УДК 571.988.63:532.5-1/-9

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСЛОВИИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦЕ*

М. Ю. Кузьмин

Воронежский государственный университет

Рассмотрена математическая модель нестационарного движения электрореологической жидкости. С помошью аппроксимационно-топологического метода доказано существование слабых решений.

ВВЕДЕНИЕ

Известно (см., например, [1]), что движение любой несжимаемой жидкости в сосуде, представляемом ограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \in \{2,3\})$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, при изменении параметра времени t на отрезке $[0,T]$ описывается системой уравнений в форме Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \tag{1}$$
$$= \operatorname{Div} \sigma + F, (t,x) \in Q_T,$$

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, (t,x) \in Q_T, \tag{2}$$

здесь $Q_T = [0,T] \times \Omega, v = (v_1, \ldots, v_n)$ — поле скоростей жидкости, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,n}$ — девиатор тензора напряжений, $\operatorname{Div} \sigma$ — вектор, i-я координата которого равна $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, p — сферическая часть тензора напряжений, $F = (F_1,...,F_n)$ — поле плотности объемных сил, плотность жидкости считается равной единице.

Основной объект изучения данной работы — жидкости удовлетворяющие реологическому соотношению вида

$$\sigma = 2\varphi(I(v))\varepsilon(v), \tag{3}$$

здесь $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1,n}$ — тензор скоростей деформации, т. е. $\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $I(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2(v)$, φ — некоторая положительная функция. Отметим, что жидкостям, подчиняющимся как соотношению (3), так и другим, подобным ему, посвящены работы [2], [3]. Однако в этих работах движение жидкости со скольжением рассматривалось только в стационарном случае.

Как отмечено многими авторами (см., например, [4]), движение обширного класса жидкостей необходимо рассматривать, учитывая их проскальзывание вдоль стенки сосуда. Введем уравнения описывающие проскальзывание жидкости. Пусть $f = (f_1,...,f_n)$ — произвольный вектор поверхностных сил, т. е.

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} [-p\delta_{ij} + 2\varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u)]\eta_j \,|_{\partial\Omega}, \tag{4}$$

где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Представим f в следующей форме:

$$f(t,s) = f^{\eta}(t,s) + f^{\tau}(t,s)$$
$$\forall (t,s) \in [0,T] \times \partial\Omega, \tag{5}$$

где f^{η} и f^{τ} — нормальная и касательная составляющие соответственно,

$$f^{\eta}(t,s) = f_{\eta}^{*}(t,s)\eta(s), \; f_{\eta}^{*}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,s)\eta_i(s), \tag{6}$$

$$f^{\tau}(t,s) = f(t,s) - f^{\eta}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} f_{\tau i}(t,s) e_i, \tag{7}$$

$$f_{\tau i}(t,s) = f_i(t,s) - f_{\eta}^{*}(t,s)\eta_i(s), \tag{8}$$

в соотношении (7) $\{e_1,...,e_n\}$ — некоторый фиксированный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Для поля v имеет место аналогичное разложение.

Уравнения скольжения жидкости имеют следующий вид:

$$v_{\eta}(t,s) = 0 \;\; \forall (t,s) \in Q_T^s, \tag{9}$$

$$f^{\tau}(t,s) = -\chi(|\, v^{\tau}(t,s) \,|^2) v^{\tau}(s) \forall (t,s) \in Q_T^s, \tag{10}$$

где $Q_T^s = [0,T] \times \partial\Omega$, символом $|\cdot|$ обозначена норма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, χ — некоторая известная вещественная функция.

Пусть имеет место некоторое начальное условие

$$v(0,x) = v^0(x) \;\; \forall x \in \Omega. \tag{11}$$

Далее будут изучатся слабые решения начально-краевой задач (1)—(3), (9), (10), (11).

* Работа поддержана грантами РФФИ (№ 04-01-00081) и Минобрнауки РФ.

