УДК 517.935.3

О ЛОКАЛЬНО ЯВНОЙ МОДЕЛИ ЛЮФТА

И. Н. Прядко

Воронежский государственный университет

В статье предлагается новая модель люфта, записываемая в виде локально явного уравнения. В отличие от известной модели Красносельского—Покровского она определяется сразу для всех непрерывных входных функций. Доказана эквивалентность этих моделей, а через связь люфта с упором — эквивалентность описания упора в виде локально явного уравнения с моделью Красносельского—Покровского. Изучены некоторые свойства люфта в новом описании.

ВВЕДЕНИЕ

В статье предлагается новая математическая модель одного из простейших гистерезисных элементов технических систем — *люфта* [1], записываемая в виде так называемого *локально явного уравнения* [2]. Впервые строгие и полные математические модели люфта и тесно связанного с ним *упора* построены в [1]. Эти модели были введены следующим образом: сначала они с помощью явных формул определялись для монотонных и кусочно монотонных входных функций, затем доказывалось, что зависимость выходных функций от входных удовлетворяет условию Липшица и с помощью этого утверждения определение люфта и упора распространялось на произвольные непрерывные входы. Иная схема построения математической модели для упора была предложена в [2]: зависимость выхода от входа определялась сразу для всех непрерывных входов с помощью локально явного уравнения. При этом эквивалентность моделей для кусочно монотонных входов непосредственно вытекала из определений, однако вопрос об эквивалентности на классе всех непрерывных входов оставался открытым.

В данной статье для модели люфта в виде локально явного уравнения доказана теорема о липшицевой зависимости выхода от входа и тем самым полностью установлена эквивалентность двух моделей люфта. Для упора получена простая формула связи с люфтом, которая для первоначальной модели была установлена в [1]. Как следствие доказана эквивалентность двух моделей и для упора. Кроме того, в статье обсужден вопрос о единственности решения начальной задачи и о глобальной разрешимости уравнения люфта, для упора эти утверждения доказаны в [2].

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛЮФТА

Люфт (в рассматриваемом случае *одномерный*), соответствующий отрезку $[0,h]$, — это преобразователь, который монотонно возрастающему непрерывному входу $\sigma(t)$ и начальному состоянию $u_0 : u_0 - h \le \sigma(t_0) \le u_0$ сопоставляет выход, который равен u_0, пока $\sigma(t) \le u_0$, и $\sigma(t)$ в дальнейшем. Для убывающего входа $\sigma(t)$ выход определяется аналогично: u_0, пока $\sigma(t) \ge u_0$, и $\sigma(t)$ в дальнейшем. Очевидным образом определение люфта распространяется на кусочно монотонные непрерывные входы. В [1] доказано, что с помощью функционально-аналитической техники преобразователь люфта корректно доопределяется для произвольных непрерывных входов.

В настоящей статье описывается математическая модель люфта в виде локально явного уравнения, имеющая смысл для всех непрерывных входов и эквивалентная модели, описанной в [1].

2. О ЛОКАЛЬНО ЯВНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Уравнение с нелинейным дифференциалом [3] (квазидифференциальное уравнение [4]) имеет вид:

$$u(t + dt) - u(t) = D(t, u(t), dt) + o(dt). \qquad (1)$$

Предполагается, что областью определения функции $D(t,u,dt)$ по (t,u) является некоторое множество $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, а по dt — промежуток $[0, \alpha(t,u))$; множество значений лежит в $\mathbb{R}^m$, причем $D(t,u,0) = 0$ $D(t,u,0) = 0$ и $D(t,u,dt)$ непрерывно слева по dt при фиксированных t и u.

