УДК 539.374

О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А. Н. Спорыхин, С. Г. Чупис, Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет

В статье рассматривается кручение призматических стержней из упрочняющегося вязкопластического материала в двух случаях: в случае линеаризированного условия пластичности и ассоциированного закона пластического течения и в случае, когда принимается линеаризированным ассоциированный закон пластического течения.
Получены аналитические решения для напряжений и деформаций в случае стержней полигонального поперечного сечения. Рассмотрены конкретные случаи, когда стержень имеет квадратное или прямоугольное поперечное сечение.
Установлено стабилизирующее влияние вязкости на напряженно-деформированное состояние стержней при кручении.

Теория кручения призматических стержней из идеального жесткопластического материала изложена в [1—4], призматических стержней из упрочняющегося жесткопластического материала — в [5—8]. Линеаризация условия пластичности и соотношений ассоциированного закона пластического течения неоднократно использовалась в теории пластичности для упрощения решения задач (например, в [1, 5—7, 9]).

В работе [6] рассмотрено кручение призматических стержней из анизотропно упрочняющегося жесткопластического материала при линеаризированном условии пластичности и законе пластического течения. В работе [7] решение той же задачи проведено в предположении, что линеаризированными являются лишь соотношения ассоциированного закона пластического течения.

В настоящей работе в рамках таких предположений рассмотрена задача кручения призматических стержней из упрочняющегося вязкопластического материала.

1. Рассмотрим кручение призматического стержня произвольного поперечного сечения. Ось z параллельна оси стержня. Пусть стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M. Примем, что поперечные сечения испытывают жесткий поворот в своей плоскости, но искривляются в направлении оси z.

Компоненты касательного напряжения должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \qquad (1.1)$$

Условие пластичности имеет форму:

$$(\tau_{xz} - c \cdot \varepsilon_{xz} - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{xz})^2 + (\tau_{yz} - c \cdot \varepsilon_{yz} - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{yz})^2 = k^2, \quad c, k, \eta = const. \qquad (1.2)$$

Ассоциированный закон пластического течения

$$\frac{d\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz} - c \cdot \varepsilon_{xz} - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{xz}} = \frac{d\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz} - c \cdot \varepsilon_{yz} - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{yz}}. \qquad (1.3)$$

Компоненты деформации будут равны:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0, \\ \varepsilon_{xz} = \dfrac{\kappa}{2} \cdot \left(-y + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta} \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \\ \varepsilon_{yz} = \dfrac{\kappa}{2} \cdot \left(x + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta} \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right). \end{cases} \qquad (1.4)$$

Кроме того, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$.

Здесь τ_{xz}, τ_{yz} — компоненты напряжений, $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ — компоненты деформаций, $\dot{\varepsilon}_{xz}, \dot{\varepsilon}_{yz}$ — компоненты скоростей деформаций, w — депланация (искривление) сечения, κ — крутка. Упрочнение будем предполагать линейным. Далее индекс z у компонент напряжений, деформаций и скоростей деформаций будем опускать.

2. Рассмотрим два подхода к решению такого класса задач: в первом случае будем рассматривать задачу кручения упрочняющегося вязкопластического призматического стержня при линеаризированных условии пластичности и ассоциированном законе пластического тече-

ния; а во втором — только при линеаризированном ассоциированном законе пластического течения.

Условие текучести (1.2) в плоскости τ_x, τ_y представляет собой окружность с центром в точке O с координатами $c \cdot \varepsilon_x + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_x, c \cdot \varepsilon_y + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_y$..

Предположим, что окружность условия текучести заменена некоторым многоугольником (рис. 1). Тогда вязкопластическое состояние соответствует некоторой прямой

$$\begin{aligned} &a \cdot (\tau_x - c \cdot \varepsilon_x - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_x) + \\ &+ b \cdot (\tau_y - c \cdot \varepsilon_y - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_y) = k, \;\; a, b = const. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Условие (2.1) представляет на некотором отрезке линеаризированное условие текучести (1.2). Соотношения ассоциированного закона примут вид:

$$a \cdot \varepsilon_y - b \cdot \varepsilon_x = 0. \tag{2.2}$$

Прямые

$$a \cdot x - b \cdot y = C_1 \tag{2.3}$$

являются характеристиками. Вдоль них

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \kappa \cdot (C_2 - y) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta} \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \\ \varepsilon_y = \kappa \cdot (C_3 + x) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta} \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

Уравнению равновесия (1.1) удовлетворим, полагая

$$\tau_x = \frac{\partial U}{\partial y}, \;\; \tau_y = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим кручение стержня полигонального сечения.

