УДК 519.05

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ТРАНЗИТИВНОСТИ В ПРИЛОЖЕНИИ К НЕЧЕТКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

Н. А. Каплиева, Т. М. Леденева

Воронежский государственный университет

Проводится исследование различных типов транзитивности нечетких отношений, применяемых для построения нечеткого отношения подобия в рамках процедуры нечеткой классификации.

ВВЕДЕНИЕ

Теория четких отношений используется при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы. Однако подобный подход, позволяя проводить качественный анализ систем, приводит к потере информации о силе связей между объектами. Этого недостатка лишены методы анализа данных, основанные на теории нечетких отношений, которая позволяет проводить качественный анализ систем с учетом различия в силе связей между объектами системы.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. *Нечетким отношением R на множестве X* называется нечеткое подмножество декартова произведения $X \times X = X^2$, характеризующееся функцией принадлежности μ_R :

$$\mu_R : X \times X \to [0,1],$$

которая оценивает степень выполнения отношения xRy. Семейство нечетких отношений на X будем обозначать $F(X^2)$.

Определение 2. Пусть $R_1, R_2 \in F(X^2)$. Говорят, что *нечеткое отношение R_1 включено в нечеткое отношение R_2*, если для нечетких подмножеств R_1 и R_2 универсального множества X^2 выполнено $R_1 \subseteq R_2$. В терминах функции принадлежности это означает

$$\forall (x,y) \in X^2 \ \ (\mu_{R_1}(x,y) \le \mu_{R_2}(x,y)).$$

Если для всех пар (x,y) выполняется строгое неравенство, то говорят о *строгом включении*.

Если

$$\forall (x,y) \in X^2 \ \ (\mu_{R_1}(x,y) = \mu_{R_2}(x,y)),$$

то говорят, что *нечеткие отношения R_1 и R_2 равны*.

Так как нечеткие отношения определяются через нечеткие подмножества специального универсального множества, то для них можно ввести операции дополнения, пересечения и объединения, реализуемые теми же формулами, что и операции для нечетких множеств. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть $R \in F(X^2)$.

Нечеткое отношение $\bar{R}$, характеризующееся функцией принадлежности

$$\forall x, y \in X \ \ (\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)),$$

называется *дополнением в X отношения R*. Дополнение имеет смысл отрицания исходного отношения.

Для определения операций пересечения и объединения воспользуемся соответственно треугольными T-нормами и S-конормами.

Определение 3. *Треугольной нормой (T-нормой)* называется операция $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $T(x,y) = T(y,x)$ — коммутативность,

2) $T((x,y),z) = T(x,(y,z))$ — ассоциативность,

3) $T(0,0) = 0$, $T(x,1) = T(1,x) = x$ — ограниченность,

4) $(x \le t) \wedge (y \le z) \Rightarrow T(x,y) \le T(t,z)$ — монотонность.

Определение 4. *Треугольной конормой (S-конормой)* называется операция $S : [0,1] \times [0,1] \to \to [0,1]$, которая также коммутативна, ассоциативна, монотонна, но ограниченность задается в виде:

$$S(1,1) = 1,\ S(x,0) = S(0,x) = x.$$

Таким образом, T-норма моделирует пересечение, а S-конорма — объединение.

T-нормы и S-конормы связаны соотношением

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y).$$

Основные классы T-норм и S-конорм представлены в [5].

Операция *пересечения* нечетких отношений $R_1 \in F(X \times Y)$ и $R_2 \in F(X \times Y)$ задается треугольными нормами, так что нечеткое отношение $R_1 \underset{T}{\cap} R_2$ имеет функцию принадлежности

$$\mu_{R_1 \underset{T}{\cap} R_2}(x,y) = T(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)).$$

Соответственно операция *объединения* $R_1 \overset{S}{\cup} R_2$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_1 \overset{S}{\cup} R_2}(x,y) = S(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)).$$

К специальным операциям относятся композиции нечетких отношений. Основные среди них:

(Max-min)-композиция (максминная композиция) $R_1 \circ R_2$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,y) = \max_{z \in Z} \min\{\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)\}, \quad (1)$$

(Min-max)-композиция (минмаксная композиция) $R_1 \bullet R_2$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x,y) = \min_{z \in Z} \max\{\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)\}, \quad (2)$$

Здесь $(x,y) \in X \times Y$ и $R_1 \in F(X \times Z)$ и $R_2 \in$ $\in F(Z \times Y)$.

Большое значение для приложений имеет (max-min)-композиция, что обусловлено наличием у нее некоторых замечательных свойств. К основным относятся: ассоциативность, дистрибутивность относительно объединения, но недистрибутивность относительно пересечения, монотонность.

Максминную композицию можно обобщить с помощью T-нормы, так что ее функция принадлежности будет иметь вид

$$\mu_{(\max-T)(R_1,R_2)}(x,y) = \max_{z \in Z} T(\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)),$$

а соответствующую композицию будем называть **(max-T)-композицией**.

