УДК 531.38

ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

М. П. Харламов, Е. Г. Шведов

Волгоградская академия государственной службы

Для гамильтоновой системы с тремя свободы, описывающей движения осесимметричного твердого тела с условиями типа Ковалевской в двойном силовом поле, получены явные неравенства, определяющие множество тех значений первых интегралов, при которых критические интегральные многообразия непусты. Результат позволяет провести полную классификацию бифуркационных диаграмм трех первых интегралов в инволюции в терминах их сечений плоскостями постоянной энергии.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой O. Пусть главные моменты инерции в точке O удовлетворяют отношению Ковалевской 2:2:1, а силовое поле порождает момент относительно O вида $\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta}$, где векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ фиксированы в теле и параллельны экваториальной плоскости эллипсоида инерции, а векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ неподвижны в инерциальном пространстве. Как показано в работе [6], без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ образуют ортонормированную пару, и поэтому являются главными ортами инерции в экваториальной плоскости, а векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ взаимно ортогональны. Обозначим $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ и примем триэдр $O\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, в качестве подвижной системы отсчета. Вектор мгновенной угловой скорости обозначим через $\boldsymbol{\omega}$. Переходя к безразмерным величинам, запишем систему уравнений Эйлера—Пуассона

$$\begin{gathered}
2\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3 + \beta_3, \\
2\dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, \dot{\omega}_3 = \alpha_2 - \beta_1, \\
\dot{\alpha}_1 = \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, \dot{\beta}_1 = \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2, \\
\dot{\alpha}_2 = \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, \dot{\beta}_2 = \beta_3\omega_1 - \beta_1\omega_3, \\
\dot{\alpha}_3 = \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, \dot{\beta}_3 = \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Фазовым пространством этой системы является шестимерное многообразие P^6, заданное в пространстве $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ так называемыми геометрическими интегралами

$$\begin{gathered}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = a^2, \ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = b^2, \\
\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

В дальнейшем полагаем, что $a > b > 0$. Тогда система (1), (2) не имеет явных групп симметрий и не сводится процедурой понижения порядка по Раусу к семейству гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Полную интегрируемость по Лиувиллю обеспечивают три интеграла в инволюции

$$\begin{gathered}
H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 12\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2), \\
K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\
G = (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + 12\alpha_3\omega_3)^2 + \\
+(\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + 12\beta_3\omega_3)^2 + \\
+\omega_3(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + 12\gamma_3\omega_3) - \alpha_1 b^2 - \beta_2 a^2.
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь через $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ обозначены компоненты в подвижных осях постоянного в пространстве вектора $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Интеграл K найден О. И. Богоявленским [2], а интеграл G (в более общем случае для гиростата) указан А. Г. Рейманом и М. А. Семеновым-Тян-Шанским [5]. В работах [6], [11] найдено множество критических точек $c(J)$ интегрального отображения $J = H \times K \times G : P^6 \to \mathbf{R}^3$ и указаны уравнения поверхностей в пространстве $R^3(h,k,g)$, несущих в себе бифуркационную диаграмму $\Sigma(J)$ отображения J. Оказалось, что $c(J)$ представимо в виде объединения трех инвариантных подмножеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}$, каждое из которых является почти всюду гладким четырехмерным многообразием и в гладкой части задается в P^6 системой двух инвариантных соотношений в смысле Пуанкаре. Первое множество $\mathfrak{M}$ было ранее указано в [2] как многообразие частной интегрируемости системы (1). Оно совпадает с нулевым уровнем интеграла K. Следовательно, этот класс движений обобщает так называемый 1-й класс Аппельрота [1] движений волчка Ковалевской в поле силы тяжести [4] . Фазовая топология этого случая (без учета интегрируемости системы в целом) изучена Д. Б. Зотьевым [3]. Множество $\mathfrak{N}$ найдено в [7] как обобщение семейства особо замечательных движений 2-го и 3-го классов Аппельрота. Движения на $\mathfrak{N}$ изучались в [10], [9]. Свойства системы, индуцированной на множестве $\mathfrak{O}$ (обобщение 4-го класса Аппельрота), изучались в работе [8]. Относительно бифуркационной диаграммы в работах [6], [11] показано, что