На контуре сечения касательные напряжения параллельны контуру. Характеристики фиксированы и не зависят от величины деформации, поэтому для данного контура всегда

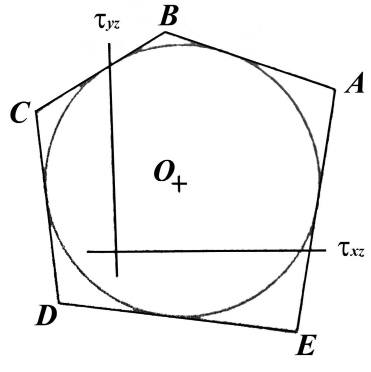

Рис. 1

можно выбрать условие текучести (2.1) таким образом, чтобы характеристики оставались перпендикулярными к контуру во время всего процесса деформирования.

На линиях разрыва всегда

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим область OEF, изображенную на рис. 2. Предположим, что прямая OE — часть контура сечения стержня, EF — линия разрыва напряжений. Оси координат x, y выберем так, как показано на рис. 2.

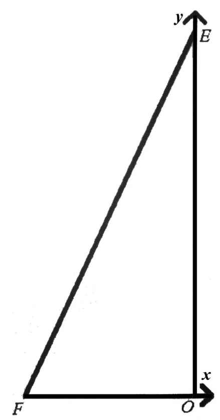

Рис. 2

Предположим, что уравнение линии разрыва задано в виде

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = 0, \;\; (\alpha, \beta, \gamma = const). \tag{2.7}$$

Для того, чтобы характеристики были ортогональны к контуру OE ($x = 0$), следует положить в (2.1) $a = 0$, $b = 1$, и условие (2.1) в рассматриваемом случае примет вид

$$\tau_y - c \cdot \varepsilon_y - \eta \cdot \dot{\varepsilon}_y = k. \tag{2.8}$$

Характеристики (2.3) запишутся в виде

$$y = C_1. \tag{2.9}$$

Всюду в области OEF имеет место $\varepsilon_x = 0$.

$$\varepsilon_y = \frac{\kappa}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \tau_x = -\dfrac{c \cdot \kappa \cdot \beta}{\alpha} \cdot x \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \\ \tau_y = \dfrac{c \cdot \kappa}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) + k. \end{cases} \tag{2.11}$$

Определим проекции усилий F_x, F_y, действующих в области, на оси x, y и момент М* относительно начала координат (рис. 2).

$$F_x = \iint\limits_{OEF} \tau_x \cdot dx \cdot dy = \frac{c \cdot \kappa}{6} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha^3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \quad (2.12)$$

$$F_y = \iint\limits_{OEF} \tau_y \cdot dx \cdot dy = \frac{c \cdot \kappa}{6} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha^2 \cdot \beta} \times \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) + \frac{k \cdot \gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \beta}, \quad (2.13)$$

$$M* = \iint\limits_{OEF} (x \cdot \tau_y - y \cdot \tau_x) \cdot dx \cdot dy = -\frac{\kappa}{6} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha^2 \cdot \beta}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

В случае стержня квадратного сечения (рис. 3) с длиной стороны $2l$ для треугольника OEF уравнение линии разрыва EF имеет вид

$$x - y + l = 0, \ (\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = l). \quad (2.15)$$

Из (2.10) и (2.11) найдем

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0, \\ \varepsilon_y = \kappa \cdot (x - y + l) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \\ \tau_x = c \cdot \kappa \cdot x \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \\ \tau_y = c \cdot \kappa \cdot (x - y + l) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) + k. \end{cases} \quad (2.16)$$

Крутящий момент всего сечения будет равен

$$M = \frac{4}{3} c \cdot \kappa \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) + \frac{8}{3} \cdot k \cdot l^3. \quad (2.17)$$

В случае стержня прямоугольного сечения (рис. 4) со сторонами $2l$ и $2q$ решение в областях NEF и MEF определяется аналогично случаю стержня квадратного сечения.

