

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

Г. А. Курина, Н. В. Некрасова

Воронежский государственный университет

Для нелинейной сингулярно возмущенной дискретной задачи оптимального управления в случае условия периодичности для части переменных состояния и закрепленного левого конца для остальных переменных состояния построено асимптотическое разложение решения при помощи прямой схемы. Получены оценки близости приближенного решения к точному решению задачи. Доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим приближением управления.

ВВЕДЕНИЕ

За последние тридцать лет возрос интерес к сингулярно возмущенным задачам оптимального управления (см., например, обзоры [1]—[2]). Основная часть публикаций по этой тематике посвящена непрерывным системам, но многие задачи экономики, биологии, социологии описываются дискретными моделями (см., например, [4]). Кроме того, дискретные задачи возникают при численной реализации непрерывных задач оптимального управления.

В [3], [4] формальное асимптотическое разложение решения дискретной сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи с фиксированным левым концом и свободным правым построено с помощью асимптотического разложения решения системы, вытекающей из условий оптимальности управления. Метод построения асимптотического разложения решения задачи оптимального управления путем подстановки постулируемого асимптотического разложения решения в условия задачи и получения серии задач оптимального управления для нахождения коэффициентов разложения использовался в [5] для сингулярно возмущенной непрерывной системы без ограничений на управление. Этот метод был назван «прямой схемой».

Прямая схема использовалась для дискретных задач оптимального управления с малым шагом [6], для дискретных слабоуправляемых систем [7] и дискретной периодической сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи [8]. В [9] прямая схема использовалась

для непрерывной нелинейной периодической задачи оптимального управления с матричным сингулярным возмущением в уравнении состояния. В [10] при помощи прямой схемы построено асимптотическое разложение решения нелинейной дискретной сингулярно возмущенной периодической задачи оптимального управления.

Заметим, что, используя прямую схему, можно установить невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым новым приближением оптимального управления.

В настоящей статье при помощи прямой схемы строится асимптотика решения по неотрицательным степеням малого параметра для дискретной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в случае, когда для части переменных состояния фиксирован левый конец, а на остальные переменные состояния накладывается условие периодичности. При некоторых условиях доказано существование решения возмущенной задачи при достаточно малых значениях параметра, получены оценки близости построенного асимптотического решения рассматриваемой задачи к точному решению, установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании новых членов асимптотического разложения оптимального управления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача минимизации функционала

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = F_N(y(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} F_k(y(k), z(k), u(k)) \rightarrow \min_u \quad (1)$$

© Курина Г. А., Некрасова Н. В., 2006

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 06-01-00296, грант 05-06-80237а).

на траекториях системы

$$y(k+1) = f_k(y(k), z(k), u(k)), \quad (2)$$

$$\varepsilon z(k+1) = g_k(y(k), z(k), u(k)), k = \overline{0, N-1}$$

при заданных условиях

$$y(0) = y^0, z(0) = z(N). \quad (3)$$

Здесь $y(k) \in R^{n_1}, z(k) \in R^{n_2} (k = \overline{0, N})$ — компоненты фазовой траектории в момент времени $k, u(k) \in R^r (k = \overline{0, N-1})$ — управляющее воздействие в момент времени k, F_k — скалярные функции, f_k — функции со значениями в R^{n_1}, g_k — функции со значениями в $R^{n_2}, \varepsilon > 0$ — малый параметр, число шагов N фиксировано, y^0 — фиксированный вектор из пространства R^{n_1} . Функции F_k, f_k, g_k предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

2. ВЫРОЖДЕННАЯ ЗАДАЧА

Положив в задаче (1)–(3) $\varepsilon = 0$, получаем вырожденную задачу

$$\begin{aligned} \bar{P} : J(\bar{u}) = F_N(\bar{y}(N)) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} F_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)) \rightarrow \min_{\bar{u}} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{y}(k+1) = f_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)), \quad (5)$$

$$0 = g_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)), k = \overline{0, N-1},$$

$$\bar{y}(0) = y^0, \bar{z}(0) = \bar{z}(N). \quad (6)$$

Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 1. Система $0 = g_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)), k = \overline{0, N-1}$ однозначно разрешима относительно $\bar{z}(k)$ при любых $\bar{u}(k), \bar{y}(k), k = \overline{0, N-1}$.

В силу условия 1 задачу \bar{P} можно преобразовать в задачу оптимального управления относительно управления \bar{u} и состояния \bar{y} .

Гамильтониан $\bar{H}(k)$ для задачи \bar{P} задается формулой

$$\begin{aligned} \bar{H}(k) = -F_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)) + \\ + \bar{p}'(k+1)f_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)) + \\ + \bar{q}'(k+1)g_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)), \end{aligned}$$

где переменные \bar{p}, \bar{q} , сопряженные к переменным \bar{y} и \bar{z} соответственно, удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \bar{p}(k) = \left(\frac{\partial \bar{H}(k)}{\partial \bar{y}(k)} \right)' = -(F_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{y}} + \\ + (f_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{y}} \bar{p}(k+1) + \\ + (g_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{y}} \bar{q}(k+1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 0 = \left(\frac{\partial \bar{H}(k)}{\partial \bar{z}(k)} \right)' = -(F_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{z}} + \\ + (f_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{z}} \bar{p}(k+1) + \\ + (g_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{z}} \bar{q}(k+1), k = \overline{0, N-1}, \\ \bar{p}(0) = -(F_N)'_{\bar{y}}, \bar{q}(0) = \bar{q}(N). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование, а выражения вида $(f)_{\bar{y}}, (f)_{\bar{z}}, (f)_{\bar{u}}$ означают производные функции f по переменным $\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)$ соответственно.