1) $J(\mathfrak{M}) \subset \Sigma_1$, где $\Sigma_1 = \{k = 0\}$;
2) $J(\mathfrak{N}) \subset \Sigma_2$, где $\Sigma_2 = \{(2g - p^2h)^2 - r^4k = 0\}$;
3) $J(\mathfrak{O}) \subset (\Sigma_3 \cup \Sigma_4)$, где Σ_3 — пара прямых

$$g = \pm abh, \ \ k = (a \mp b)^2, \tag{4}$$

а Σ_4 — поверхность $\mathfrak{D}$ кратных корней многочлена $\psi(s) = s^2(s-h)^2 + (p^2 - k)s^2 - 2gs + \gamma^2$, который при исчезновении второго силового поля обращается в резольвенту Эйлера второго многочлена Ковалевской. Здесь введены положительные параметры $p, r, \gamma : p^2 = a^2 + b^2$, $r^2 = a^2 - b^2, \gamma = ab$. Уравнение дискриминантной поверхности $\mathfrak{D}$ в форме $D(h,k,g) = 0$ неразрешимо явно относительно какой-либо из переменных h,k,g. Для дальнейшего удобно считать h и s независимыми параметрами на $\mathfrak{D}$. Тогда система $\psi(s) = 0, \psi'(s) = 0$ дает зависимости g, k от s, h на $\mathfrak{D}$:

$$\begin{gathered} g = s^2(h - s) + \frac{\gamma^2}{s}, \\ k = 3s^2 - 4hs + h^2 + p^2 - \frac{\gamma^2}{s^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

В работе [11] сформулирована задача полного описания бифуркационной диаграммы $\Sigma = \Sigma(J)$ путем нахождения условий на постоянные первых интегралов, определяющих Σ в объединении $\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$. Точки множества $\Sigma \cap \Sigma_i$ будем для краткости называть допустимыми точками листа Σ_i. Предложено искать решение задачи на сечениях бифуркационной диаграммы плоскостями, параллельными плоскости Ogk, выбирая тем самым значение энергии h в качестве параметра, что фактически соответствует исследованию бифуркационных диаграмм Σ_h пары интегралов G, K на изоэнергетических уровнях $E_h = \{\zeta \in P^6 : H(\zeta) = h\}$. Намечен следующий подход к решению поставленной задачи. Представим множество критических точек $c(J)$ как объединение $\mathfrak{C}^{(0)} \cup \mathfrak{C}^{(1)} \cup \mathfrak{C}^{(2)}$, где $\mathfrak{C}^{(i)} = \{\zeta \in c(J) : \operatorname{rank} J(\zeta) = i\}$. Тогда Σ можно рассматривать как двумерный клеточный комплекс; объединение $\Sigma^{(i)}$ клеток размерности $i (i \le 2)$ совпадает с $J(\mathfrak{C}^{(i)})$. Очевидно, что $\partial\Sigma^{(2)} \subset \Sigma^{(0)} \cup \Sigma^{(1)}$, $\partial\Sigma^{(1)} \subset \Sigma^{(0)}$. Таким образом, фактические граничные точки допустимых множеств на листах Σ_i, т. е. такие точки Σ_i, через которые бифуркационная диаграмма не может быть гладко продолжена в рассматриваемом листе или на другой лист, касающийся его в данной точке, содержатся в образе множества $\{\zeta \in c(J) : \operatorname{rank} J(\zeta) < 2\}$. Поэтому для того чтобы получить граничные условия для $\Sigma \subset \Sigma$, необходимо указать все траектории в фазовом пространстве задачи, на которых ранг интегрального отображения падает более, чем на единицу, т. е. $\operatorname{rank} J = 0$ или $\operatorname{rank} J = 1$. Ниже найдены все такие движения и, путем рассмотрения их образов на листах поверхности $\tilde{\Sigma}$, получены явные неравенства, определяющие бифуркационную диаграмму.

2. СЛУЧАИ СИЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Отметим следующие факты, имеющие место для произвольного осесимметричного тела, вращающегося в двух независимых постоянных полях с центрами приложения в экваториальной плоскости.

Предложение 1 ([12]). *При условии $a \ne b$ уравнения движения тела на совместном уровне геометрических интегралов имеют ровно четыре положения равновесия $c_j (j = 0,1,2,3)$:*

$$c_0 : \boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\alpha} = e_1, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_2; H(c_0) = -a - b;$$
$$c_1 : \boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\alpha} = e_1, \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{e}_2; H(c_1) = -a + b;$$
$$c_2 : \boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\alpha} = -e_1, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_2; H(c_2) = a - b;$$
$$c_3 : \boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\alpha} = -e_1, \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{e}_2; H(c_3) = a + b.$$

При этом индекс Морса энергии H в точке c_j равен j. В частности, все изоэнергетические многообразия связны.