Решением уравнения (1) называется непрерывная слева на некотором промежутке I функция $u = \varphi(t)$, удовлетворяющая при любом $t \in \tilde{I} = I \setminus \{\sup I\}$ соотношению:

$$\lim_{dt\to+0}\frac{1}{dt}[\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)]=0.$$

Решение φ называется *сильным*, если для любого $t\in\tilde{I}$ существует такое $\delta>0$, что при $dt\in[0,\delta)$ выполняется равенство:

$$\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)=0.$$

Рассмотрим *квазипоток* ([5]), порожденный уравнением (1):

$$\gamma_t^{t+dt}u=u+D(t,u,dt).$$

По условию эта функция непрерывна слева по dt. Если она локально обладает *полугрупповым свойством*, т. е.

$$\forall((t_0,u_0)\in U)\exists(\delta>0)\forall(t_1:t_0\le t_1<t_0+\delta)\exists(\delta_{t_1}>0)$$

$$\forall(t_2:t_1\le t_2<t_1+\delta_{t_1})\left[\gamma_{t_1}^{t_2}\gamma_{t_0}^{t_1}u_0=\gamma_{t_0}^{t_2}u_0\right],$$

то уравнение (1) называется *локально явным* [2]. Для любой пары $(t_0,u_0)\in U$ зафиксируем одно из таких δ и будем обозначать его $\Delta=\Delta(t_0,u_0)$.

Как нетрудно видеть из определения, *сильное решение обладает свойством единственности вправо*, т. е. если φ и ψ — сильные решения и $\psi(t_1)=\varphi(t_1)$, то $\psi(t)=\varphi(t)$ на $[t_1,+\infty)\mathcal{D}\cap(\psi)\cap\cap\mathcal{D}(\varphi)$.

Справедливо следующее утверждение [2] о существовании сильного решения локально явного уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию:

$$u(t_0)=u_0. \tag{2}$$

Утверждение о локальной разрешимости. *Если* $(t_0,u_0)\in U$ *и уравнение* (1) *является локально явным, то функция* $\varphi(t)=\gamma_{t_0}^{t}u_0$ *на промежутке* $[t_0,t_0+\Delta)$ *есть (единственное) сильное решение задачи* (1), (2).

Это утверждение позволяет дать следующую эквивалентную формулировку определения локально явного уравнения [6]: *уравнение* (1) *называется локально явным, если для него задача Коши всегда разрешима в классе сильных решений*, т. е.

$$\forall((t_0,u_0)\in U)\exists(\delta>0)$$

[*на* $[t_0,t_0+\delta)$ *задача* (1), (2) *имеет сильное решение*].

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЮФТА

Для монотонных входов σ приращение выходного сигнала при малых $dt\ge0$ можно задать формулой:

$$D(t,u,dt)=\begin{cases}\max\limits_{t\le s\le t+dt}\sigma(s)-\sigma(t), \text{ если } \sigma(t)=u,\\ \min\limits_{t\le s\le t+dt}\sigma(s)-\sigma(t), \text{ если } \sigma(t)=u-h,\\ 0 \text{ в остальных случаях}\end{cases} \tag{3}$$

Поэтому для кусочно монотонных входов эта формула дает локальное точное выражение для приращения выходного сигнала. Следовательно, зависимость выхода преобразователя люфта от кусочно монотонного входа глобально описывается сильными решениями уравнения (1), (3), в котором множество U возможных значений определяется следующим образом: $(t,u)\in U\Leftrightarrow[u-h\le\sigma(t)\le u]$.

Будем рассматривать сильные решения уравнения (1), (3) как математическую модель преобразователя люфта для произвольных непрерывных входов $\sigma(t)$.

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

При любом непрерывном на $[t_0,T)(T\le\infty)$ *входе* $\sigma(t)$ *существует (единственное) определенное на этом промежутке сильное решение уравнения* (1), (3), *удовлетворяющее условию* (2).

Доказательство. Покажем, что для любой начальной точки $(t_0,u_0)\in U$ функция $u(t)=\gamma_{t_0}^{t}u_0$ на некотором промежутке $[t_0,t_0+a)(a>0)$ является сильным решением уравнения (1), (3). Рассмотрим три случая: $u_0-h<\sigma(t_0)<<u_0, \sigma(t_0)=u_0$ и $\sigma(t_0)=u_0-h$.