Условие оптимальности управления для задачи \bar{P} имеет вид

$$\begin{aligned} -(F_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{u}} + \\ + (f_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{u}} \bar{p}(k+1) + \\ + (g_k(\bar{y}(k), \bar{z}(k), \bar{u}(k)))'_{\bar{u}} \bar{q}(k+1) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 2. Задача \bar{P} имеет единственное решение y_0, z_0, u_0 .

3. ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ

Решение возмущенной задачи (1)–(3) будем искать в виде рядов

$$\begin{aligned} y(k) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j y_j(k), \quad z(k) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j z_j(k), \\ u(k) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j u_j(k). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим соотношения (10) в задачу (1)–(3). Разложим правые части в (1), (2) в ряд по степеням малого параметра, затем приравняем в (2), (3) коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате минимизируемый функционал запишется в виде ряда

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j J_j, \quad (11)$$

а из (2), (3) получим равенства для коэффициентов разложения (10)

$$y_0(k+1) = \bar{f}_k, 0 = \bar{g}_k, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_j(k+1) = (\bar{f}_k)_{\bar{y}} y_j(k) + \\ + (\bar{f}_k)_{\bar{u}} u_j(k) + (\bar{f}_k)_{\bar{z}} z_j(k) + [\bar{f}_k]_j, \\ z_{j-1}(k+1) = (\bar{g}_k)_{\bar{y}} y_j(k) + (\bar{g}_k)_{\bar{u}} u_j(k) + \end{aligned} \quad (13)$$

$$+ (\bar{g}_k)_{\bar{z}} z_j(k) + [\bar{g}_k]_j, j > 1.$$

$$y_0(0) = y^0, y_j(0) = 0, j \geq 1.$$

$$z_j(0) = z_j(N), j \geq 0. \quad (14)$$

Здесь и далее черта сверху означает, что значения соответствующих функций и их про-

изводных вычисляются при $y(k) = y_0(k)$, $z(k) = z_0(k)$, $u(k) = u_0(k)$, волна сверху означает, что значения функции вычисляются при $y(k) = \tilde{y}_{j-1}(k)$, $z(k) = \tilde{z}_{j-1}(k)$, $u(k) = \tilde{u}_{j-1}(k)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j-1}(k) &= \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i y_i(k), \quad \tilde{z}_{j-1}(k) = \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i z_i(k), \\ \tilde{u}_{j-1}(k) &= \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i u_i(k). \end{aligned} \quad (15)$$

Для разложения произвольной функции $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ по степеням малого параметра ε используем следующие обозначения:

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \varphi_j = \{\varphi\}_{n-1} + \varepsilon^n [\varphi]_n + \alpha(\varepsilon^{n+1}), \quad (16)$$

где $[\varphi]_n = \varphi_n$, $\{\varphi\}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \varphi_i$, а выражение $\alpha(\varepsilon^{n+1})$ означает сумму членов разложения порядка ε^{n+1} и выше.

Первые три коэффициента из разложения (11) имеют вид:

$$\begin{aligned} J_0 &= \bar{F}_N + \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}_k, \quad J_1 = (\bar{F}_N)_y y_1(N) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} ((\bar{F}_k)_y y_1(k) + (\bar{F}_k)_z z_1(k) + (\bar{F}_k)_u u_1(k)), \\ J_2(u) &= (\bar{F}_N)_y y_2(N) + \frac{1}{2} (\bar{F}_N)_{yy} y_1^2(N) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} ((\bar{F}_k)_y y_2(k) + (\bar{F}_k)_u u_2(k) + (\bar{F}_k)_z z_2(k) + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{yy} y_1^2(k) + (\bar{F}_k)_{yz} y_1(k) z_1(k) + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{zz} z_1^2(k) + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{uu} u_1^2(k) + \\ &+ (\bar{F}_k)_{zu} z_1(k) u_1(k) + (\bar{F}_k)_{yu} y_1(k) u_1(k)). \end{aligned}$$

Для определения тройки функций $y_0(k)$, $z_0(k)$, $u_0(k)$ рассмотрим задачу P_0 , которая заключается в минимизации функционала J_0 на траекториях системы (12) при условиях (14). Очевидно, что задача P_0 совпадает с вырожденной задачей \bar{P} .

Используя соотношения (7)–(9), (13), (14), преобразуем слагаемые из выражения коэффициента J_1 , оставшиеся неизвестными после решения задачи P_0 . Обозначая через p_0, q_0 сопряженные переменные в задаче P_0 , в результате преобразований получим

$$\begin{aligned} (\bar{F}_N)_y y_1(N) + \sum_{k=0}^{N-1} ((\bar{F}_k)_y y_1(k) + \\ + (\bar{F}_k)_u u_1(k) + (\bar{F}_k)_z z_1(k)) = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} q'_0(k+1) z_0(k+1). \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент J_1 оказывается известным после решения задачи P_0 .