Аналогично **(min-S)-композицию** обобщает минмаксную композицию и имеет функцию принадлежности вида

$$\mu_{(\min-S)(R_1,R_2)}(x,y) = \min_{z \in Z} S(\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)).$$

Утверждение 1. *Пусть* $R_1 \in F(X \times Z)$, $R_2 \in F(Z \times Y)$ *и* (T,S) *— пара двойственных треугольных норм, тогда*

$$\mu_{(\max-T)(\bar{R}_1,\bar{R}_2)}(x,y) = \mu_{\overline{(\min-S)(R_1,R_2)}}(x,y),$$

т. е.

$$\bar{R}_1 \overset{T}{\circ} \bar{R}_2 = R_1 \overset{S}{\bullet} R_2.$$

Доказательство. Пусть для отношений $R_1 \in F(X \times Z), R_2 \in F(Z \times Y)$ определена (max-T)-композиция. Перейдем к отношениям $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ с функциями принадлежности $\mu_{\bar{R}_1}(x,y) =$

Таблица 1

Название	Тип композиции
Логическая	$\mu_{R_1 \overset{\text{лог}}{\circ} R_2}(x,y) = \max_z \min\{\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)\}$ $\mu_{R_1 \overset{\text{лог}}{\bullet} R_2}(x,y) = \min_z \max\{\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)\}$
Алгебраическая	$\mu_{R_1 \overset{\text{алг}}{\circ} R_2}(x,y) = \max_z\{\mu_{R_1}(x,z) \cdot \mu_{R_2}(z,y)\}$ $\mu_{R_1 \overset{\text{алг}}{\bullet} R_2}(x,y) = \min_z\{\mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y) - \mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y)\}$
Граничная	$\mu_{R_1 \overset{\text{гр}}{\circ} R_2}(x,y) = \max_z \max\{\mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y) - 1, 0\}$ $\mu_{R_1 \overset{\text{гр}}{\bullet} R_2}(x,y) = \min_z \min\{\mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y), 1\}$
Относительная	$\mu_{R_1 \overset{\text{отн}}{\circ} R_2}(x,y) = \max_z \left\{\dfrac{\mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y)}{\mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y) - \mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y)}\right\}$ $\mu_{R_1 \overset{\text{отн}}{\bullet} R_2}(x,y) = \min_z \left\{\dfrac{\mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y) - 2\mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y)}{1 - \mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y)}\right\}$
Параметрическая	$\mu_{R_1 \overset{\alpha}{\circ} R_2}(x,y) = \max_z \left\{\dfrac{\mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y)}{\alpha + (1-\alpha)(\mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y) - \mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y))}\right\}$ $\mu_{R_1 \overset{\alpha}{\bullet} R_2}(x,y) = \min_z \left\{\dfrac{(\beta-1)\mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y) + \mu_{R_1}(x,z) + \mu_{R_2}(z,y)}{1 + \beta\mu_{R_1}(x,z)\mu_{R_2}(z,y))}\right\}$

$= 1 - \mu_{R_1}(x,y)$ и $\mu_{\bar{R}_2}(x,y) = 1 - \mu_{R_2}(x,y)$. Так как

$$T(1-x, 1-y) = 1 - S(x,y),$$

то на основе закона де Моргана получим

$$\mu_{(\max-T)(\bar{R}_1,\bar{R}_2)}(x,y) =$$
$$= \max_{z\in Z} T(1-\mu_{R_1}(x,z), 1-\mu_{R_2}(z,y)) =$$
$$= \max_{z\in Z}(1 - S(\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y))) =$$
$$= 1 - \min_{z\in Z} S(\mu_{R_1}(x,z), \mu_{R_2}(z,y)) =$$
$$= \mu_{(\min-S)(R_1,R_2)}(x,y).$$

Операции полученные на основе $(\max\text{-}T)$- и $(\min\text{-}S)$-композиций представлены в таблице 1.

Утверждение 2. *Пусть* $R \subseteq F(X^2)$, *тогда имеют место следующие включения:*

$$R^2_{\text{гр}} \subseteq R^2_{\text{алг}} \subseteq R^2_{\text{отн}} \subseteq R^2_{\text{лог}} \qquad (3)$$

для $(\max\text{-}T)$-композиций и

$$R^2_{\text{лог}} \subseteq R^2_{\text{отн}} \subseteq R^2_{\text{алг}} \subseteq R^2_{\text{гр}} \qquad (4)$$

для $(\min\text{-}S)$-композиций.

Доказательство утверждения тривиально и основывается на том факте, что если $0 \le a, b \le 1$, то

$$a + b - ab - 1 \le 0.$$

2. ТРАНЗИТИВНОСТЬ НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ

Пусть $R \in F(X^2)$.

Определение 5. Нечеткое отношение R на множестве X называется $(\max\text{-}T)$-*транзитивным*, если $R \overset{T}{\circ} R \subseteq R$, где T — треугольная норма.

В частности, если $\forall x, y, z \in X$

$$\mu_R(x,y) \ge \max_{z\in Z} \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\},$$

то есть $R \circ R \subseteq R$, то R называется *максминным транзитивным* отношением.

Определение 6. Нечеткое отношение R на множестве X называется $(\min\text{-}S)$-*транзитивным*, если $R \overset{S}{\bullet} R \supseteq R$, где S — треугольная конорма.

В частности, если $\forall x, y, z \in X$

$$\mu_R(x,y) \ge \max_{z\in Z} \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\},$$

то есть $R \bullet R \supseteq R$, то R называется *минмаксным транзитивным* отношением.