В первом случае

$$\gamma_{t_0}^{t}u_0=u_0.$$

Так как функция $\sigma(t)$ непрерывна, a можно выбрать так, чтобы $u_0-h<\sigma(t)<u_0$ при $t\in[t_0,t_0+a)$. Тогда на этом промежутке $\gamma_{t_0}^{t}u_0$ является сильным решением, так как

$$\gamma_{t_0}^{t+dt}u_0-\gamma_{t_0}^{t}u_0=u_0-u_0=D(t,u(t),dt).$$

В случае, когда $\sigma(t_0)=u_0$

$$\gamma_{t_0}^{t}u_0=u_0+\max_{t_0\le s\le t}\sigma(s)-\sigma(t_0)=\max_{t_0\le s\le t}\sigma(s)\ge\sigma(t).$$

Выберем $a>0$ так, чтобы $\sigma(t)>\max\limits_{t_0\le s\le t}\sigma(s)-h$ при $\max\limits_{t_0\le s\le t+dt}\sigma(s)=\max\limits_{t_0\le s\le t}\sigma(s)t\in[t_0,t_0+a)$. Тогда если $\sigma(t)=\gamma_{t_0}^{t}u_0$ при некотором $t\in(t_0,t_0+a)$, то $\sigma(t)=\max\limits_{t_0\le s\le t}\sigma(s)$; поэтому

$$\gamma_{t_0}^{t+dt}u_0-\gamma_{t_0}^{t}u_0=\max_{t_0\le s\le t+dt}\sigma(s)-\max_{t_0\le s\le t}\sigma(s)=$$

$$=\max_{t\le s\le t+dt}\sigma(s)-\sigma(t)=D(t,u(t),dt).$$

Если же t таково, что $\sigma(t) < \gamma_{t_0}^t u_0$, то $\sigma(t) < \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$; но тогда $\sigma(t+dt) < \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$ для достаточно малых $dt > 0$, так что $\max_{t_0 \le s \le t+dt} \sigma(s) = \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$.

Следовательно,

$$\gamma_{t_0}^{t+dt} u_0 - \gamma_{t_0}^t u_0 = \max_{t_0 \le s \le t+dt} \sigma(s) - $$

$$-\max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s) = 0 = D(t, u(t), dt).$$

Для случая $\sigma(t_0) = u_0 - h$ доказательство аналогично предыдущему.

Таким образом, функция $u(t)$ является сильным решением задачи (1), (2), (3) и в силу утверждения о локальной разрешимости оно единственно. Глобальная разрешимость следует из глобальной разрешимости уравнения упора [2] и связи операторов упора и люфта, описанной ниже в п. 7.

5. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УПОРА

Упор, соответствующий отрезку $[0,1]$, — это преобразователь, который монотонно возрастающему непрерывному входу $\sigma(t)$ и начальному состоянию $u_0 \in [0,1]$ сопоставляет выход $u(t) = u_0 + \sigma(t) - \sigma(t_0)$, если последняя величина меньше 1, и 1 в противном случае. Для убывающего входа $\sigma(t)$ выход определяется аналогично: $u(t) = u_0 + \sigma(t) - \sigma(t_0)$, если последняя величина больше 0, и 0 в противном случае. Очевидным образом определение упора распространяется на кусочно монотонные непрерывные входы.

Ниже описывается предложенная в [2] математическая модель упора в виде уравнения (1), имеющая смысл для всех непрерывных входов и эквивалентная модели из [1].

6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПОРА

Для монотонных входов σ приращение выходного сигнала при малых $dt \ge 0$ можно задать формулой [2]:

$$D(t,u,dt) = \begin{cases} \sigma(t+dt) - \sigma(t), & \text{если } u \in (0,1), \\ \sigma(t+dt) - \max\limits_{t \le s \le t+dt} \sigma(s), & \text{если } u = 1, \\ \sigma(t+dt) - \min\limits_{t \le s \le t+dt} \sigma(s), & \text{если } u = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Поэтому для кусочно монотонных входов эта формула дает локальное точное выражение для приращения выходного сигнала. Следовательно, зависимость выхода преобразователя упора от кусочно монотонного входа глобально описывается сильными решениями уравнения (1), (4), в котором множество U возможных значений (t,u) есть $\mathcal{D}(\sigma) \times [0,1]$. В [2] показано, что уравнение упора является локально явным, глобально разрешимо и имеет только сильные решения.