Свойство связности изоэнергетических уровней оказывается весьма полезным при глобальном исследовании областей существования произвольных (не обязательно критических движений), так как тогда любая функция при фиксированной энергии принимает все значения от наименьшего до наибольшего, а эти последние устанавливаются ниже.

Предложение 1 ([11]). *Уравнения движения тела на совместном уровне геометрических интегралов* (2) *допускают следующие семейства решений маятникового типа:*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha} \equiv \pm a\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\beta} = b(\mathbf{e}_2 \cos\theta - \mathbf{e}_3 \sin\theta), \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} e_1, \\ 2\ddot{\theta} = -b\sin\theta; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1 \cos\theta + \mathbf{e}_3 \sin\theta), \boldsymbol{\beta} \equiv \pm b\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\omega} = \theta^{\cdot} e_2, \quad 2\theta^{\cdot\cdot} = -a\sin\theta; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1 \cos\theta - \mathbf{e}_2 \sin\theta), \\ \boldsymbol{\beta} = \pm b(\mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_2 \cos\theta), \\ \boldsymbol{\omega} = \theta^{\cdot}\mathbf{e}_3,; \theta^{\cdot\cdot} = -(a \pm b)\sin\theta. \end{gathered} \tag{8}$$

Вернемся к обобщенному волчку Ковалевской. Напомним, что $\mathfrak{M} = \{K = 0\} \subset P^6$ и $J(\mathfrak{M}) = \Sigma_1 \cap \Sigma$. Обозначим $M = p^2H - 2G : P^6 \to \mathbf{R}$, $M^{(1)} = M|_{\mathfrak{M}}, H^{(1)} = H|_{\mathfrak{M}}$. Известно [3], что

$$p^2H - 2G|_{\mathfrak{M}} \equiv \frac{1}{2}F^2, \tag{9}$$

где $F : \mathfrak{M} \to \mathbf{R}$ есть гладкая функция на $\mathfrak{M}$ (частный интеграл О. И. Богоявленского). Его константу обозначим через f. Следующий результат получен Д. Б. Зотьевым.

Предложение 3 ([3]). *Бифуркационная диаграмма отображения* $J^{(1)} = H^{(1)} \times F : \mathfrak{M} \to \mathbf{R}^2$ *есть множество решений уравнения*

$$\begin{gathered} [27f^4 - 9(h^2 - 2p^2)(2hf^2 + r^4) + 2(h^2 - 2p^2)^3]^2 - \\ -4[(h^2 - 2p^2)^2 - 3(2hf^2 + r^4)]^3 = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

в области $\{h \ge -2b\}$. Множество допустимых значений $J^{(1)}$ определяется неравенствами $|f| \le f_0(h), h \ge -2b$, где через $f_0(h)$ обозначен наибольший положительный корень уравнения (10) относительно f.

Вообще говоря, из зависимости функций $H^{(1)}$, F на подмногообразии $\mathfrak{M} \subset P^6$, даже при том, что на $\mathfrak{M}$ всюду $dK \equiv 0$, не следует, что в этих же точках $\operatorname{rank} J = 1$. Однако ниже будет показано, что это действительно так. В следующих утверждениях содержится полное описание множества $\mathfrak{C}^{(0)} \cup \mathfrak{C}^{(1)}$ и его образа в пространстве констант первых интегралов.

Теорема 1. *Ранг отображения J равен нулю в точности в положениях равновесия тела. Все четыре положения равновесия принадлежат* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{O}$. *В частности, их J-образы принадлежат одновременно* Σ_2, Σ_3 *и* Σ_4. *На плоскости* (s,h) *им соответствуют точки*

$$\begin{gathered} Q_{01} = (-a, -(a+b)),\ \ Q_{02} = (-b, -(a+b)); \\ Q_{11} = (-a, -(a-b)),\ \ Q_{12} = (b, -(a-b)); \\ Q_{21} = (a, a-b),\ \ Q_{22} = (b, a-b); \\ Q_{31} = (a, a+b),\ \ Q_{32} = (b, a+b). \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Если ранг отображения J равен нулю, то в такой точке обязательно $dH = 0$. Это имеет место лишь в положениях равновесия соответствующей гамильтоновой системы, т. е. в неподвижных точках системы (1), (2). Они описаны в предложении 1. Непосредственно проверяется, что в этих точках $dG = dK = 0$. Поэтому $\mathfrak{C}^0 = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$. Обозначим $P_j = J(c_j)$. Координаты P_j вычисляются из (3)