Теорема 1. *Пусть нечеткое отношение* $R \in F(X^2)$ *обладает свойством* $(\max\text{-}T)$-*транзитивности, тогда отношение* $\bar{R}$ *обладает свойством* $(\min\text{-}S)$-*транзитивности, где* T — *треугольная норма и* S — *соответствующая ей треугольная конорма.*

Доказательство.

$$\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y) \le$$

Так как R обладает max-T-транзитивностью, то

$$\mu_R(x,y) \ge \max_{z\in Z} T\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - \mu_R(x,y) \le 1 - \max_{z\in Z} T\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}$$
$$\ge 1 - \max_{z\in Z} T\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} =$$
$$= \min_{z\in Z} S\{1 - \mu_R(x,z), 1 - \mu_R(z,y)\} =$$
$$= \min_{z\in Z} S\{\mu_{\bar{R}}(x,z), \mu_{\bar{R}}(z,y)\}.$$

Получим, что $\mu_{\bar{R}}(x,y) \le \min_{z\in Z}\{\mu_{\bar{R}}(x,z), \mu_{\bar{R}}(z,y)\}$, а это означает, что $\bar{R}$ обладает свойством $(\min\text{-}S)$-транзитивности.

Таким образом, имеет смысл $(\max\text{-}T)$ и $(\min\text{-}S)$-транзитивности называть *двойственными типами транзитивности.*

Следствием теоремы 1 является следующее

Утверждение 3. *Пусть* $R \in F(X^2)$. *Если* R *обладает свойством максминной транзитивности, то* $\bar{R}$ *обладает свойством минмаксной транзитивности.*

Рассмотрим связь между различными типами транзитивности. Из доказанных выше включений (3) и (4) следуют аналогичные включения транзитивных замыканий.

Из включений (3) следует:

– если нечеткое отношение обладает свойством $(\max\text{-}T)_{\text{лог}}$-транзитивности, то оно является транзитивным во всех других смыслах.

– если нечеткое отношение обладает свойством $(\max\text{-}T)_{\text{отн}}$-транзитивности, то но является транзитивным в смысле $(\max\text{-}T)_{\text{гр}}$-, $(\max\text{-}T)_{\text{алг}}$-транзитивности.

– если нечеткое отношение обладает свойством $(\max\text{-}T)_{\text{алг}}$-транзитивности, то но является транзитивным в смысле $(\max\text{-}T)_{\text{гр}}$-транзитивности.

Из включений (4) следует:

– если нечеткое отношение обладает свойством $(\min\text{-}S)_{\text{гр}}$-транзитивности, то оно является транзитивным во всех других смыслах.

– если нечеткое отношение обладает свойством $(\min\text{-}S)_{\text{алг}}$-транзитивности, то но является транзитивным в смысле $(\min\text{-}S)_{\text{лог}}$-, $(\min\text{-}S)_{\text{отн}}$-транзитивности.

– если нечеткое отношение обладает свойством $(\min\text{-}S)_{\text{отн}}$-транзитивности, то но является транзитивным в смысле $(\min\text{-}S)_{\text{лог}}$-транзитивности.

Теорема 2. *Если* $R \in F(X \times X)$ *обладает свойством* max-min-*транзитивности, то имеют место следующие свойства:*

a) Если R симметрично и транзитивно то

$$\forall x, y \in X \ (\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x)).$$

b) Если R рефлексивно и транзитивно, то $R \circ R = R$.

c) Если R_1 *и* R_2 *— транзитивные отношения и* $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, *то* $R_1 \circ R_2$ *также транзитивное отношение.*

Для алгебраической (максмультипликативной) транзитивности выполняется только свойство с). Из данного свойства следует, что композиция двух транзитивных отношений в общем случае не является транзитивным отношением.

Преобразование исходного нетранзитивного отношения в транзитивное осуществляется на основе операции **транзитивного замыкания** $\hat{R}$ нечеткого отношения R, которое определяется следующим образом:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots, \qquad (5)$$

для случая, когда степень отношения определяется с помощью операции $(\max\text{-}T)$-композиции, то есть $R^2 = R \circ R, R^3 = R \circ R \circ R$ и т.д.

Если степень отношения определяется с использованием $(\min\text{-}S)$-композиции ($R^2 = R \bullet R, R^3 = R \bullet R \bullet R$ и т.д.), то транзитивное замыкание определяется следующим образом:

$$\breve{R} = R \cap R^2 \cup R^3 \cap \ldots \cup R^n \cap \ldots, \qquad (6)$$

Вводя транзитивное замыкание, необходимо указать способ определения операции композиции нечетких отношений.

Теорема 3. *Транзитивное замыкание любого бинарного отношения есть транзитивное бинарное отношение.*

Доказательство теоремы не представляет особого труда. Его можно найти, например, в [2].

Практическое значение теоремы 3 заключается в том, что она позволяет перейти от нетранзитивного отношения к транзитивному с помощью операции транзитивного замыкания. Так как в основе транзитивного замыкания лежит определенный тип композиции, то $\hat{R}$ является транзитивным отношением с определенным типом транзитивности. При решении прикладных задач требуется исследование, направленное на выявление необходимой транзитивности.

Теорема 4. *Операция транзитивного замыкания сохраняет свойства рефлексивности и симметричности.*

Доказательство. Пусть $R \subseteq F(X^2)$. Нечеткое отношение называется

рефлексивным, если

$$\forall x \in X \ (\mu_R(x,x) = 1);$$

симметричным, если

$$\forall (x,y) \in X^2 \ (\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x));$$

Чтобы проверить рефлексивность отношения $\hat{R}$ вычислим $\mu_{\hat{R}}(x,x)$:

$$\mu_{\hat{R}}(x,x) = \max\{\underbrace{\mu_R(x,x)}_{=1}, \underbrace{\mu_{R^2}(x,x)}_{=1}, \ldots\} = 1.$$

При доказательстве мы воспользовались тем фактом, что композиция двух рефлексивных отношений есть рефлексивное отношение.