7. СВЯЗЬ ОПЕРАТОРОВ УПОРА И ЛЮФТА

Для любого непрерывного на $[t_0, T)(T \le \infty)$ *входа* σ *сильные решения уравнения люфта* (1), (3) *с* $h = 1$ *и уравнения упора* (1), (4) *связаны соотношением*

$$v(t) + u(t) = \sigma(t) + 1, \quad (5)$$

где $v(t)$ *— решение уравнения люфта,* $u(t)$ *— уравнения упора.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что если $u_0 \in [0,1]$, то $v_0 = (\sigma(t_0) + 1 - u_0) \in [\sigma(t_0), \sigma(t_0) + 1]$, т. е. является допустимым. Предположим, что соотношение (5) выполнено не для всех $t \in [t_0, T)$, пусть t_1 — инфимум тех t, для которых оно не выполнено. Ввиду непрерывности слева решений локально явных уравнений $v(t_1) + u(t_1) = \sigma(t_1) + 1$. Обозначим через $\gamma_{t_1}^t v(t_1), \tilde{\gamma}_{t_1}^t u(t_1)$ квазипотоки, порожденные уравнениями люфта и упора соответственно. Тогда $v(t) = \gamma_{t_1}^t v(t_1), u(t) = \tilde{\gamma}_{t_1}^t u(t_1)$ на некотором промежутке $[t_1, t_1 + \delta)$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $u(t_1) = 1$, то $v(t_1) = \sigma(t_1)$, поэтому $u(t) = 1 + \sigma(t) - \max_{t_1 \le s \le t} \sigma(s), v(t) = \sigma(t_1) + \max_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1)$. Тогда при $t \in [t_1, t_1 + \delta)$ $v(t) + u(t) = 1 + \sigma(t)$, что противоречит определению инфимума.

Если $u(t_1) = 1$, то $v(t_1) = \sigma(t_1) + 1$, поэтому $u(t) = \sigma(t) - \min_{t_1 \le s \le t} \sigma(s), v(t) = \sigma(t_1) + 1 + \min_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1)$. Тогда также $v(t) + u(t) = 1 + \sigma(t)$ при $t \in [t_1, t_1 + \delta)$.

И, наконец, если $u(t_1) \in (0,1)$, то $v(t_1) = 1 + \sigma(t_1) - u(t_1) \in (\sigma(t_1), \sigma(t_1) + 1)$, поэтому $u(t) = u(t_1) + \sigma(t) - \sigma(t_1), v(t) = 1 + \sigma(t_1) - u(t_1)$. Следовательно, $v(t) + u(t) = 1 + \sigma(t)$.

Утверждение доказано.

8. УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА ОТНОСИТЕЛЬНО ВХОДНОЙ ФУНКЦИИ

Для любых непрерывных на $[t_0, T]$ *входов* $\sigma, \tilde{\sigma}$ *и допустимого начального значения* v_0 *соответствующие им решения* $v, \tilde{v}$ *уравнения люфта при* $t \in [t_0, T)$ *удовлетворяют условию:*

$$| v(t) - \tilde{v}(t) | \le \| \sigma - \tilde{\sigma} \|_{[t_0, t]}. \quad (6)$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие $t_1 \in [t_0, T)$ и $\delta_1 > 0$, что

$$|v(t_1)-\tilde{v}(t_1)|\le\|\sigma-\tilde{\sigma}\|_{[t_0,t_1]}. \qquad (7)$$

и при $t\in(t_1,t_1+\delta_1]$

$$|v(t)-\tilde{v}(t)|\le\|\sigma-\tilde{\sigma}\|_{[t_0,t]}. \qquad (8)$$

Так как уравнение люфта локально явное, то $v(t)=\gamma_{t_1}^t v(t_1), \tilde{v}(t)=\gamma_{t_1}^t\tilde{v}(t_1)$ на некотором промежутке $[t_1,t_1+\delta_2)$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Очевидно, $|v(t)-\tilde{v}(t)|>0$ при $t\in(t_1,t_1+\delta)$. Пусть для определенности $v(t)>\tilde{v}(t)$. Тогда из (7), (8) следует, что для любого $t\in(t_1,t_1+\delta)$ выполнено хотя бы одно из следующих неравенств: $v(t)>v(t_1)$ или $\tilde{v}(t)<\tilde{v}(t_1)$.