$$\begin{gathered} P_0 : h = -(a+b), g = -ab(a+b), k = (a-b)^2; \\ P_1 : h = -(a-b), g = ab(a-b), k = (a+b)^2; \\ P_2 : h = a-b, g = -ab(a-b), k = (a+b)^2; \\ P_3 : h = a+b, g = ab(a+b), k = (a-b)^2 \end{gathered}$$

и, очевидно, удовлетворяют одному из соотношений (4) и уравнению поверхности Σ_2. Подставим эти значения в (5) с тем, чтобы проверить существование решения относительно s. Получим выражения (11). Поэтому $P_j \in \Sigma_4$. Здесь следует отметить, что отображение (5) плоскости (s,h) в Σ_4 не взаимнооднозначно.

Теорема 2. *Траектории, удовлетворяющие условиям* $\operatorname{rank} J = 1$ *и* $dK \ne 0$, *исчерпываются движениями* (6), (7). *Соответствующие значения первых интегралов заполняют лучи*

$$\begin{gathered} \lambda_1 : g = a^2h + ar^2, h \ge -(a+b); \\ \lambda_2 : g = a^2h - ar^2, h \ge a-b; \\ \lambda_3 : g = b^2h - br^2, h \ge -(a+b); \\ \lambda_4 : g = b^2h + br^2, h \ge -(a-b), \end{gathered}$$

принадлежащие $\Sigma_2 \cap \Sigma_4$. На плоскости (s,h) эти лучи изображаются в виде

$$\begin{gathered} \lambda_1 : s = -a, h \ge -(a+b); \\ \lambda_2 : s = a, h \ge a-b; \\ \lambda_3 : s = -b, h \ge -(a+b); \\ \lambda_4 : s = b, h \ge -(a-b). \end{gathered}$$

Доказательство. Ненулевой ранг J предполагает, что $dH \ne 0$. Поскольку $dK \ne 0$, то должно выполняться условие $dH = \lambda dK$ с некоторой постоянной $\lambda \ne 0$. Частная производная этого соотношения по ω_3 дает $\omega_3 \equiv 0$. Из уравнений (1) вытекает, что последнее тождество по t может иметь место только для маятниковых движений (6), (7). Соответствующие значения g, k, s, а также пределы изменения h вычисляются непосредственно из выражений (3) и уравнений (5).

Теорема 3. *Траектории, удовлетворяющие условиям* $\operatorname{rank} J = 1, dK = 0$ *и* $K \ne 0$, *исчерпываются движениями* (8). *Их J-образ заполняет лучи*

$$\begin{gathered} g = abh, k = (a-b)^2, h \ge -(a+b), \\ g = -abh, k = (a+b)^2, h \ge -(a-b). \end{gathered} \tag{12}$$

Часть этого множества, лежащая в $\Sigma_4 = \mathfrak{D}$, определяется следующими отрезками кривых в плоскости (s,h):

$$\mu_1 : h = s - \frac{ab}{s}, s \in [-a, 0);$$

$$\mu_2 : h = s - \frac{ab}{s}, s \in [b, +\infty);$$

$$\mu_3 : h = s + \frac{ab}{s}, s \in [-a, -b];$$

$$\mu_4 : h = s + \frac{ab}{s}, s \in (0, +\infty).$$

Доказательство. В предположениях теоремы имеем $K \neq 0, K_{\omega_1} = K_{\omega_2} = 0$, откуда следует, что $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$. Тогда в силу системы (1) приходим к траекториям (8) и выражениям (4). Допустимые значения h в (12) вычисляются подстановкой (8) в выражение для H из (3). Подстановка же значений g, k из (4) в (5) дает искомые зависимости h от s, а допустимые значения h в (12) определяют и допустимые значения s.