Покажем, что $\mu_{\hat{R}}(x,y) = \mu_{\hat{R}}(y,x)$:

$$\mu_{\hat{R}}(x,y) = \max\{\mu_R(x,y), \mu_{R^2}(x,y), \ldots\} =$$
$$= \max\{\mu_R(y,x), \mu_{R^2}(y,x), \ldots\} = \mu_{\hat{R}}(y,x).$$

При доказательстве мы воспользовались тем фактом, что если R симметрично, то R^n симметрично для любого n.

Теорема 5. *Пусть R — некоторое нечеткое бинарное отношение. Если для некоторых k имеем* $R^{k+1} = R^k$, *то*

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k \ \ (\hat{R} = R \cap R^2 \cap \cdots \cap R^k). \qquad (7)$$

Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Имеем

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k \cup R^{k+1} \cup R^{k+2} \cup \ldots =$$
$$= R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k \cup R^k \cup R^k \cup \ldots =$$
$$= R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k.$$

Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что при определении транзитивного замыкания степень отношения R^k вычисляется до тех пор, пока не найдется такого k, что $R^k = R^{k+1}$.

В общем случае, если $R \subset X \times X$, где X - конечное универсальное множество и $|X| = n$, то

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \ \ (\hat{R} = R \cap R^2 \cap \cdots \cap R^n)$$

и существует k, определяемое (7), такое, что $k \le n$.

Теорема 6. *Пусть* $\hat{R}$ *есть* $(\max\text{-}T)$-*транзитивное замыкание некоторого нечеткого отношения* $R \subset X \times X$, *и* $\breve{\bar{R}}$ *есть* $(\min\text{-}S)$-*транзитивное замыкание* $\bar{R}$. *Тогда*

$$\bar{\hat{R}} = \check{\bar{R}}.$$

Доказательство. Так как $\hat{R}$ есть транзитивное замыкание некоторого нечеткого отношения R, то имеем

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots .$$

Найдем дополнение $\bar{\hat{R}}$:

$$\bar{\hat{R}} := \overline{R \cup R \circ R \cup R^2 \circ R \cup \ldots} =$$

$$= \bar{R} \cap \overline{R \circ R} \cap \overline{R^2 \circ R} \cap \ldots ⊜$$

Согласно утверждению 1, $\overline{R \circ R} = \bar{R} \bullet \bar{R}$.

$$⊜ \bar{R} \cap \bar{R} \bullet \bar{R} \cap \bar{R}^2 \bullet \bar{R} \cap \ldots =$$

$$= \bar{R} \cap \bar{R}^2 \cap \bar{R}^3 \cap \ldots = \check{\bar{R}}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение данной теоремы распространяется на все типы двойственных операций, рассмотренных в данной статье.

3. ОТНОШЕНИЯ РАЗЛИЧИЯ И ПОДОБИЯ. ТРАНЗИТИВНЫЕ РАССТОЯНИЯ

Антирефлексивное и симметричное отношение называется *несходством*. Нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами антирефлексивности, симметричности и минмаксной транзитивности называется *различием*.

Теорема 7. *Пусть $R \in F(X^2)$. Если R — отношение сходства, то $\bar{R}$ — отношение несходства.*

Доказательство. Так как R — сходство, то выполняются следующие условия:

а) $\forall x \in X$ $(\mu_R(x,x) = 1)$ — рефлексивность;

б) $\forall (x,y) \in X$ $(\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x))$ — симметрия.

Перейдем к отношению $\bar{R}$.

$$\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$$

Поставляя $\mu_R(x,y) = 1 - \mu_{\bar{R}}(x,y)$ в а), получим $\forall x \in X$ $(\mu_{\bar{R}}(x,x) = 0)$, т. е. $\bar{R}$ — антирефлексивное отношение. С другой стороны, из б) следует, что $\forall (x,y) \in X$ $(\mu_{\bar{R}}(x,y) = \mu_{\bar{R}}(y,x))$, т. е. $\bar{R}$ — симметричное отношение, а следовательно $\bar{R}$ является несходством.

Теорема 8. *Пусть $R \in F(X^2)$. Если R — отношение подобия, то $\bar{R}$ — отношение различия и наоборот.*

Доказательство. Так как R подобие, то оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Перейдем к отношению $\bar{R}$.

$$\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$$

Из рефлексивности и симметричности отношения R следует антирефлексивность и симметричность отношения $\bar{R}$. Согласно теореме 2 (частный случай), если R обладает свойством максминной транзитивности, то $\bar{R}$ обладает свойством минмаксной транзитивности. Таким образом, отношение $\bar{R}$ является различием.

Теорема 9 (о декомпозиции отношения подобия (отношения толерантности)). *Пусть R — отношения подобия (толерантности) в $X \times X$. Тогда R можно разложить следующим образом:*

$$R = \max_{\alpha}\{\alpha \cdot R_\alpha\}, \ 0 < \alpha \le 1,$$

при $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow R_2 \supset R_1$. Если R — отношение подобия, то R_α — отношение эквивалентности в смысле обычной теории множеств и $\alpha \cdot R_\alpha$ обозначает, что все элементы обычного отношения R_α умножаются α.

Доказательство. Разложение $R = \max_\alpha\{\alpha \cdot R_\alpha\}$ следует из теоремы 1 о декмпозиции любого нечеткого отношения. Покажем, что R_α — отношение эквивалентности.

1. Так как $\mu_R(x,x) = 1$, то $(x,x) \in R_\alpha$ при $\alpha \in (0,1]$, следовательно R_α обладает свойством *рефлексивности*.