Аналогично для части слагаемых из выражения для J_2 имеем

$$\begin{aligned} (\bar{F}_N)_y y_2(N) + \sum_{k=0}^{N-1} ((\bar{F}_k)_y y_2(k) + \\ + (\bar{F}_k)_u u_2(k) + (\bar{F}_k)_z z_2(k)) = \\ = - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} (p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{yy} + \right. \\ \left. + q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{yy}) y_1^2(k) + \frac{1}{2} (p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{zz} + \right. \\ \left. + q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{zz}) z_1^2(k) + \frac{1}{2} (p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{uu} + \right. \\ \left. + q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{uu}) u_1^2(k) + (p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{yz} + \right. \\ \left. + q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{yz}) y_1(k) z_1(k) + (p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{yu} + \right. \\ \left. + q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{yu}) y_1(k) u_1(k) + (p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{zu} + \right. \\ \left. + q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{zu}) z_1(k) u_1(k) + q'_0(k) z_1(k) \right). \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства обозначим через \tilde{J}_1 сумму слагаемых в выражении для J_2 , оставшихся неизвестными после решения задачи P_0 .

Для нахождения коэффициентов $y_1(k)$, $z_1(k)$, $u_1(k)$ рассмотрим линейно-квадратичную задачу P_1 :

$$\begin{aligned} P_1 : \tilde{J}_1(u_1) &= \frac{1}{2} y'_1(N) S y_1(N) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} y'_1(k) W_k y_1(k) + \frac{1}{2} u'_1(k) R_k u_1(k) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} z'_1(k) V_k z_1(k) + y'_1(k) N_k u_1(k) + y'_1(k) L_k z_1(k) + \\ &+ z'_1(k) M_k u_1(k) + q'_0(k) z_1(k) \left. \right) \rightarrow \min_{u_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= (\bar{f}_k)_y y_1(k) + (\bar{f}_k)_z z_1(k) + \\ &+ (\bar{f}_k)_u u_1(k) + [\bar{f}_k]_1, \\ z_0(k+1) &= (\bar{g}_k)_y y_1(k) + (\bar{g}_k)_z z_1(k) + \\ &+ (\bar{g}_k)_u u_1(k) + [\bar{g}_k]_1, \quad k = \overline{0, N-1}, \end{aligned}$$

$$y_1(0) = 0, \quad z_1(0) = z_1(N) \quad (18)$$

в которой использованы следующие обозначения:

$W_k = (\bar{F}_k)_{yy} - p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{yy} - q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{yy}$ — матрица размерности $n_1 \times n_1$,
 $N_k = (\bar{F}_k)_{yu} - p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{yu} - q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{yu}$ — матрица размерности $n_1 \times r$,
 $R_k = (\bar{F}_k)_{uu} - p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{uu} - q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{uu}$ — матрица размерности $r \times r$,
 $V_k = (\bar{F}_k)_{zz} - p'_0(k+1) (\bar{f}_k)_{zz} - q'_0(k+1) (\bar{g}_k)_{zz}$ — матрица размерности $n_2 \times n_2$,

$L_k = (\bar{F}_k)_{yz} - p'_0(k+1)(\bar{f}_k)_{yz} - q'_0(k+1)(\bar{g}_k)_{yz}$ — матрица размерности $n_1 \times n_2$,
 $M_k = (\bar{F}_k)_{zu} - p'_0(k+1)(\bar{f}_k)_{zu} - q'_0(k+1)(\bar{g}_k)_{zu}$ — матрица размерности $n_2 \times r$,
 $S = (\bar{F}_N)_{yy}$ — матрица размерности $n_1 \times n_1$.

Выражения для матриц $W_k, R_k, V_k, M_k, N_k, L_k, S$ зависят только от решения задачи P_0 . Если матрицы $(\bar{g}_k)_z$ обратимы при $k = 0, N-1$, то, выразив из второго уравнения системы (17) переменную $z_1(k)$ через переменные $y_1(k), u_1(k)$ и подставив полученные выражения в первое уравнение системы (17) и функционал $\tilde{J}_1(u_1)$, получаем из задачи P_1 задачу оптимального управления относительно управления u_1 и состояния y_1 .

Далее будем предполагать, что выполняются следующие условия.

Условие 3. Матрицы $R_k, k = \overline{0, N-1}$ положительно определены.

Матрица С матрицы $G_k = \begin{pmatrix} W_k & L_k & N_k \\ L'_k & V_k & M_k \\ N'_k & M'_k & R_k \end{pmatrix}$,

$k = \overline{0, N-1}$ размерности $(n_1 + n_2 + r) \times (n_1 + n_2 + r)$ положительно полуопределены.

Условие 4. Матрицы $(\bar{g}_k)_z - (\bar{g}_k)_u R_k^{-1} M'_k, k = \overline{0, N-1}$ размерности $n_2 \times n_2$ невырождены.