Теорема 4. *Траектории, удовлетворяющие условиям* $\operatorname{rank} J = 1, dK = 0$ *и* $K = 0$, *исчерпываются критическими движениями гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, индуцированной на многообразии* $\mathfrak{M}$. *Это траектории также лежат в* $\mathfrak{D}$ *и порождают следующие отрезки кривых на плоскости* (s,h):

$$\begin{aligned} &\delta_1 : h = 2s + \phi(s), s \in [-b, 0); \\ &\delta_2 : h = 2s + \phi(s), s \in (0, b]; \qquad (13) \\ &\delta_3 : h = 2s - \phi(s), s \in [a, +\infty), \end{aligned}$$

где $\phi(s) = \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)/s^2} \geq 0$.

Доказательство. Достаточно предположить, что $K = 0$. Тогда автоматически $dK = 0, dH \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} J \leq 2$ и ранг равен единице в точности в точках линейной зависимости dH, dG на $\mathfrak{M} = \{K = 0\}$. Поскольку в таких точках должны существовать (с точностью до линейного преобразования) две равные нулю независимые нетривиальные линейные комбинации dH, dG, dK, то бифуркационные поверхности Σ_1, Σ_4 должны в соответствующих точках пересекаться трансверсально. Полагая в (5) $k = 0$, получаем искомые зависимости h от s. Области изменения s вычисляются с применением предложения 3.

3. ОПИСАНИЕ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА

Рассмотрим поверхность Σ_1. Несмотря на то что существование и расположение корней уравнения (10) полностью исследовано аналитически в работе [3], получить явные выражения для наибольшего положительного корня $f_0(h)$ оказывается невозможным. Заметим, что подстановки (13) позволяют явно выразить корни (10) в виде $f_i(s)$. Отсюда, в частности, следует, что все критические точки частного интегрального отображения предложения 3 одновременно являются точками, в которых $\operatorname{rank} J = 1$. Корень $f_0(h)$ отвечает кривой δ_1. На ней зависимость h от s монотонно возрастающая. Обозначим обращение этой зависимости через $s_1(h)$ $(h \in [-2b, +\infty], s_1(h) \in [-b, 0))$. Тогда из (9), (10) найдем зависимость

$$g = g_1(h) = s^3 + \frac{ab}{s} - s^2\phi(s)\,|_{s=s_1(h)}, h \geq -2b.$$

Из (9) имеем также $p^2h - 2g \geq 0$. Теперь из предложения 3 и теоремы 4 получаем следующий результат.

Теорема 5. *Множество* $\Sigma_1 \cap \Sigma$ *имеет вид*

$$k = 0, h \geq -2b, g_1(h) \leq g \leq \frac{1}{2}p^2h.$$

Следует отметить, что верхняя граница для g не является образом точек сильного падения ранга J, но она также и не принадлежит $\partial\Sigma^{(2)}$, так как через эти точки имеется гладкое продолжение $\Sigma_1 \cap \Sigma$ на поверхность Σ_2. Наличие этой границы порождено лишь условным делением $\tilde{\Sigma}$ на Σ_i.

Обратимся к поверхности Σ_2. Как и в предыдущем случае здесь возникает некоторая естественная граница допустимой области, не связанная с бифуркациями внутри $c(J)$, а объясняющаяся возможностью гладкого продолжения $\Sigma_2 \cap \Sigma$ на поверхность Σ_4. Непосредственно вычисляется, что касание поверхностей Σ_2 и Σ_4 описывается уравнением $2p^2(p^2h - 2g)^2 - 2h(p^2h - 2g)r^4 + r^8 = 0$, откуда вытекают зависимости

$$g_\pm(h) = \frac{1}{4p^2}[(2p^4 - r^4)h \pm r^4\sqrt{h^2 - 2p^2}],$$

причем, с учетом предложения 1, реализуется лишь та часть, где $h \geq \sqrt{2}p$, а тогда $g_-(h) < g_+(h)$ при $h > \sqrt{2}p$.

Из теорем 1, 2 получаем следующее описание допустимого множества.

Теорема 6. *Множество* $\Sigma_2 \cap \Sigma$ *лежит в полупространстве* $h \geq -(a+b)$ *и описывается следующей совокупностью систем неравенств*

$$\begin{cases} b^2h - br^2 \le g \le a^2h + ar^2, \\ -(a+b) \le h \le \sqrt{2}p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2h - br^2 \le g \le g_-(h), \\ h \ge \sqrt{2}p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_+(h) \le g \le a^2h + ar^2, \\ h \ge \sqrt{2}p. \end{cases}$$

Для достаточно простого множества Σ_3 полное описание допустимых значений дают неравенства в (12).