2. Пусть $(x,y) \in R_\alpha, \alpha \in (0,1]$, тогда получим, что $\mu_R(x,y) \ge \alpha$ и в силу симметрии отношения R имеем $\mu_R(y,x) \ge \alpha$. Следовательно $(y,x) \in R_\alpha$, что доказывает *симметричность* R_α.

3. Пусть $(x,z) \in R_\alpha$ и $(z,y) \in R_\alpha$, то есть $\mu_R(x,z) \le \alpha$ и $\mu_R(z,y) \le \alpha$. Тогда в силу транзитивности R имеем

$$\mu_R(x,y) \ge \max_z \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} \ge \alpha,$$

т. е. $(x,y) \in R_\alpha$. Следовательно R_α обладает свойством *транзитивности*.

Поскольку R_α рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R_α — отношение эквивалентности. Теорема доказана.

Замечание. Как следует из этой теоремы, обычное отношение, ближайшее к отношению подобия, есть отношение эквивалетности. Это становится очевидным, если рассмотреть, что представляет собой R_α, когда $\alpha > 0.5$.

Два элемента x и y, принадлежащие X, принадлежат одному и тому же классу α-уровня тогда и только тогда, когда $\mu_R(x,y) \le \alpha$.

Теорема 10 (о декомпозиции для отношения различия). *Пусть R — отношение различия в $X \times X$. Тогда R можно разложить следующим образом:*

$$R = \min_{\alpha}\{\alpha \cdot R_{\alpha}\}, \ 0 < \alpha \le 1,$$

при $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow R_2 \subset R_1$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся тем фактом, что если R — нечеткое отношение различия, то $\bar{R}$ — нечеткое отношение подобия и законом де Моргана.

$$\mu_R(x,y) = 1 - \mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_{\max\limits_{\beta}\{\beta \cdot \bar{R}_{\beta}\}}(x,y) =$$

$$= 1 - \max_{\beta}\{\beta \cdot \mu_{\bar{R}_{\beta}}(x,y)\} =$$

$$= 1 - \max_{\beta \le \mu_{\bar{R}}(x,y)}\{\beta\} = \min_{\beta \le \mu_{\bar{R}}(x,y)}\{1-\beta\} =$$

$$= \min_{\beta \le 1-\mu_R(x,y)}\{1-\beta\} = \min_{\mu_R(x,y) \le 1-\beta}\{1-\beta\} =$$

$$= \min_{\mu_R(x,y) \le \alpha}\{\alpha\} = \mu_{\min\limits_{\alpha}\{\alpha \cdot R_{\alpha}\}}(x,y),$$

где R_{α} — обычное отношение уровня α, определенное следующей функцией принадлежности

$$\mu_{R_{\alpha}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \mu_R(x,y) \le \alpha, \\ 0, & \text{если } \ \mu_R(x,y) > \alpha. \end{cases}$$

Покажем теперь, что R_{α} — отношение различия.

1. Так как $\mu_R(x,x) = 0$, то $(x,x) \in R_{\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, следовательно R_{α} обладает свойством *антирефлексивности*.

2. Пусть $(x,y) \in R_{\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, тогда получим, что $\mu_R(x,y) \le \alpha$ и в силу симметрии отношения R имеем $\mu_R(y,x) \le \alpha$. Следовательно $(y,x) \in R_{\alpha}$, что доказывает *симметричность* R_{α}.

3. Пусть $(x,z) \in R_{\alpha}$ и $(z,y) \in R_{\alpha}$, то есть $\mu_R(x,z) \le \alpha$ и $\mu_R(z,y) \le \alpha$. Тогда в силу транзитивности R имеем

$$\mu_R(x,y) \le \min_z \max\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} \le \alpha,$$

т. е. $(x,y) \in R_{\alpha}$. Следовательно R_{α} обладает свойством *транзитивности*.

Поскольку R_{α} антирефлексивно, симметрично и (min-max)-транзитивно, то R_{α} — отношение различия. Теорема доказана.

В данном случае два элемента x и y, принадлежащие X, принадлежат одному и тому же классу α-уровня тогда и только тогда, когда $\mu_R(x,y) \le \alpha$.

По теореме декомпозиции α последовательно принимает значения из полуинтервала $(0,1]$, и по мере роста α разбиение на классы эквивалентности включает все больше и больше частей[1]. Это разложение проводится по древовидной схеме. Такая схема называется *декомпозиционным деревом*. Декомпозиционное дерево хорошо отражает структуру отношения подобия (толерантности), или группировки элементов, построенную с использованием транзитивных расстояний между ними.

[1] Это утверждение имеет место только для отношения эквивалентности, а для отношения толерантности по мере роста α количество классов то увеличивается, то уменьшается.

Теорема 11. *Транзитивное замыкание нечеткого отношения сходства является подобием.*

Доказательство. В самом деле, если $R \in F(X^2)$ — отношение сходства, т. е. является рефлексивным и симметричным отношением, то для него можно построить максминное транзитивное замыкание $\hat{R}$, которое, как известно сохраняет свойства рефлексивности и симметричности, но добавляет максминную транзитивность, а это позволяет утверждать, что $\hat{R}$ является отношением подобия. Аналогично можно рассуждать и для $\max$-алгебраического замыкания.

Теорема 12. *Отношение различия $\bar{R}$, которое соответствует отношению подобия R, определяет метрику на множестве X.*

Доказательство. Сравним свойства отношения различия со свойствами функции расстояния.