Равенство, вытекающее из условия оптимальности управления в задаче P_1 , имеет вид

$$-(\bar{f}_k)'_u p_1(k+1) - (\bar{g}_k)'_u q_1(k+1) + N'_k y_1(k) + M'_k z_1(k) + R_k u_1(k) = 0, \quad (19)$$

где переменные p_1, q_1 удовлетворяют равенствам

$$p_1(k) = -W_k y_1(k) - L_k z_1(k) - N_k u_1(k) + (\bar{f}_k)'_y p_1(k+1) + (\bar{g}_k)'_y q_1(k+1), \quad (20)$$

$$0 = -L'_k y_1(k) - V_k z_1(k) - M_k u_1(k) + (\bar{f}_k)'_z p_1(k+1) + (\bar{g}_k)'_z q_1(k+1) - q_0(k),$$

$$p_1(N) = -S y_1(N), \quad q_1(0) = q_1(N). \quad (21)$$

Запишем гамильтониан для задачи P_ε

$$H(k) = -F_k(y(k), z(k), u(k)) + p'(k+1)f_k(y(k), z(k), u(k)) +$$

$$+ q'(k+1)g_k(y(k), z(k), u(k)), \quad k = \overline{0, N-1}$$

где переменные p, q удовлетворяют равенствам

$$p(k) = \left(\frac{\partial H(k)}{\partial y} \right)' = -(F_k(y(k), z(k), u(k)))'_y +$$

$$+(f_k(y(k), z(k), u(k)))'_y p(k+1) + (g_k(y(k), z(k), u(k)))'_y q(k+1), \quad (22)$$

$$\varepsilon q(k) = \left(\frac{\partial H(k)}{\partial z} \right)' = -(F_k(y(k), z(k), u(k)))'_z + (f_k(y(k), z(k), u(k)))'_z p(k+1) + (g_k(y(k), z(k), u(k)))'_z q(k+1), \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$p(N) = -(F_N(y(N)))'_y, \quad q(0) = q(N). \quad (23)$$

Поскольку на управление не накладывается ограничений типа замкнутых неравенств, то необходимое условие оптимальности управления для задачи P_ε имеет вид:

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u} = -(F_k(y(k), z(k), u(k)))'_u + p'(k+1)(f_k(y(k), z(k), u(k)))'_u + q'(k+1)(g_k(y(k), z(k), u(k)))'_u = 0, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (24)$$

Перейдем к высшим приближениям. Рассмотрим задачи $P_j (j \geq 0)$. При $j = 0, 1$ задачи P_0, P_1 определены ранее, а при $j > 1$ P_j — есть линейно-квадратичные задачи следующего вида

$$\tilde{J}_j(u_j) = \frac{1}{2} y'_j(N) S y_j(N) + [(\tilde{F}_N)_y]_j y_j(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} y'_j(k) W_k y_j(k) + \frac{1}{2} z'_j(k) V_k z_j(k) + \frac{1}{2} u'_j(k) R_k u_j(k) + y'_j(k) N_k u_j(k) + y'_j(k) L_k z_j(k) + z'_j(k) M_k u_j(k) + [(\tilde{F}_k)_y]_j y_j(k) - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_y - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_y \right] y_j(k) +$$

$$+ [(\tilde{F}_k)_z - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_z - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_z]_j y_j(k) + q_{j-1}(k) z_j(k) + [(\tilde{F}_k)_u - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_u - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_u]_j u_j(k) \rightarrow \min_{u_j},$$

$$y_j(k+1) = (\bar{f}_k)_y y_j(k) + (\bar{f}_k)_u u_j(k) + (\bar{f}_k)_z z_j(k) + [\tilde{f}_k]_j,$$

$$z_{j-1}(k+1) = (\bar{g}_k)_y y_j(k) + (\bar{g}_k)_u u_j(k) + (\bar{g}_k)_z z_j(k) + [\tilde{g}_k]_j, \quad (26)$$

$$y_j(0) = 0, \quad z_j(0) = z_j(N). \quad (27)$$

Здесь функции $\tilde{p}_{j-1}, \tilde{q}_{j-1}$ определяются равенствами

$$\tilde{p}_{j-1}(k) = \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i p_i(k), \quad \tilde{q}_{j-1}(k) = \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i q_i(k), \quad (28)$$

где p_i, q_i сопряженные переменные в задаче P_i .

Если матрицы $(\bar{g}_k)_z$ обратимы при $k = \overline{0, N-1}$, то из задачи P_j можно получить задачу оптимального управления относительно управления u_j и состояния y_j .

Запишем гамильтониан для задачи P_j ($j > 1$)

$$\begin{aligned}
 H_j(k) = & -\frac{1}{2} y'_j(k) W_k y_j(k) - \frac{1}{2} u'_j(k) R_k u_j(k) - \\
 & -\frac{1}{2} z'_j(k) V_k z_j(k) - y'_j(k) N_k u_j(k) - y'_j(k) L_k z_j(k) - \\
 & -z'_j(k) M_k u_j(k) - [(\tilde{F}_k)_y - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_y - \\
 & -\tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_y]_j y_j(k) - ([(\tilde{F}_k)_z - \\
 & -\tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_z - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_z]_j + \\
 & + q_{j-1}(k) z_j(k) - [(\tilde{F}_k)_u - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_u - \\
 & -\tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_u]_j u_j(k) + p'_j(k+1)(\tilde{f}_k)_y y_j(k) + \\
 & + (\bar{f}_k)_z z_j(k) + (\bar{f}_k)_u u_j(k) + [\tilde{f}_k]_j + \\
 & + q'_j(k+1)(\bar{g}_k)_y y_j(k) + (\bar{g}_k)_z z_j(k) + \\
 & + (\bar{g}_k)_u u_j(k) + [\tilde{g}_k]_j,
 \end{aligned}$$