На поверхности Σ_4 удобнее описывать допустимое множество в терминах переменных s, h с учетом выражений (5). На кривой δ_1 имеем уже отмеченную зависимость $s_1(h), h \ge -2b$. На кривой δ_2 имеем $h'(s) < 0$. Обозначим обратную зависимость через $s_2(h), h \ge 2b$, так что при этом $s_2(2b) = b$ и $s_2(h) \to 0$ при $h \to +\infty$. На кривой δ_3 уравнение $h'(s) = 0$ имеет единственное решение $s_0 \in (a, +\infty)$. Пусть h_0 — соответствующее минимальное значение h. Очевидно, $h_0 \in (a+b, 2a)$. Обозначим через s_3 $s_3(h)$, $s_4(h)$ зависимости, определенные на кривой δ_3 для $s \in [a, s_0]$ и $s \in [s_0, +\infty)$ соответственно.

Рассматривая интервалы монотонности $s(h)$ на кривых $\mu_1 - \mu_4$, обозначим

$$s_5(h) = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4ab}}{2},$$

$$s_6(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4ab}}{2},$$

$$s_7(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 + 4ab}}{2}.$$

Суммируя утверждения теорем 1—4 в части, относящейся к значениям s, h, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2 *Допустимая область* $\Sigma_4 \cap \Sigma$ *полностью описывается следующей совокупностью условий на плоскости* (s, h). *Для отрицательных значений* s:

$$\begin{cases} -(a+b) \le h \le -2\sqrt{ab}, \\ s \in [-a, s_5(h)] \cup [s_6(h), -b], \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\sqrt{ab} \le h \le -2b, \\ s \in [-a, -b], \end{cases}$$

$$\begin{cases} h > -2b, \\ s \in [-a, s_1(h)]. \end{cases}$$

Для положительных значений s:

$$\begin{cases} -a + b \le h \le 2b, \\ s \in [b, s_7(h)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b \le h \le h_0, \\ s \in [s_2(h), s_7(h)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0 \le h \le 2a, \\ s \in [s_2(h), s_3(h)] \cup [s_4(h), s_7(h)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} h > 2a, \\ s \in [s_2(h), a] \cup [s_4(h), s_7(h)]. \end{cases}$$

Теоремы 5—7 не только полностью определяют бифуркационную диаграмму $\Sigma(J)$ в пространстве $\mathbf{R}^3(h, k, g)$, но и дают полную информацию для аналитической классификации ее сечений плоскостями постоянной энергии (бифуркационных диаграмм Σ_h), а также для построения этих сечений (а, следовательно, и диаграммы в целом) средствами компьютерной графики.

СИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы / Г. Г. Аппельрот // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. — 1940. — М. Л.: Издво АН СССР. — С. 61—156.

2. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле / О. И. Богоявленский // Докл. АН СССР. — 1984. — 275, № 6. — С. 1359—1363.

3. *Зотьев Д.Б.* Фазовая топология 1го класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле / Д. Б. Зотьев // Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — 12, № 1. — С. 95—128.

4. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки / С. В. Ковалевская // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. — 1940. — М. Л.: Издво АН СССР. — С. 11—60.

5. *Рейман А.Г.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений / А.Г. Рейман, М.А. Семенов-Тян-Шанский // Функц. анализ и его приложения. — 1988. — 22, № 2. — С. 87—88.

6 *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2004. — Вып. 34. — С. 47—58.

7. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С. 32—38.

8. *Харламов М.П.* Бифуркационная диаграмма обобщения 4-го класса Аппельрота / М. П. Харламов

// Механика твердого тела. — 2005. — Вып. 35. — С. 38—48.

9. *Харламов М.П.* Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской / М. П. Харламов, А. Ю. Савушкин // Укр. матем. вестник. — 2004. — 1, № 4. — С. 548—565.

10. *Харламов М.П.* Бифуркационное множество в одной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской / М. П. Харламов, А. Ю. Савушкин, Е. Г. Шведов // Механика твердого тела. — 2003. — Вып. 33. — С. 10—19.

11. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields / M. P. Kharlamov // Регулярная и хаотическая динамика. — 2005. — 10, № 4. — С. 381—398.

12. *Kharlamov M.P.* Nondegenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields / M. P. Kharlamov, D. B. Zotev // Регулярная и хаотическая динамика. — 2005. — 10, № 1. — С. 15—19.