Если $d(x,y)$ — расстояние между x и y, то для $\forall x,y,z \in X$ должны выполняться условия:

1. $d(x,y) \ge 0$, причем $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) * d(z,y) \ge d(x,y)$,

где $*$ — операция, связанная с понятием расстояния и конкретизирующая свойство транзитивности расстояния.

Для $\mu_{\bar{R}}(x,y)$ условие 1 выполняется в силу определения функции принадлежности и антирефлексивности; условие 2 — в силу симметричности; условие 3 — в силу минмаксной транзитивности. Таким образом, функция принадлежности $\mu_{\bar{R}}(x,y)$ отношения различия $\bar{R}$, введенного для отношения подобия R может рассматриваться как функция расстояния.

Определим на отношении сходства R (min—max)-*расстояние* по формуле

$$\rho_R^{\min-\max}(x,y) = 1 - \mu_{\hat{R}_{\circ}}(x,y),$$

где $\hat{R}_{\circ}$ — максминное замыкание для отношения сходства R. С другой стороны, транзитивность для отношения сходства R можно обеспечить за счет транзитивного замыкания, определяемого с помощью $(\max\text{-}T)_{\text{алг}}$-композиции, и ввести другой тип расстояния.

Рассмотрим $\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,y) = 1 - \mu_{\hat{R}_*}(x,y)$. Отношение $\hat{R}_*$ обладает свойством max-алгебраической транзитивности, т. е.

$$\mu_{\hat{R}_*}(x,y) \ge \max_z(\mu_{\hat{R}_*}(x,z)\cdot\mu_{\hat{R}_*}(z,y)).$$

Тогда

$$1-\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,y) \ge \max_z((1-\mu_{\hat{R}_*}(x,z))\times$$
$$\times(1-\mu_{\hat{R}_*}(z,y))) = \max_z(1-\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)-$$
$$-\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(z,y)+\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)\cdot\mu_{\overline{\widehat{R}*}}(z,y)).$$
$$\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,y) \le 1-\max_z(1-\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)-\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(z,y)+$$
$$+\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)\cdot\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(z,y)).$$

Используя закон де Моргана, окончательно получаем

$$\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,y) \le \min_z(\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)+\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(z,y)-$$
$$-\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)\cdot\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(z,y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,y) \le \min_z\{\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(x,z)\overset{0;\,3}{+}\mu_{\bar{\hat{R}}_*}(z,y)\}.$$

Таким образом, если для обеспечения свойства транзитивности используется $(\max\text{-}T)_{\text{алг}}$-транзитивное замыкание, то аксиома 3 реализуется с помощью (min-sum)-оператора $(\overset{\text{алг}}{+})$, а

$$\rho_R^{\min-\mathrm{sum}}(x,y) = 1-\mu_{\hat{R}_*}(x,y)$$

называется (min-sum)-*расстоянием* на отношении сходства R.

(min-max)-расстояние и (min-sum)-расстояние будем называть *транзитивными расстояниями*. Транзитивные расстояния используются для решения задач нечеткой классификации. Один из таких примеров — выбор транзитивно ближайших подмножеств. Для любого отношения подобия можно рассмотреть соответствующее отношение различия, которое, как известно, определяет матрицу транзитивных расстояний для элементов некоторого множества. Декомпозиционное дерево в этом случае представляет процесс классификации, когда в один класс объединяются элементы, расстояния между которыми не превышают заданного числа.

4. ЗАДАЧА НЕЧЕТКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

Пусть задано множество нечетких подмножеств $\{A_1, A_2,\dots A_n\}$ на универсальном множестве $X = (x_1, x_2,\dots x_m)$. Требуется определить транзитивно ближайшие подмножества, т. е. какие подмножества попадут в один класс эквивалентности, если в качестве расстояния между подмножествами использовать транзитивные расстояния, определенные с помощью различных типов композиций нечетких отношений.

Решение поставленной задачи осуществляется с помощью алгоритма нечеткой классификации (рис. 1).

Для перехода от R к $\hat{R}$ используется операция транзитивного замыкания. Так как в основе транзитивного замыкания лежит определенный тип композиции, то $\hat{R}$ является транзитивным отношением с определяемой этой транзитивностью принципом рационального выбора оптимального решения, и необходимо исследование, направленное на выявление необходимой транзитивности для конкретной ситуации.

Для перехода от отношения подобия к отношению различия или наоборот используется операция дополнения. Однако переход к отношению различия возможен и от отношения несходства с помощью двойственного транзитивного замыкания. Очевидно, что путь к отношению различия зависит от того, какая интерпретация при сравнении двух альтернатив является более естественной и что стоит за условием транзитивности. Несмотря на различные условия формирования входной информации, получим одно и то же отношение различия. Матрица отношения различия задает матрицу

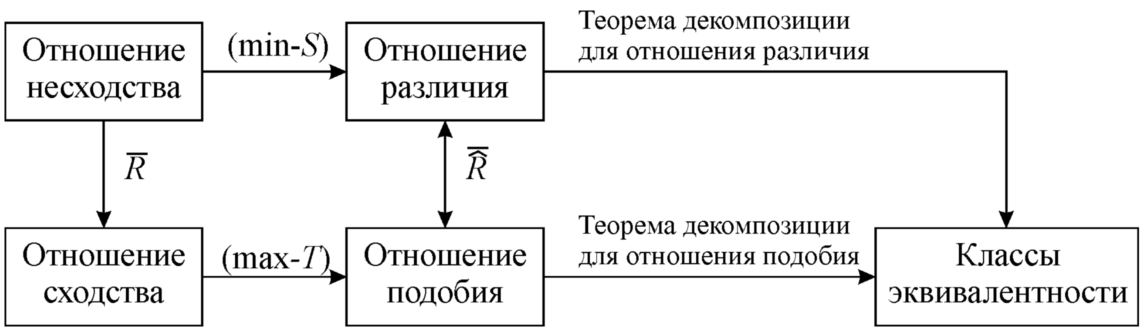

Рис. 1

транзитивных расстояний. Тип транзитивного расстояния зависит от того, с помощью какой операции было получено транзитивное замыкание.