Работа построена следующим образом: в первом разделе статьи вводятся некоторые обозначения, определяется понятие слабого решения задач (1)—(3), (9), (10), (11) и формулируется теорема существования слабых решений, во втором предъявляется операторная трактовка задач (1)—(3), (9), (10), (11) и описываются свойства операторов, в третьем разделе с помощью аппроксимационно-топологического подхода (см. [5]) доказывается теорема существования слабых решений.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Через X^* здесь и далее обозначается пространство, сопряженное некоторому банахову пространству X, через $\langle g, y\rangle$ обозначается действие некоторого функционала $g \in X^*$ на элемент $y \in X$, а через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, X^m — топологическое произведение m экземпляров пространства X.

Записи $\mathbf{v}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{v}_0$ обозначают соответственно сильную и слабую сходимость последовательности $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1,\infty}$ к элементу $\mathbf{v}_0$. Случай, когда последовательность $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1,\infty}$ не сходится к элементу $\mathbf{v}_0$ в сильном смысле, обозначается как $v_k \underset{k\to\infty}{\not\to} v_0$.

Используются стандартные обозначения $L_p(\Theta), W_p^l(\Theta), H^l(\Theta)$ для пространств Лебега и Соболева соответственно функций, определенных на множестве Θ, когда это имеет смысл.

Через $L_p(0,T,X)$ и $C(0,T,X)$ обозначаются пространства суммируемых с p-й степенью и непрерывных соответственно, функций определенных на отрезке $[0,T]$ со значениями в пространстве X.

Положим,

$$C = \{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega})^n, u_\eta\,|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} u = 0\},$$

S_Z, H_Z — замыкания множества C в пространствах $L_2(\partial\Omega)^n$ и $L_2(\Omega)^n$ соответственно. Положим, что скалярные произведения в S_Z и H_Z взяты из $L_2(\partial\Omega)^n$ и $L_2(\Omega)^n$.

Через V_Z^l обозначается замыкание C в гильбертовом пространстве $H^{n/2}(\Omega)^n$, V_Z — замыкание множества C в гильбертовом пространстве

$$W_s = \{u : u \in H^1(\Omega)^n, u_\eta\,|_{\partial\Omega} = 0\}$$

со скалярным произведением, определяемом посредством равенства вида

$$(u,w)_{W_s} = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \varepsilon_{ij}[u](x)\varepsilon_{ij}[w](x)dx +$$
$$+\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u_{\tau i}(s)w_{\tau i}(s)ds \ \ \forall u,w \in W_s.$$

Согласно [6], это скалярное произведение порождает норму на W_s, эквивалентную норме индуцированной нормой пространства $H^1(\Omega)^n$.

Обозначим

$$E = L_2(0,T;V_Z^l),\ \ S = L_2(0,T;S_Z),$$
$$\mathcal{W} = \{u : u \in L_2(0,T;V_Z^l),$$
$$u' \in L_2(0,T;(V_Z^l)^*)\};$$

символом u' обозначается производная по переменной t от функции u. Пространство $\mathcal{W}$ является банаховым с нормой $\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_E + \|u\|_{E^*}$. (см. [7])

Определение 1.1.

Слабым решением задач (1)—(3), (9), (10), (11) *называется функция*

$$v \in L_2(0,T;V_Z) \cap L_\infty(0,T;H_Z)$$

с производной $v' \in L_2(0,T;(V_Z^l))^*$ *такая, что при любой функции* w *такой, что* $w \in L_2(0,T;V_Z^l)$, $w' \in L_2(0,T;V_Z^*), w(0) = v^0$, *имеет место соотношение*

$$\int_0^T \langle F(t) - w'(t) - A(w)(t) -$$
$$-K(v)(t) - M(v)(t), v(t) - w(t)\rangle dt \geq 0 \qquad (12)$$

с начальным условием $v(0) = v^0$.

Наложим на функции φ и χ следующие условия:

C1) Функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна.

C2) Существуют положительные константы a_1 и a_2 такие, что

$$a_1 \geq \varphi(y) \geq a_2 \ \ \forall y \in \mathbb{R}_+.$$

C3) Функция $y \mapsto \varphi(y^2)y$ не убывает по неотрицательным значениям y.

C4) Функция $\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна.

C5) Существуют положительные константы b_1 и b_2 такие, что

$$b_1 \geq \chi(z) \geq b_2 \ \ \forall z \in \mathbb{R}_+.$$

Основной результат работы представляет следующая теорема.