где переменные p_j, q_j удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned}
 p_j(k) = (H_j(k))'_{y_j} = & -W_k y_j(k) - N_k u_j(k) - \\
 & -L_k z_j(k) - [(\tilde{F}_k)'_y - (\tilde{f}_k)'_y \tilde{p}_{j-1}(k+1) - \\
 & -(\tilde{g}_k)'_y \tilde{q}_{j-1}(k+1)]_j + (\bar{f}_k)'_y p_j(k+1) + \\
 & + (\bar{g}_k)'_y q_j(k+1),
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 q_{j-1}(k) = (H_j(k))'_{z_j} = & -L'_k y_j(k) - M_k u_j(k) - \\
 & -V_k z_j(k) - [(\tilde{F}_k)'_z - (\tilde{f}_k)'_z \tilde{p}_{j-1}(k+1) - \\
 & -(\tilde{g}_k)'_z \tilde{q}_{j-1}(k+1)]_j + (\bar{f}_k)'_z p_j(k+1) + \\
 & + (\bar{g}_k)'_z q_j(k+1), \quad k = \overline{0, N-1},
 \end{aligned}$$

$$p_j(N) = -S y_j(N) - [(\tilde{F}_N)'_y]_j, \quad q_j(0) = q_j(N). \tag{30}$$

Условие оптимальности управления для задачи P_j ($j > 1$) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (H_j(k))_{u_j} = & -R_k u_j(k) - N'_k y_j(k) - \\
 & -M'_k z_j(k) - [(\tilde{F}_k)'_u - (\tilde{f}_k)'_u \tilde{p}_{j-1}(k+1) - \\
 & -(\tilde{g}_k)'_u \tilde{q}_{j-1}(k+1)]_j + (\bar{f}_k)'_u p_j(k+1) + \\
 & + (\bar{g}_k)'_u q_j(k+1) = 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Подставив соотношения (10) и

$$p(k) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j p_j(k), \quad q(k) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j q_j(k). \tag{32}$$

в выражения (2), (3), (22)–(24) и приравняв в полученных соотношениях коэффициенты

при одинаковых степенях ε , получим равенства (5)–(9) при $j=0$ и равенства (19)–(21) при $j=1$.

Теорема 1. Уравнения системы для состояния, управления и сопряженных переменных, полученной с помощью необходимого условия оптимальности управления для задачи P_n , $n \geq 0$, совпадают с уравнениями для y_n, z_n, u_n, p_n, q_n из асимптотики (10) и (32) решения задачи (2), (3), (22)–(24), полученной из условия оптимальности управления для задачи P_ε .

Доказательство теоремы проводится методом математической индукции аналогично доказательству подобной теоремы в [7].

Теорема 2. Коэффициент J_{2m-1} в разложении (11) известен после решения задач P_i ($i = 0, m-1, m \geq 1$), из которых находятся y_i, z_i, u_i . Преобразованное выражение для коэффициента J_{2m} в разложении (11) после отбрасывания членов, известных в результате решения P_i ($i = 0, m-1, m \geq 1$), совпадает с критерием качества $\tilde{J}_m(u_m)$ в задаче P_m .

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. При $m=1$ утверждение теоремы уже доказано. Предположим, что оно верно при $1 \leq m < n$.

Преобразуем выражение для $J_\varepsilon(u)$, заменяя y, z, u их представлениями $y(k) = \tilde{y}_{n-1}(k) + \Delta y(k)$, $z(k) = \tilde{z}_{n-1}(k) + \Delta z(k)$, $u(k) = \tilde{u}_{n-1}(k) + \Delta u(k)$.

Получим

$$\begin{aligned}
 J_\varepsilon(u) = & \tilde{F}_N + (\tilde{F}_N)_y \Delta y(N) + \\
 & + \varepsilon^{2n} \frac{1}{2} (\bar{F}_N)_{yy} y_n^2(N) + \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{F}_k + (\tilde{F}_k)_y \Delta y(k) + \\
 & + (\tilde{F}_k)_z \Delta z(k) + (\tilde{F}_k)_u \Delta u(k) + \varepsilon^{2n} \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{yy} y_n^2(k) + \\
 & + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{uu} u_n^2(k) + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{zz} z_n^2(k) + (\bar{F}_k)_{uy} u_n(k) y_n(k) + \\
 & + (\bar{F}_k)_{uz} u_n(k) z_n(k) + (\bar{F}_k)_{zy} z_n(k) y_n(k) + \alpha(\varepsilon^{2n+1}).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Далее, используя обозначения (16), из (33), (22)–(24) имеем