Затем, в соответствии с теоремой о декомпозиции нечеткое отношение подобия или различия представляется в виде иерархической структуры обычных отношений эквивалентности (толерантности), упорядоченных по включению в соответствии со значением уровня α.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Исходными данными для исследования влияния операции композиции и типа функции расстояния (таблица 2) на структуру декомпозиционного дерева были выбраны нечеткие подмножества $\{A_1, A_2, \ldots A_m\}$ на универсальном множестве $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Проведенный вычислительный эксперимент позволил определить границы для порога классификации, которые содержат значения уровня, не изменяющиеся результатов классификации. Результаты исследования представлены в виде графиков зависимостей количества классов от значения уровня при различных операциях композиции для различных типов расстояний.

Введем понятие *устойчивости классификации*. Нечеткая классификация называется *устойчивой*, если можно определить интервал $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, содержащий такие значения уровня, для которых количество и состав классов постоянны при использовании различных операций композиции для одного типа расстояния. Именно на интервалах устойчивости не имеет смысла решать задачу выбора операции композиции и порога классификации, так как результат будет один и тот же. Напротив, интервал неустойчивости содержит такие значения уровня, которым соответствует различное число классов при использовании тех или иных операций композиции.

Пусть $\varepsilon_{\text{лог}}, \varepsilon_{\text{алг}}, \varepsilon_{\text{гр}}, \varepsilon_{\text{отн}}$ — пороги классификации для матрицы отношения подобия (толерантности), полученные с помощью соответствующих операций композиции. Тогда для одного и того же числа классов получим следующее неравенство:

$$\alpha_{\text{гр}} \le \alpha_{\text{алг}} \le \alpha_{\text{отн}} \le \alpha_{\text{лог}} \tag{8}$$

или

$$\varepsilon_{\text{гр}} \ge \varepsilon_{\text{алг}} \ge \varepsilon_{\text{отн}} \ge \varepsilon_{\text{лог}}. \tag{9}$$

Следовательно, можно выбрать минимальное значение порога $\varepsilon^* = \varepsilon_{\text{лог}}$, при котором получим заданное или желаемое число классов.

Вид декомпозиционного дерева зависит от формируемой матрицы несходства, поэтому целесообразно исследование вопроса о влиянии различных функций расстояния на структуру декомпозиционного дерева. Заметим, что неравенства (8) и (9) имеют место не зависимо от

Таблица 2

Тип расстояния	Функция расстояния
Хемминга	$\rho_X(A_i, A_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lvert \mu_{A_i}(x_k) - \mu_{A_j}(x_k) \rvert$
Евклидово	$\rho_E(A_i, A_j) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\mu_{A_i}(x_k) - \mu_{A_j}(x_k))^2}$
Тип 1	$\rho_{T1}(A_i, A_j) = \begin{cases} 0, \ 0 \le n \cdot \rho_X(A_i, A_j) \le \alpha, \\ 1 - e^{-(\sum_{k=1}^{n} \lvert \mu_{A_i}(x_k) - \mu_{A_j}(x_k) \rvert - \alpha)}, \ n \cdot \rho_X(A_i, A_j) > \alpha \end{cases}$
Тип 2	$\rho_{T2}(A_i, A_j) = \begin{cases} 0, \ 0 \le n \cdot \rho_X(A_i, A_j) \le \alpha, \\ 1 - e^{-(\sum_{k=1}^{n} \lvert \mu_{A_i}(x_k) - \mu_{A_j}(x_k) \rvert - \alpha)^2}, \ n \cdot \rho_X(A_i, A_j) > \alpha \end{cases}$
Тип 3	$\rho_{T3}(A_i, A_j) = \begin{cases} 0, \ 0 \le n \cdot \rho_X(A_i, A_j) \le \alpha, \\ \dfrac{(\sum_{k=1}^{n} \lvert \mu_{A_i}(x_k) - \mu_{A_j}(x_k) \rvert - \alpha)^2}{1 + (\sum_{k=1}^{n} \lvert \mu_{A_i}(x_k) - \mu_{A_j}(x_k) \rvert - \alpha)^2}, \ n \cdot \rho_X(A_i, A_j) > \alpha \end{cases}$

того, какая функция расстояния используется для формирования матрицы несходства.

Для каждого типа расстояния можно выделить интервал, на котором результаты классификации при различных операциях композиции различны (таблица 3), причем наблюдается следующая цепочка неравенств:

$$\bar{\lambda}_{T2} \le \bar{\lambda}_{T1} \le \bar{\lambda}_{T3} \le \bar{\lambda}_{X} \le \bar{\lambda}_{E}.$$

Именно на интервалах, содержащих различные результаты классификации, следует решать задачу выбора подходящего типа операции композиции при заданной функции расстояния.