Теорема 1.1.

Пусть $F \in L_2(0,T;V^*)$ и $v^0 \in H_Z$, *функкции* φ *и* χ *обладают свойствами C1)—C5), тогда множество слабых решений задачи* (1)—(3), (9), (10), (11) *непусто.*

2. ОПЕРАТОРНАЯ ТРАКТОВКА И СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Введем следующие операторы:

$$A : E \to E^*, \langle A(u)[t], h\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \varphi(I(u(t)))\varepsilon_{ij}(u(t))\varepsilon_{ij}(h)dx,$$

$$K: E \to E^*, \langle K(u)(t), h\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \chi(|\, u_\tau(t)(s)\,|^2) u_{\tau i}(t)(s) h_{\tau i}(s) ds,$$
$$M: E \to E^*, \langle M(u)(t), h\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j(t)(x) \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j}(x) h_i(x) dx.$$

Для оператора A имеют место следующие свойства.

Лемма 2.1.

1) *Оператор A непрерывен.*

2) *Оператор A является монотонным оператором, т.е. для него выполнено неравенство*

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle \ge 0 \;\; \forall u_1, u_2 \in E. \quad (13)$$

Доказательство.

1) Пусть $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0$ в E. Предположим, что $A(u_k) \underset{k\to\infty}{\not\to} A(u_0)$ в E^*, тогда существует подпоследовательность $\{u_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ такая, что

$$\left\| A(u_{k_l}) - A(u_0) \right\|_{E^*} \varsigma$$

при некотором $\varsigma > 0$.

С другой стороны, имеем:

$$\left\| A(u_{k_l}) - A(u_0) \right\|_{E^*} =$$
$$= \int_0^T \sup_{h\in V_Z^l, \|h\|_{V_Z^l}=1} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \varphi(I(u_{k_l}(t))) \varepsilon_{ij}(u_{k_l}(t)) \times$$
$$\times \varepsilon_{ij}(h) dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \varphi(I(u_0(t))) \varepsilon_{ij}(u_0(t)) \varepsilon_{ij}(h) dx \Big) dt \le \quad (14)$$
$$\le c_1 \left(\int_{Q_T} [\varphi(I(u_{k_l}(t))) - \varphi(I(u_0(t)))]^2 I(u_0) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ c_2 \left\| u_{k_l} - u_0 \right\|_E \left\| u_0 \right\|_E + c_3 \left\| u_{k_l} \right\|_E \left\| u_{k_l} - u_0 \right\|_E,$$

где константы c_1, c_2, c_3 не зависят от u_{k_l}, u_0 и h. Так как $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0$ в E, то можно полагать, что для подпоследовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1,\infty}$ имеет место сходимость $I(u_{k_l}) \to I(u_0)$ почти всюду на Q_T. Таким образом, первое слагаемое в правой части неравенства (14) стремится к нулю в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и условия C2, два других слагаемых, очевидно, тоже стремятся к нулю.

Следовательно,

$$A(u_{k_l}) \underset{l\to\infty}{\to} A(u_0)$$

в E^*. Из полученного противоречия и вытекает свойство 1.

2) Используя условие C3 имеем:

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle =$$
$$= 2\sum_{i,j=1}^{n} \int_{Q_T} [\varphi(I(u_1))\varepsilon_{ij}(u_1) - \varphi(I(u_2))\varepsilon_{ij}(u_2)] \times$$
$$\times [\varepsilon_{ij}(u_1 - u_2)] dx dt = 2\int_{Q_T} [\varphi(I(u_1)) I(u_1) +$$
$$+ \varphi(I(u_2)) I(u_2)] dx dt - 2\sum_{i,j=1}^{n} \int_{Q_T} [\varphi(I(u_1)) \times$$
$$\times \varepsilon_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2) - \varphi(I(u_2))\varepsilon_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2)] dx dt \ge$$
$$\ge 2\int_{Q_T} [\varphi(I(u_1)) I^{1/2}(u_1) - \varphi(I(u_2)) I^{1/2}(u_2)] \times$$
$$\times (I^{1/2}(u_1) - I^{1/2}(u_2)) dx dt \ge 0.$$

Лемма 2.2. *Оператор K вполне непрерывен при действии из пространства $\mathcal{W}$ в пространство E^*.*

Доказательство.