Если в некоторой точке t_2 выполнено неравенство $v(t)>v(t_1)$, то, как следует из (3), $v(t_1)=\sigma(t_1)$ и, следовательно, $v(t)=v(t_1)+ +\max\limits_{t_1\le s\le t}\sigma(s)-\sigma(t_1)=\max\limits_{t_1\le s\le t}\sigma(s)$ при $t\in[t_1,t_1+\delta)$. Тогда найдется такое $\tau\in(t_1,t_2]$, что $\max\limits_{t_1\le s\le t_2}\sigma(s)= =\sigma(\tau)=\max\limits_{t_1\le s\le\tau}\sigma(s)=v(\tau)$. Так как $\tilde{v}(\tau)\ge\sigma(\tau)$, то

$$v(\tau)-\tilde{v}(\tau)=\sigma(\tau)-\tilde{v}(\tau)\le$$
$$\le\sigma(\tau)-\tilde{\sigma}(\tau)\le\|\sigma-\tilde{\sigma}\|_{[t_0,\tau]}.$$

Получили противоречие.

Случай $\tilde{v}(t_2)<\tilde{v}(t_1)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

9. УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА ОТНОСИТЕЛЬНО ВХОДНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА УПОРА

Для любых непрерывных на $[t_0,T)$ *входов* $\sigma,\tilde{\sigma}$ *и допустимого начального значения* u_0 *соответствующие им решения* $u,\tilde{u}$ *уравнения* (4) *при* $t\in[t_0,T)$ *удовлетворяют условию:*

$$|u(t)-\tilde{u}(t)|\le 2\|\sigma-\tilde{\sigma}\|_{[t_0,t]}. \qquad (9)$$

Доказательство. Пользуясь связью между операторами упора и люфта, получаем

$$|u(t)-\tilde{u}(t)|=|\sigma(t)+1-v(t)-(\tilde{\sigma}(t)+1-\tilde{v}(t))|\le$$
$$\le|\sigma(t)-\tilde{\sigma}(t)|+|v(t)-\tilde{v}(t)|.$$

Отсюда с учетом предыдущей теоремы вытекает требуемое неравенство.

10. УТВЕРЖДЕНИЕ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МОДЕЛЕЙ

Математические модели люфта, предложенные в [1], *с.* 13 *и в п.* 3 *настоящей статьи эквивалентны для любых непрерывных входов. То же можно сказать и о моделях упора.*

Доказательство. Пусть σ — произвольный непрерывный вход, σ_n — последовательность кусочно монотонных функций, сходящаяся к σ при $n\to+\infty$, и φ_n — соответствующие им выходные функции, удовлетворяющие условию $\varphi_n(t_0)=u_0$ (по определению люфта выходы в обеих моделях для кусочно монотонных функций совпадают). Тогда, согласно модели [1], выходная функция φ оператора люфта, соответствующая σ, есть предел φ_n при $n\to+\infty$; согласно модели, предложенной в данной статье, выходная функция $\tilde{\varphi}$ есть решение задачи Коши (1), (2), (3). В силу условия Липшица относительно входной функции (п. 8) $|\tilde{\varphi}(t)-\varphi_n(t)|\le\|\sigma-\sigma_n\|_{[t_0,t]}$. Таким образом, $|\tilde{\varphi}(t)-\varphi_n(t)|\to 0$ при $n\to+\infty$, следовательно, $\tilde{\varphi}=\varphi$.

Отсюда и из связи между упором и люфтом вытекает эквивалентность моделей упора.

11. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО ЯВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приводимое в следующем пункте доказательство теоремы единственности для уравнения люфта использует следующую теорему, установленную в [2].