$$\begin{aligned}
 J_\varepsilon(u) = & \{\tilde{F}_N\}_{2n} + \{(\tilde{F}_N)_y\}_{n-1} \Delta y(N) + \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon^{2n} (\bar{F}_N)_{yy} y_n^2(N) + \sum_{k=0}^{N-1} (\{\tilde{F}_k\}_{2n} + \\
 & + \{(\tilde{F}_k)_y\}_{n-1} \Delta y(k) + \{(\tilde{F}_k)_z\}_{n-1} \Delta z(k) + \\
 & + \{(\tilde{F}_k)_u\}_{n-1} \Delta u(k) + \varepsilon^{2n} ([(\tilde{F}_k)_y]_n y_n(k) + \\
 & + [(\tilde{F}_k)_z]_n z_n(k) + [(\tilde{F}_k)_u]_n u_n(k) + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{yy} y_n^2(k) + \\
 & + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{zz} z_n^2(k) + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{uu} u_n^2(k) + \\
 & + (\bar{F}_k)_{uz} u_n(k) z_n(k) + (\bar{F}_k)_{zy} z_n(k) y_n(k) + \\
 & + (\bar{F}_k)_{yu} y_n(k) u_n(k) + \alpha(\varepsilon^{2n+1}),
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \{(\tilde{F}_k)_y\}_{n-1} &= -\tilde{p}'_{n-1}(k) + \{\tilde{p}'_{n-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_y + \\ &\quad + \tilde{q}'_{n-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_y\}_{n-1}, \\ \{(\tilde{F}_k)_z\}_{n-1} &= -\varepsilon \tilde{q}'_{n-2}(k) + \{\tilde{p}'_{n-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_z + \\ &\quad + \tilde{q}'_{n-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_z\}_{n-1}, \\ \tilde{p}_{n-1}(N) &= \{(\tilde{F}_N)_y\}_{n-1}, \quad \tilde{q}_{n-1}(0) = \tilde{q}_{n-1}(N), \\ \{(\tilde{F}_k)_u\}_{n-1} &= \{\tilde{p}'_{n-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_u + \\ &\quad + \tilde{q}'_{n-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_u\}_{n-1}. \end{aligned}$$

Из (34) с учетом последних четырех равенств и соотношений (2), (3) следует

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \sum_{k=0}^{N-1} (\{\tilde{F}_k + \tilde{p}'_{n-1}(k+1)(\tilde{g}_{n-1}(k+1) - \\ &\quad - \tilde{f}_k) + \tilde{q}'_{n-1}(k+1)(\varepsilon \tilde{z}_{n-1}(k+1) - \tilde{g}_k)\}_{2n} + \\ &\quad + \varepsilon^{2n} (\frac{1}{2} y'_j(N) S y_j(N) + [(\tilde{F}_N)_y]_j y_j(N) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{1}{2} y'_j(k) W_k y_j(k) + \frac{1}{2} z'_j(k) V_k z_j(k) + \\ &\quad + \frac{1}{2} u'_j(k) R_k u_j(k) + y'_j(k) N_k u_j(k) + y'_j(k) L_k z_j(k) + \\ &\quad + z'_j(k) M_k u_j(k) + [(\tilde{F}_k)_y - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_y - \\ &\quad - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_y]_j y_j(k) + ([(\tilde{F}_k)_z - \\ &\quad - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_z - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_z]_j + \\ &\quad + q_{j-1}(k) z_j(k) + [(\tilde{F}_k)_u - \tilde{p}'_{j-1}(k+1)(\tilde{f}_k)_u - \\ &\quad - \tilde{q}'_{j-1}(k+1)(\tilde{g}_k)_u]_j u_j(k)). \end{aligned}$$

Из последнего выражения очевидно, что J_{2n} известен после решения задач P_i ($i = \overline{0, n-1}$). Сумма членов в J_{2n} , зависящих от $y_n(k)$, $z_n(k)$, $u_n(k)$, совпадает с критерием качества $\tilde{J}_n(u_n)$ в задаче P_n (см. (25) при $j=n$). Теорема 2 доказана.

4. ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Предположим, что найдены решения задач P_i , $i = \overline{0, n}$: $y_i(k)$, $z_i(k)$, $u_i(k)$.

Докажем однозначную разрешимость задачи P_ε в окрестности решения вырожденной задачи и оценим близость приближенного решения $\tilde{y}_n(k)$, $\tilde{z}_n(k)$, $\tilde{u}_n(k)$ (см. выражения (15) при $j=n+1$) к точному решению задачи.

Теорема 3. При предположениях 1—4 и достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача P_ε однозначно разрешима в окрестности управления u_0 и для ее решения u^* , y^* , z^* справедливы оценки

$$\begin{aligned} u^*(k) - \tilde{u}_n(k) &= O(\varepsilon^{n+1}), \\ y^*(k) - \tilde{y}_n(k) &= O(\varepsilon^{n+1}), \\ z^*(k) - \tilde{z}_n(k) &= O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned} \quad (35)$$

$$J_\varepsilon(u^*) - J_\varepsilon(\tilde{u}_n) = O(\varepsilon^{2n+2}). \quad (36)$$

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме.

На первом шаге, используя лемму 1 из [9], доказывается, что при предположениях 2, 3, 4 и достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (2), (3), (22) — (24) имеет единственное решение $(y^*, z^*, u^*, p^*, q^*)$ в окрестности $(\tilde{y}_n(k), \tilde{z}_n(k), \tilde{u}_n(k), \tilde{p}_n(k), \tilde{q}_n(k))$ и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|y^*(k) - \tilde{y}_n(k)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \\ \|z^*(k) - \tilde{z}_n(k)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \\ \|u^*(k) - \tilde{u}_n(k)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \\ \|p^*(k) - \tilde{p}_n(k)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \\ \|q^*(k) - \tilde{q}_n(k)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \end{aligned}$$

где c не зависит от k и ε .