Непрерывность оператора K достаточно очевидна. Покажем его компактность. Пусть последовательность $\{u^k\}_{k=1,\infty}$ ограниченна в пространстве $\mathcal{W}$. Используя то, что вложение $V_Z \subset S_Z$ компактно, а вложения $S_Z \equiv S_Z^* \subset V_Z$ непрерывны, получаем, что вложение $\mathcal{V} \subset S$ компактно (см. [7]). Поэтому из последовательности $\{u^k\}_{k=1,\infty}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u^{k_l}\}_{l=1,\infty}$, сходящуюся по норме S к некоторому элементу $u^0 \in \mathcal{W}$.

При некоторых константах c_4, c_5, не зависящих от u^{k_l}, u^0 и h, имеем неравенство:

$$\left\| K(u^{k_l}) - K(u^0) \right\|_{E^*} =$$
$$= \int_0^T \sup_{h\in V_Z^l, \|h\|_{V_Z^l}=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \chi(|\, u_\tau^{k_l}\,|^2) u_{\tau i}^{k_l} h_{\tau i} ds - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \chi(|\, u_\tau^0\,|^2) u_{\tau i}^0 h_{\tau i} ds \right) dt \le \quad (16)$$
$$\le c_4 \left(\int_{Q_T^s} [\chi(|\, u_\tau^{k_l}\,|^2) - \chi(|\, u_\tau^0\,|^2)]^2 \,|\, u_\tau^0\,|^2 \, ds dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ c_5 \left\| u^{k_l} - u^0 \right\|_S \left\| u^0 \right\|_S + c_6 \left\| u^{k_l} - u^0 \right\|_S \left\| u^{k_l} \right\|_S.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (16) стремится к нулю в силу теоремы Лебега, два других слагаемых стремятся к нулю в силу компактности вложения $\mathcal{V} \subset S$.

Положим для функций $u, w, h \in V_Z^l$

$$b(u, w, h) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) h_i(x) dx.$$

Нам понадобится следующая лемма

Лемма 2.3.

1) *Имеет место соотношение*

$$b(u,h,w) = -b(u,w,h). \qquad (17)$$

2) *Выполнена оценка*

$$b(u,w,h) \le c_6 \|u\|_{V_Z}^{1/2} \|u\|_{H_Z}^{1/2} \|h\|_{V_Z}^{1/2} \|h\|_{H_Z}^{1/2} \|w\|_{V_Z^l}. \qquad (18)$$

3) *Оператор M вполне непрерывен при действии из пространства $\mathcal{W}$ в пространство E^*.*

Доказательство.

1) С помощью формулы Грина имеем:

$$b(u,w,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) h_i(x)dx =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x) w_i(x) h_i(x)dx +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} \int_S u_j \eta_j w_i h_i ds - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) w_i(x)dx.$$

Два первых слагаемых в последнем равенстве равны нулю в силу того, что $\operatorname{div} u = 0$ и $u^\eta = 0$, откуда и следует доказываемое соотношение.

2) Согласно [8] и [9] имеет место неравенство

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le c_7 \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}, \qquad (20)$$

где $2/p + 1/n = 1$ и константа c_7 не зависит от u.

К тому же, если $\phi \in H^r(\Omega)$, то $\phi \in L_p(\Omega)$ при $1/p = 1/2 - r/n$, если $1/2 - r/n > 0$. Отсюда следует, что если $u \in V_Z^l$, то $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L_n(\Omega) \forall i,j = 1,n$.

Для доказательства неравенства (18) осталось применить неравенство Гельдера:

$$b(u,w,h) \le$$

$$\le c_8 \sum_{i,j=1}^{n} \|u\|_{L_p(\Omega)^n} \|h\|_{L_p(\Omega)^n} \|\partial w_i / \partial x_j\|_{L_n(\Omega)} \qquad (21)$$

при соотношении $2/p + 1/n = 1$ (константа c_8 не зависит от u) и воспользоваться неравенством (20).