Рассмотрим область $ONFO_1$. Уравнение линии разрыва FO_1 в системе координат x, y, указанной на рис. 4, имеет вид

$$x + l = 0, \ (\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = l). \quad (2.18)$$

Компоненты напряжения в области $ONFO_1$ запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \tau_x = 0, \\ \tau_y = c \cdot \kappa \cdot (x + l) \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) + k. \end{cases} \quad (2.19)$$

Крутящий момент для всего сечения стержня будет равен

$$M = \frac{4}{3} c \cdot \kappa \cdot l^3 \cdot q \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) + \frac{4}{3} \cdot k \cdot l^2 (3 \cdot q - l). \quad (2.20)$$

В ходе решения задачи были найдены характеристики, получены значения деформаций, напряжений, усилий и моментов для призматических стержней. В частности, для стержней полигонального (например, квадратного и прямоугольного) поперечного сечения. На полученные значения влияет вязкость. Она оказывает на них стабилизирующее действие. При $t \to \infty$ и при $\eta \to 0$ значения сходятся к значе-

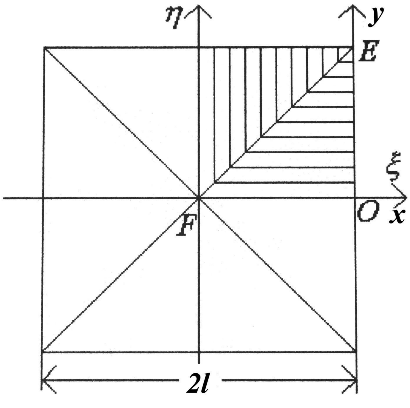

Рис. 3

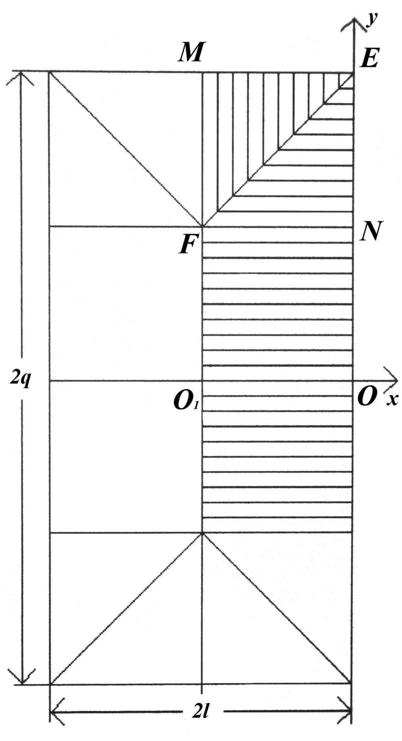

Рис. 4

ниям, полученным В. В. Дудукаленко и Д. Д. Ивлевым для анизотропно упрочняющихся жесткопластических призматических стержней при линеаризированных условии пластичности и ассоциированном законе пластического течения.

3. В случае второго подхода линеаризация соотношений ассоциированного закона пластического течения состоит в том, что компоненты приращения пластических деформаций пропорциональны во время всего процесса пластического деформирования компонентам напряжений, возникающим в начальный момент пластического течения.

$$\frac{d\varepsilon_x}{\tau_x^0} = \frac{d\varepsilon_y}{\tau_y^0}, \ (\tau_x^{0^2} + \tau_y^{0^2} = k^2). \qquad (3.1)$$

Соотношения (3.1) могут быть проинтегрированы [6].

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_x}{\tau_x^0} = \dfrac{\varepsilon_y}{\tau_y^0}, \\ \varepsilon_x = \dfrac{\kappa}{2}\cdot\left(-y + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta}\cdot t\cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \\ \varepsilon_y = \dfrac{\kappa}{2}\cdot\left(x + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta}\cdot t\cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right). \end{cases} \qquad (3.2)$$

Исходная система уравнений, исследуемая в дальнейшем, состоит из соотношений (1.1), (1.2), (3.2).

Соотношению (1.2) удовлетворим, полагая

$$\begin{cases} \tau_x = -k\cdot\sin\theta + c\cdot\varepsilon_x + \eta\cdot\dot{\varepsilon}_x, \\ \tau_y = k\cdot\cos\theta + c\cdot\varepsilon_y + \eta\cdot\dot{\varepsilon}_y. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Из уравнения равновесия (1.1) найдем

