью (8).

Остается рассмотреть второе подынтегральное слагаемое.

$$\int_0^T\left\|[w_h'(t)-\bar{P}_h u'(t)]'\right\|_{V'}^2dt =$$

$$=\int_0^T\left\|[(Q_h(t)u(t))'-\bar{P}_h u'(t)]'\right\|_{V'}^2dt \le$$

$$\le\int_0^T\left\|Q_h''(t)u(t)\right\|_{V'}^2dt+2\int_0^T\left\|Q_h'(t)u'(t)\right\|_{V'}^2dt +$$

$$+\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u''(t)\right\|_{V'}^2dt.$$

Продолжим оценку, учитывая (36) и (8)

$$\int_0^T\left\|[w_h'(t)-\bar{P}_h u'(t)]'\right\|_{V'}^2dt \le \le c_1\int_0^T\left\|[I-Q_h]u(t)\right\|_V^2dt + +c_2\int_0^T\left\|[I-Q_h]u'(t)\right\|_V^2dt + +c_3\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u''(t)\right\|_H^2dt. \tag{44}$$

Подставим (42), (43) и (44) в (41),

$$\left\|w_h(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le c\{\left\|[I-Q_h(0)]u^0\right\|_V^2 + +\int_0^T\left\|[I-Q_h]u(t)\right\|_V^2dt+\int_0^T\left\|[I-Q_h]u'(t)\right\|_V^2dt + +\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u''(t)\right\|_H^2dt\}. \tag{45}$$

Теперь посчитаем погрешность, учитывая (45),

$$\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le 2\left\|u(t)-w_h(t)\right\|_V^2 + +2\left\|w_h(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le 2\left\|[I-Q_h(t)]u(t)\right\|_V^2 + +2\left\|w_h(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le c\{\left\|[I-Q_h(0)]u^0\right\|_V^2 + +\left\|[I-Q_h(t)]u(t)\right\|_V^2+\int_0^T(\left\|[I-Q_h]u(t)\right\|_V^2 + +\left\|[I-Q_h]u'(t)\right\|_V^2+\left\|[I-Q_h(t)]u''(t)\right\|_H^2)dt\}. \tag{46}$$

Таким образом, из (46) следует необходимая нам оценка (40).

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в V при $h\to 0$ последовательность конечномерных подпространств. Тогда при $h\to 0$*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V \to 0.$$

Следствие 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть семейство V_h обладает аппроксимационным свойством* (18). *Пусть $u(t)$ такое, что $u' \in L_2(0,T,E)$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2 \le ch^2\{\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_E^2 + +\int_0^T(\left\|u(t)\right\|_E^2+\left\|u'(t)\right\|_E^2+\left\|u''(t)\right\|_V^2)dt\}. \tag{47}$$

Доказательство. Необходимая нам оценка следует из (40), (18) и оценки (20).

Как и ранее, теперь рассмотрим случай, когда можно ослабить условие на гладкость решения $u(t)$, но при этом потребуем дополнительное предположение на последовательность $\{V_h\}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть также форма $a(t,u,v)$, как и в лемме 1, удовлетворяет условию* (32). *Пусть функция f такая, что $f' \in L_2(0,T,H)$, $f'' \in L_2(0,T,V')$ и $f(0) \in V$. Считаем, что*

$A(0)u^0 \in V$. *Пусть* $u_h(t)$ *— решение задачи* (4) *с* $u_h^0 = Q_h(0)u^0$. *Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \le c\{\max_{0\le t\le T}\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_V^2 + +M(u_0,f)\max_{0\le t\le T}\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H + +(M^3(u_0,f)\int_0^T \|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H\,dt)^{1/2}\}. \quad (48)$$

Доказательство. В равенстве (24) воспользуемся свойством (6). Запишем полученное выражение в виде

$$|\,ia(t,Q_h(t)u(t)-u_h(t),Q_h(t)u(t)-u_h(t))\,| = =|-([u(t)-u_h(t)]',Q_h(t)u(t)-u_h(t))\,|.$$

Учитывая (1), оценим последнее тождество.

$$\alpha\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_V^2 \le \le \|u'(t)-u_h'(t)\|_H\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_H \le \le(\|u'(t)\|_H+\|u_h'(t)\|_H)\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_H. \quad (49)$$

Оценим каждый из сомножителей. Учитывая (34) для первого сомножителя, получим

$$\|u'(t)\|_H+\|u_h'(t)\|_H \le cM(u_0,f). \quad (50)$$

Для второго сомножителя верна оценка

$$\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_H \le \|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H + +\|u(t)-u_h(t)\|_H.$$

Продолжим ее с помощью (35).

$$\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_H \le \|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H + +c_1\|u^0-Q_h(0)u^0\|_H + +c_2(M(u_0,f)\int_0^T\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H\,dt)^{1/2}. \quad (51)$$

Подставим (50) и (51) в (49)

$$\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_V^2 \le \le cM(u_0,f)\{\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H + +\|u^0-Q_h(0)u^0\|_H + +(M(u_0,f)\int_0^T\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H\,dt)^{1/2}\}. \quad (52)$$

Теперь посчитаем погрешность, учитывая (52),

$$\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \le 2\|u(t)-Q_h(t)u(t)\|_V^2 + +2\|Q_h(t)u(t)-u_h(t)\|_V^2 \le 2\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_V^2 + +2cM(u_0,f)\{\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H + +\|u^0-Q_h(0)u^0\|_H + +(M(u_0,f)\int_0^T\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_H\,dt)^{1/2}\}. \quad (53)$$

Таким образом, из (53) следует необходимая нам оценка (48).

Следствие 8. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть* $\{V_h\}$ *— предельно плотная в* V *при* $h\to 0$ *последовательность подпространств. Тогда при* $h\to 0$

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_V \to 0.$$

Следствие 9. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть семейство* V_h *обладает аппроксимационным свойством* (18). *Пусть* $u\in C([0,T],E)$. *Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \le c\{h^2\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E^2 + +h^2M(u_0,f)\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E + +hM^{3/2}(u_0,f)\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E^{1/2}\}. \quad (54)$$

Обратим внимание, что в следствии 9 условия на решение $u(t)$ более слабые, чем в следствии 7.

Автор выражает благодарность В. В. Смагину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

2. *Шепилова Е.В.* О разрешимости вариационной задачи для уравнения типа Шредингера / Е. В. Шепилова // Труды математического факультета. — 2005. — № 9. — С. 114—123.

3. *Вайникко Г.М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1269—1277.

4. *Смагин В.В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галеркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1996. — № 3. — С. 50—57.

5. *Смагин В.В.* Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журнал вычисл. математики и мат. физики. — 2000. — Т. 40. — № 6. — С. 908—919.