3) С помощью неравенства Гельдера нетрудно получить неравенство вида

$$\|M(u) - M(w)\|_{E^*} \le c_9 \|u - w\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} \times$$
$$\times (\|u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} + \|w\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)}) \qquad (22)$$

(константа c_9 не зависит от i,w), и тогда полную непрерывность оператора M можно получить, воспользовавшись компактностью вложения $\mathcal{W} \subset L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$.

Определим следующие операторы:

$$J : E \to E^*, \ \langle J(u)(t), h \rangle = (u(t), h)_{V_Z^l} \forall h \in V_Z^l,$$

$$L_\delta : \mathcal{W} \to E^* \times H_Z, \ L_\delta(u) =$$
$$= \{u' + A(u) + \delta J(u), u(0)\}, \delta \ge 0,$$

$$\mathbb{K} : \mathcal{W} \to E^* \times H_Z,$$

$$\mathbb{K}(u) = -\{K(u) + M(u) - F, v^0\}.$$

Очевидно, что доказательство существования слабых решений задач (1)—(3), (9), (10), (11) сводится к доказательству существования решений уравнения

$$L_0(u) - \mathbb{K}(u) = 0 \qquad (23)$$

принадлежащих $\mathcal{V}$.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Для доказательства существования решений уравнения (23) при $\delta = 0$ докажем вначале существование решений в пространстве $\mathcal{W} \times H_Z$ при $\delta > 0$, после чего покажем, что эти решения сходятся, в некотором смысле, к решению задачи (23) при $\delta = 0$.

Вследствие свойств операторов K и M, оператор $\mathbb{K}$ является вполне непрерывным, вместе с тем, в силу монотонности операторов A и J, операторы L_δ при $\delta > 0$ являются обратимыми (см. [7]). Поэтому задача о решении уравнения (23) при $\delta > 0$ сводится к нахождению неподвижных точек оператора $L_\delta^{-1} \circ \mathbb{K}$ в пространстве $\mathcal{W} \times H_Z$. Для того, чтобы воспользоваться топологической степенью Лере-Шаудера. Необходима следующая лемма об априорной оценке.

Лемма 3.1.

Для решений семейства операторных уравнений вида

$$\Upsilon(u) + \lambda L_\delta^{-1} \circ \mathbb{K}(u) = 0, \lambda \in [0,1], \qquad (24)$$

имеет место априорная оценка решений:

$$\|u\|_{\mathcal{W}} \le c_{10}, \qquad (25)$$

(здесь $\Upsilon : \mathcal{W} \times H_Z \to \mathcal{W} \times H_Z$ — тождественный оператор, величина c_{10} не зависит от u и λ).

Доказательство.

Семейство уравнений (24) эквивалентно семейству уравнений

$$u' + A(u) + \delta J(u) + \lambda K(u) + \lambda M(u) = \lambda F \qquad (26)$$

с начальным условием

$$u(0) = v^0.$$

Подействуем левой и правой частями соотношения (26) на функцию $u \in E, s \in [0,T]$:

$$\langle u'(s),u(s)\rangle + \langle A(u)(s),u(s)\rangle +$$
$$+\delta\langle J(u)(s),u(s)\rangle + \lambda\langle K(u)(s),u(s)\rangle + \quad (27)$$
$$+\lambda\langle M(u)(s),u(s)\rangle = \lambda\langle F(s),u(s)\rangle$$

и проинтегрируем полученное равенство от 0 до T. Заметим, что

$$\int_0^T \langle u'(s),u(s)\rangle ds = \|u(T)\|^2_{H_Z} - \|v^0\|^2_{H_Z},$$
$$\langle A(u)(s),u(s)\rangle + \lambda\langle K(u)(s),u(s)\rangle \ge 0,$$
$$\delta\int_0^T \langle J(u)(s),u(s)\rangle ds = \|\delta^{1/2}u\|^2_E,$$
$$\langle M(u)(s),u(s)\rangle = 0,$$
$$\lambda\int_0^T \langle F(s),u(s)\rangle ds \le (1/\delta)\|F\|^2_{E^*} + (\delta/4)\|u\|^2_E.$$

Из вышеприведенных соотношений вытекает требуемая оценка на норму $\|u\|_E$, оценка на норму $\|u'\|_{E^*}$ вытекает из оценки на норму $\|u\|_E$ и из ограниченности операторов A, J, K, M.