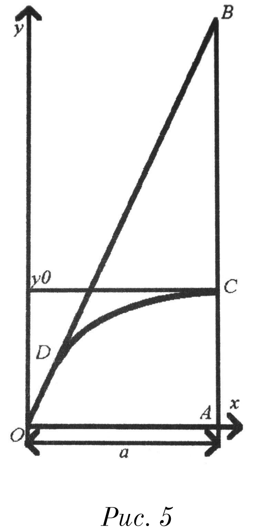

Рис. 5

$$k\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx} + k\cdot\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dy} - \\ -\frac{c\cdot\kappa}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) = 0. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим кручение стержней полигонального поперечного сечения. На рис. 5 показана часть стержня: линия AB — свободная граница стержня $x=l$, OB — линия разрыва (определяемая из решения теории идеальной пластичности). Уравнение линии разрыва (из решения теории идеальной пластичности) запишем в виде $y - \alpha x = 0$. Депланация и компоненты деформации для области AOB могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} w = y\cdot\left(x - \dfrac{y}{\alpha}\right), \\ \varepsilon_x = 0, \\ \varepsilon_y = \kappa\cdot\left(x - \dfrac{y}{\alpha}\right)\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t} - \dfrac{c}{\eta}\cdot t\cdot e^{-\frac{c}{\eta}t}\right). \end{cases} \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.4) запишется в виде

$$k\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx} + k\cdot\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dy} + \\ +\frac{c\cdot\kappa}{\alpha}\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) = 0. \qquad (3.6)$$

Характеристики могут быть представлены в следующем виде

$$(l-x)^2 + \left((y-y_0) + \frac{\alpha\cdot k}{c\cdot\kappa\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right)}\right)^2 = \\ = \left(\frac{\alpha\cdot k}{c\cdot\kappa\cdot\left(1 - e^{-\frac{c}{\eta}t}\right)}\right)^2, \qquad (3.7)$$

где y_0 — ордината точки на свободной границе ($x=l$), из которой исходит данная характеристика.

Характеристики (3.7) представляют собой окружности, всегда проходящие через точку $y=y_0$; при $t=0$, $\kappa = 0$ или $c=0$ имеет место решение теории идеальной пластичности, и характеристики — прямые, ортогональные к свободной границе.

Компоненты напряжения могут быть определены в виде

$$\begin{cases} \tau_x = -\dfrac{c\cdot\kappa}{\alpha}\cdot\left(1-e^{-\frac{c}{\eta}t}\right)\cdot(l-x), \\ \tau_y = \sqrt{k^2-\tau_x^{\ 2}} + c\cdot\kappa\cdot\left(x-\dfrac{y}{\alpha}\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{c}{\eta}t}\right). \end{cases} \qquad (3.8)$$

Определим проекции результирующих усилий F_x, F_y, действующих в области AOB, и момент сил относительно точки O. Будем иметь

$$F_x = \iint\limits_{ABO} \tau_x\cdot dx\cdot dy = \frac{c\cdot\kappa\cdot l^3}{6}\cdot\left(1-e^{-\frac{c}{\eta}t}\right), \qquad (3.9)$$

$$F_y = \iint\limits_{ABO} \tau_y\cdot dx\cdot dy = \frac{c\cdot\kappa\cdot\alpha\cdot l^3}{6}\cdot\left(1-e^{-\frac{c}{\eta}t}\right) +$$

$$+k\cdot\alpha\cdot\left(\frac{1}{3\cdot n^2}\cdot\sqrt{(1-\beta^2)^3}-1\right)+ \qquad (3.10)$$

$$+\frac{l}{2\cdot n}\cdot\arcsin\beta+\frac{l^2}{2}\cdot\sqrt{1-\beta^2},$$

$$M* = \iint\limits_{ABO}\left(x\cdot\tau_y - y\cdot\tau_x\right)\cdot dx\cdot dy =$$

$$=\frac{c\cdot\kappa\cdot\alpha\cdot l^4}{6}\cdot\left(1-e^{-\frac{c}{\eta}t}\right)+$$

$$+k\cdot\alpha\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{5\cdot l}{12}\cdot\sqrt{(1-\beta^2)^3}+\right.\right. \qquad (3.11)$$

$$\left.+\frac{1}{8}\cdot\left(l\cdot\sqrt{1-\beta^2}+\frac{1}{n}\cdot\arcsin\beta\right)-\frac{2}{3}\cdot l\right)+$$

$$\left.+\frac{l^2}{2}\cdot\left(l\cdot\sqrt{1-\beta^2}+\frac{1}{n}\cdot\arcsin\beta\right)\right]$$

при $|\tau_x| > k,\ c\kappa l > \alpha k$, где $\beta = l\cdot n$,

$$\beta = l\cdot n,\ n = c\cdot\kappa\cdot\left(1-e^{-\frac{c}{\eta}t}\right)/\,\alpha\cdot k.$$

Рассмотрим конкретные примеры.