На втором шаге доказывается, что при предположениях 1—4 для любого $\gamma > 0$ существуют константы $\varepsilon_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ задача (2), (3) при $u(k)$ из γ -окрестности управления $u^*(k)$ имеет единственное решение $y(k)$, $z(k)$ и справедливы неравенства

$$\|y^*(k) - y(k)\| \leq c \|u^*(k) - u(k)\|,$$

$$\|z^*(k) - z(k)\| \leq c \|u^*(k) - u(k)\|, \quad k = \overline{0, N},$$

где константа c не зависит от ε .

На третьем шаге доказывается, что при предположениях 1—4 и достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция u^* является локально оптимальным управлением для задачи P_ε .

На последнем шаге с учетом полученных выше результатов доказывается справедливость утверждения теоремы.

Теорема 4. При условиях 1—4 и достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_i) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (37)$$

где $\tilde{u}_i = \sum_{j=0}^i \varepsilon^j u_j$, при $u_i \neq 0$ в (37) имеет место знак строгого неравенства.

Доказательство. При $u_i(k) = 0$, $k = \overline{0, N-1}$ неравенство (37) очевидно. Рассмотрим случай, когда $u_i \neq 0$. Разложим в ряд по целым неотрицательным степеням ε решение задачи (2), (3) при $u(k) = \tilde{u}_s(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, $s = i-1, i$. Тогда в соответствии с алгоритмом для нахождения коэффициентов разложения (10) решение имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^s \varepsilon^j y_j(k) + O(\varepsilon^{s+1}), \quad \sum_{j=0}^s \varepsilon^j z_j(k) + O(\varepsilon^{s+1}).$$

Раскладывая $J_\varepsilon(\tilde{u}_s)$ ($s = i - 1, i$) в ряд (11), с учетом теоремы 2, получим

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_i) = \sum_{j=0}^{2i-1} \varepsilon^j J_j + \varepsilon^{2i} (\widehat{J}_{2i} + \tilde{J}_i(u_i)) + O(\varepsilon^{2i+1}), \quad (38)$$

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_{i-1}) = \sum_{j=0}^{2i-1} \varepsilon^j J_j + \varepsilon^{2i} (\widehat{J}_{2i} + \tilde{J}_i(0)) + O(\varepsilon^{2i+1}), \quad (39)$$

где \widehat{J}_{2i} зависит от y_j, z_j, u_j ($j = \overline{0, i-1}$).

Так как u_i является решением линейно-квадратичной задачи P_i , заключающейся в минимизации функционала $\tilde{J}_i(u_i)$, то в силу единственности оптимального управления при $u_i \neq 0$ получаем $J_i(\tilde{u}_i) < J_i(0)$.

С учетом последнего неравенства при достаточно малых $\varepsilon > 0$ из равенств (38), (39) следует неравенство (37). Таким образом, доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим приближением оптимального управления. Теорема 4 доказана.

5. ПРИМЕР

При помощи прямой схемы построим нулевое и первое приближения решения следующей задачи

$$J_\varepsilon(u) = -4y(7) + \sum_{k=0}^6 (u^2(k) + 0.5 \cos u(k) - 10u(k) + (z(k) - 0.5y(k)) \sin(\pi k / 4)) \rightarrow \min_u,$$

$$y(k+1) = 2y(k) + z(k) + u(k), \quad (40)$$

$$\varepsilon z(k+1) = -3y(k) - 2z(k) - 2u(k), \quad k = \overline{0, 6},$$

$$y(0) = 3, \quad z(0) = z(7). \quad (41)$$

Для нахождения тройки функций (y_0, z_0, u_0) решим задачу

$$P_0 : J_0(u_0) = -4y_0(7) + \sum_{k=0}^6 (u_0^2(k) +$$

$$+ 0.5 \cos u_0(k) - 10u_0(k) + (z_0(k) - 0.5y_0(k)) \sin(\pi k / 4)) \rightarrow \min_{u_0},$$

$$y_0(k+1) = 2y_0(k) + z_0(k) + u_0(k),$$

$$0 = -3y_0(k) - 2z_0(k) - 2u_0(k), \quad k = \overline{0, 6},$$

$$y_0(0) = 3, \quad z_0(0) = z_0(7).$$

Для нахождения тройки функций (y_1, z_1, u_1) решим задачу

$$P_1 : \tilde{J}_1(u_1) = \sum_{k=0}^6 (u_1^2(k)(1 - 0.25 \cos(u_0(k))) + q_0'(k)z_1(k)) \rightarrow \min_{u_1},$$

$$y_1(k+1) = 2y_1(k) + z_1(k) + u_1(k),$$

$$z_0(k+1) = -3y_1(k) - 2z_1(k) - 2u_1(k), \quad k = \overline{0, 6},$$

$$y_1(0) = 0, \quad z_1(0) = z_1(7).$$

Используя компьютерную программу Mathcad, с точностью до 10^{-6} найдем численное решение задачи P_ε при $\varepsilon = 0.1$ и обозначим его (y^*, z^*, u^*) . Найдя численные решения задач P_0, P_1 , построим нулевое и первое приближения