Тем самым, в силу полученной априорной оценки, отображение

$\mathrm{L}_\delta^{-1} \circ \mathbb{K}(u)$ гомотопно тождественному отображению $\Upsilon(u)$, поэтому уравнение (24) разрешимо при всех $\delta > 0$.

Для предельного перехода необходимо получить оценки не зависящие от δ. В связи с этим заметим, что такие оценки на величины $\delta^{1/2}\|u\|_E, \|u\|_{L_2(0,T;V_Z)}$ и $\|u\|_{L_\infty(0,T;H_Z)}$ получаются с помощью энергетических оценок, т. е. при интегрировании соотношения (27) от 0 до произвольного $t \in [0,T]$ и использовании ограниченности функций φ и χ. Вслед за этим, оценка на $\|u'\|_{E^*}$ получается с помощью ограниченности операторов A, K и неравенства

$$\|M(u)(t)\|_{(V_Z^l)^*} \le c_{11}\|u(t)\|_{H_Z}\|u(t)\|_{V_Z},$$

вытекающего из неравенства (18) (константа c_{11} не зависит от u).

3.1. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Выберем произвольную последовательность $\delta_k \to 0$ и поставим в соответствие каждому δ_k решение u_k уравнения.

В силу априорных оценок существует элемент $v \in L_2(0,T;V_Z)$ такой, что

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} v \text{ сильно в пространствах}$$
$$L_2(0,T;L_2(\Omega)^n), L_2(0,T;L_4(\Omega)^n), S;$$
$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} v \text{ почти всюду на множествах } Q_T, Q_T^s;$$
$$u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v \text{ слабо } L_\infty(0,T;H_Z);$$
$$u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v \text{ слабо } L_2(0,T;V_Z); \quad (28)$$
$$u_k' \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v' \text{ слабо } E^*. \quad (29)$$

Заметим, что в силу (28) и (29) имеем, что $u_k(0) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v(0)$ в $(V_Z^l)^*$.

Для каждого фиксированного $w \in L_2(0,T;V_Z^l)$, таком, что

$$w' \in L_2(0,T;V_Z^*), w(0) = v^0,$$

положим

$$X(u_k,w) = \int_0^T \langle u_{k'}(t) - w'(t), u_k(t) - w(t)\rangle dt +$$
$$+\int_0^T \langle A(u_k)(t) - A(w)(t), u_k(t) - w(t)\rangle dt +$$
$$+\delta\int_0^T \langle J(u_k)(t), u_k(t) - w(t)\rangle dt + \quad (30)$$
$$+\int_0^T \langle K(u_k)(t) + M(u_k)(t) - K(v)(t) -$$
$$-M(v)(t), u_k(t) - w(t)\rangle dt.$$

Имеем:

$$\lim_{k\to\infty} X(u_k,w) =$$
$$= \int_0^T \langle F(t) - w'(t) - A(w)(t) - \quad (31)$$
$$-K(v)(t) - M(v)(t), v(t) - w(t)\rangle dt \ge 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдштейн Р.В.* Механика сплошных сред. Часть 1. / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. — Наука. Физматлит. 2000.

2. *Hoppe R.H.W., Kuzmin M.Yu., Litvinov W.G., Zvyagin V.G.* Flow of electrorheological fluid under conditions of slip on the boundary (to appear).

3. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. — М.: Наука. — 1982.

4. *Раджагопал К.Р.* Некоторые нерешенные проблемы в нелинейной динамике жидкостей / К. Р. Раджагопал // Успехи математических наук. — 58 (2003), № 2. — С. 111—122.

5. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса, Эдиториал УРСС, Москва, 2004.

6. *Litvinov W.G.* Optimization in Elliptic Problems with Applications to Mechanics of Deformable Bodies and Fluid Mechanics / W.G. Litvinov. — Birkhä user, 2000.

7. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифферренциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. — М.: 1978.

8. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир. 1971.

9. *Peetre J.* Espace d' interpolation et theoreme de Sobolev / J. Peetre. — Ann. Inct. Fourier, 1966. 16. P. 279—317.