В случае стержня квадратного сечения (рис. 6) для области AOB будем иметь $\alpha = 1$. Зависимость крутящего момента от крутки запишется в виде

$$M = 8\cdot M*, \qquad (3.12)$$

где $M*$ — значение, определяемое по формуле (3.11).

На рис. 6 показаны характеристики в области BGO.

С увеличением величины t вследствие влияния вязкости характеристики меняются, но, по достижении величиной t определенного значения, они стабилизируются (рис. 6а).

В случае стержня прямоугольного сечения (рис. 7) в области $ABDO$ величина $\alpha = 0$ [7], в области BCD величина $\alpha = 1$. На рис. 7 показаны характеристики в области $CDGH$.

Таким образом, были найдены характеристики, получены значения деформаций, напряжений, усилий и моментов для призматических стержней. На полученные значения стабилизирующее действие оказывает вязкость. При $t\to\infty$ и при $\eta\to 0$ значения сходятся к значениям, полученным В. В. Дудукаленко и Д. Д. Ивлевым для анизотропно упрочняющихся жесткопластических призматических стержней при линеаризированном ассоциированном законе пластического течения.

В рамках второго подхода в силу меньшего числа допущений лучше отражается физика кручения призматических стержней из упрочняющегося вязкопластического материала,

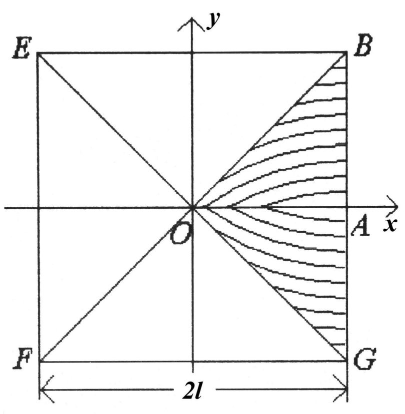

Рис. 6

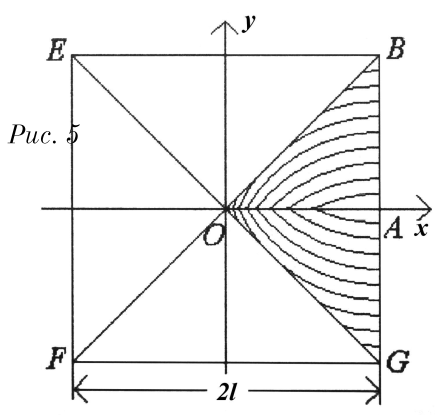

Рис. 6а

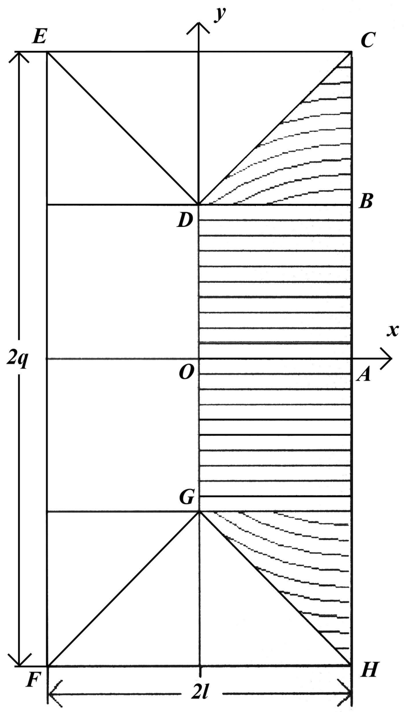

Рис. 7

однако, аналитические расчеты при этом затруднены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. — М. : Физматлит, 2001. — 704 с.

2. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1966. — 232 с.

3. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.

4. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней / С. Г. Лехницкий. — М. : Наука, 1971. — 240 с.

5. *Спорыхин А.Н.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2004. — 219 с.

6. *Дудукаленко В.В.* О кручении анизотропно упрочняющихся призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризированном условии пластичности / В. В. Дудукаленко, Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — №3. — С. 115—118.

7. *Дудукаленко В.В.* О кручении анизотропно упрочняющихся призматических стержней при линеаризированном законе пластического течения / В. В. Дудукаленко, Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — №5. — С. 173—175.

8. *Ивлев Д.Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. — М. : Наука, 1971. — 232 с.

9. *Прагер В.* Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Г. Ходж. — 1956.