Таблица 1

Значения управления

k	0	1	2	3	4	5	6
$u_0(k)$	4.750178	5.124482	5.290646	5.124482	4.750178	4.407943	4.273675
$\tilde{u}_1(k)$	4.876370	5.198920	5.343440	5.126168	4.714486	4.375053	4.289656
$u^*(k)$	4.877343	5.199581	5.342510	5.121315	4.710929	4.375261	4.292712

Таблица 2

Значения переменной y

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_0(k)$	3	1.5	0.75	0.375	0.1875	0.09375	0.046875	0.023438
$\tilde{y}_1(k)$	3	1.868724	1.255144	0.911921	0.707532	0.581194	0.507797	0.716407
$y^*(k)$	3	1.883859	1.290113	0.959064	0.759292	0.634310	0.550602	0.724975

Таблица 3

Значения переменной z

k	$z_0(k)$	$\tilde{z}_1(k)$	$z^*(k)$
0	-9.250178	-9.007646	-8.993483
1	-7.374482	-7.681224	-7.677187
2	-6.415646	-6.941808	-6.963673
3	-5.686982	-6.242478	-6.280151
4	-5.031428	-5.548356	-5.595203
5	-4.548568	-5.029645	-5.093280
6	-4.343988	-4.588842	-4.668941
7	-9.250178	-9.007646	-8.993483

решения задачи P_ε при $\varepsilon = 0.1$, обозначим их (y_0, z_0, u_0) и $(\tilde{y}_1, \tilde{z}_1, \tilde{u}_1)$ соответственно (см. соотношения (15)). Значения точного решения задачи, а также нулевого и первого приближения решения представлены в табл. 1—3.

Для наглядного сравнения точного решения с нулевым и первым приближением на рис. представлены соответствующие графики для переменной y .

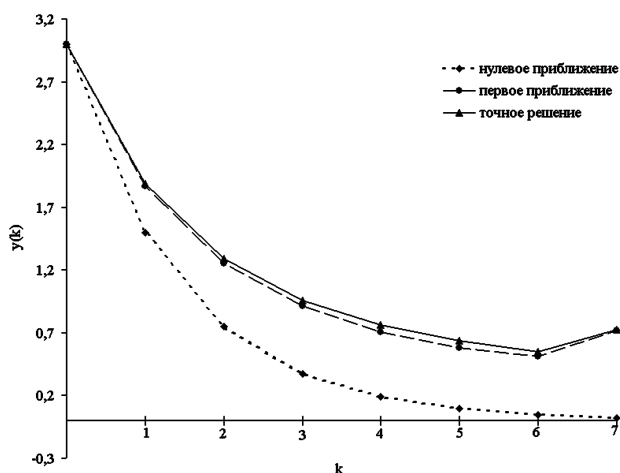


Рис. Сравнение точного решения с нулевым и первым приближением для переменной состояния y

Подставив последовательно в систему (40), (41) управления u_0, \tilde{u}_1 и найдя соответствующие им траектории, вычислим значения функционала $J(u_0), J(\tilde{u}_1)$. Результаты сравнения полученных значений функционала со значением $J_\varepsilon(u^*)$ представлены в табл. 4.

Таблица 4

Сравнение значений функционала

Функционал	Значения функционала при $\varepsilon = 0.1$
$J_\varepsilon(u_0)$	-185.98621360
$J_\varepsilon(\tilde{u}_1)$	-186.01225707
$J_\varepsilon(u^*)$	-186.01230329

Данные в табл. 4 согласуются с неравенством (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. Naidu D.S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview / D. S. Naidu // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms. — 2002. — V. 9. — P. 233—278.

2. Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3—51.

3. Naidu D.S. Singular perturbation analysis of discrete control systems / D. S. Naidu, A. K. Rao. Lect. Notes Math, 1985. — V. 1154.

4. Naidu D.S. Singular Perturbation Methodology in Control Systems / D. S. Naidu // IEE control engineering series, 34. — 1988.

5. Belokopytov S.V. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions / S. V. Belokopytov, M. G. Dmitriev // Systems and Control Letters. — 1986. — V. 8, № 2. — P. 129—135.

6. Гаипов М.А. Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (формализм) I / М. А. Гаипов // Известия АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН. — 1990. — №1. — С. 9—16.

7. Курина Г.А. Асимптотика решения задач оптимального управления для дискретных слабоуправляемых систем / Г. А. Курина // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, Вып. 2. — С. 214—227.

8. Kurina G.A. Asymptotic Solution of Discrete Periodic Singularly Perturbed Linear-Quadratic Problem / G. A. Kurina, N. V. Nekrasova // IFAC Generalized solution in control problem. — Pereslavl-Zalessky, 2004. — Elsevier Science Ltd. Oxford, 2004. — P. 169—175.

9. Курина Г.А. Асимптотическое решение нелинейной периодической задачи оптимального управления с матрично сингулярно возмущенным уравнением состояния / Г. А. Курина, С. С. Щекунских // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, №10. — С. 1332—1344.

10. Kurina G.A. Asymptotic Solution of singularly perturbed nonlinear discrete periodic optimal control problem / G. A. Kurina, N. V. Nekrasova // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference ECC05. — Seville, 2005 — P. 3531—3536.