Пусть любое сильное решение φ *локально явного уравнения* (1) *продолжимо вправо до* T, *т. е. если* $s>T$ *и* $s\in\mathcal{D}(\varphi)$, *то* φ *продолжимо на* $[s,T)$ *как сильное решение. Пусть для семейства всех сильных решений этого уравнения выполнено условие Липшица в следующей форме: если* $t,p\in\mathcal{D}(\varphi)\cap\mathcal{D}(\psi)$ *и* $p\le t$, *то*

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|\le L(t,p)\|\varphi(p)-\psi(p)\|,$$

где функция $L:[t_0,T)\times[t_0,T)\to[0,+\infty)$ *ограниченна по второму аргументу на любом отрезке. Тогда любое решение этого уравнения является сильным и, следовательно, решение задачи Коши с любым допустимым начальным условием обладает свойством единственности вправо.*

12. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЮФТА

Любое решение уравнения люфта (1), (3) *является сильным.*

Доказательство. Как показано в п. 4, уравнение люфта является локально явным и все его сильные решения могут быть продолжены вправо до T — правой границы области определения входного сигнала σ. Поэтому в силу теоремы единственности для локально явных уравнений достаточно проверить, что для сильных решений уравнения люфта выполняется условие Липшица. Покажем, что условие Липшица выполняется с константой $L=1$, т. е. при $t\ge\tau$

$$|\varphi(t)-\psi(t)| \le |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|.$$

Если последнее неравенство выполнено не для всех $t \ge \tau$, то обозначим через t_1 инфимум тех t, для которых оно не выполнено (в самой точке t_1 неравенство выполняется в силу непрерывности слева решений локально явного уравнения). Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(t_1) > \psi(t_1)$.

Если $\varphi(t_1) = \sigma(t_1) + h$ и $\psi(t_1) \in (\sigma(t_1), \sigma(t_1) + h)$, то в некоторой правой δ-окрестности точки t_1 $\varphi(t) - \psi(t) = \varphi(t_1) + \min\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1) - \psi(t_1)$. Так как функция σ непрерывна, то мы можем выбрать δ так, чтобы $\sigma(t_1) - \min\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) < \varphi(t_1) - \psi(t_1)$. Тогда $|\varphi(t) - \psi(t)| = \left|\varphi(t_1) - \psi(t_1) - (\sigma(t_1) - \min\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s))\right| \le |\varphi(t_1) - \psi(t_1)|$. Таким образом,

$$|\varphi(t)-\psi(t)| \le |\varphi(t_1)-\psi(t_1)| \le |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|,$$

что противоречит определению инфимума.

Другие случаи ($\sigma(t_1) + h = \varphi(t_1) > \psi(t_1) = \sigma(t_1)$, $\sigma(t_1) + h > \varphi(t_1) > \psi(t_1) > \sigma(t_1)$, $\sigma(t_1) + h > \varphi(t_1) > \psi(t_1) = \sigma(t_1)$) рассматриваются аналогично.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А.* Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М.: Наука, — 1983.
2. *Прядко И.Н.* О локально явных моделях некоторых негладких систем / И. Н. Прядко, Б. Н. Садовский // Автоматика и телемеханика. — 2004. — №10. — С. 40—50.
3. *Kloeden P.E.* Quasi-flows and equations with nonlinear differentials / P. E. Kloeden, B. N. Sadovsky, I. E. Vasilyeva // Nonlinear Analysis TMA. — 2002. — 51. — P. 1143—1158.
4. *Панасюк А.И.* Квазидифференциальные уравнения в метрических пространствах / А. И. Панасюк // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 8. — С. 1344—1353.
5. *Садовский Б.Н.* О квазипотоках / Б. Н. Садовский // Тезисы докладов конференции 26—29 апреля. Воронеж: ВГУ. — 1995. — С.80.
6. *Pryadko I.N.* On locally explicit equations and systems with switching / I. N. Pryadko, B. N. Sadovsky // *FDE.* — 2006. — 13. — №3—4. — P. 571—584.