Таблица 3

Тип расстояния	Интервал различия результатов классификаций при различных операциях композиции
Расстояние Хемминга	$[\underline{\lambda}_X, \bar{\lambda}_X]$
Евклидово расстояние	$[\underline{\lambda}_E, \bar{\lambda}_E]$
Расстояние типа 1	$[\underline{\lambda}_{T1}, \bar{\lambda}_{T1}]$
Расстояние типа 2	$[\underline{\lambda}_{T2}, \bar{\lambda}_{T2}]$
Расстояние типа 3	$[\underline{\lambda}_{T3}, \bar{\lambda}_{T3}]$

Для обоснования выбора операции композиции в задаче классификации на заданном количестве уровней были получены гистограммы зависимости количества уровней от типа операции композиции для определенного типа расстояния и сделаны следующие выводы. Пусть $\eta_{лог}, \eta_{алг}, \eta_{гр}, \eta_{отн}$ — количество порогов классификации для, соответственно, логической, алгебраической, граничной и относительной операций композиции. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\eta_{лог} \le \eta_{гр} \le \eta_{алг} \le \eta_{отн}.$$

Исходя из этого неравенства, можно выбирать операцию композиции для разбиения на большем или меньшем количестве порогов. При использовании логической операции композиции классификация происходит менее подробно, при использовании относительной операции композиции — более подробно.

Также полезно исследование влияния параметра на структуру декомпозиционного дерева при использовании параметрической операции композиции. Для этого были построены графики зависимости количества уровней классификации от значения параметра и получены следующие результаты (рис. 2—6):

— для расстояния Хемминга и расстояния типа 1 изменение параметра влияет на структуру декомпозиционного дерева следующим образом: при росте параметра уменьшается количество уровней классификации из декомпозиционного дерева исключается одно из звеньев, оставшаяся структура декомпозиционного дерева не изменяется;

— при использовании Евклидова расстояния и расстояния типа 3 изменение параметра не влияет на структуру декомпозиционного дерева;

— при использовании расстояния типа 2 изменение параметра на структуру декомпозиционного дерева следующим образом: сначала количество уровней убывает по мере возраста-

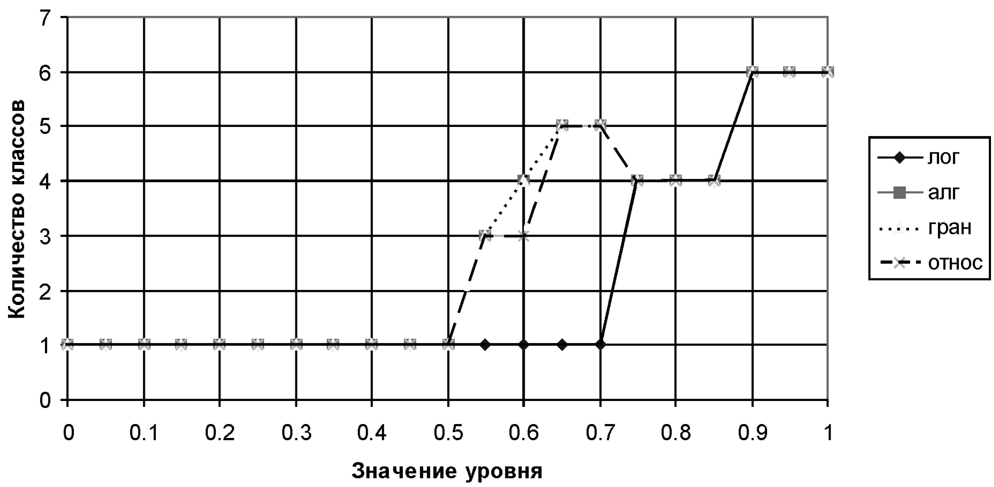

Рис. 2. Зависимость количества классов от значения уровня при различных типах операции композиции для расстояния Хемминга

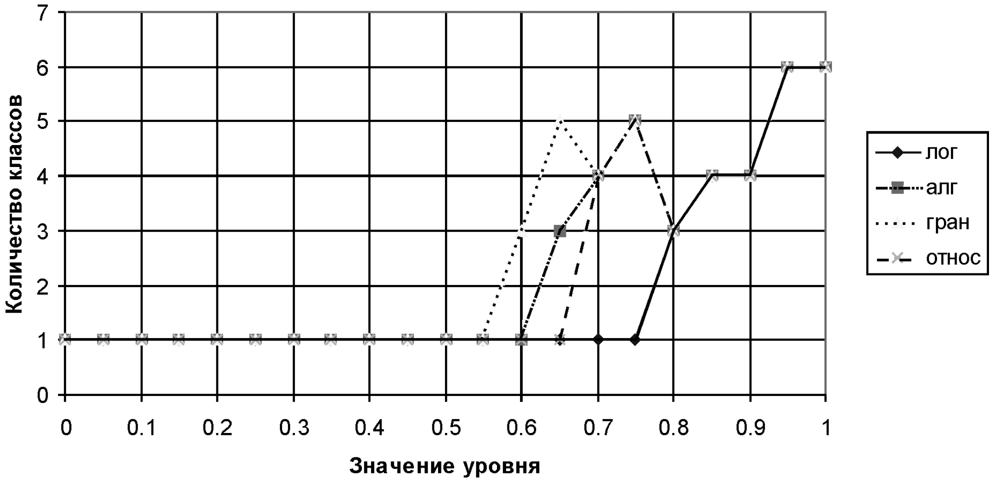

Рис. 3. Зависимость количества классов от значения уровня при различных типах операции композиции для Евклидова расстояния

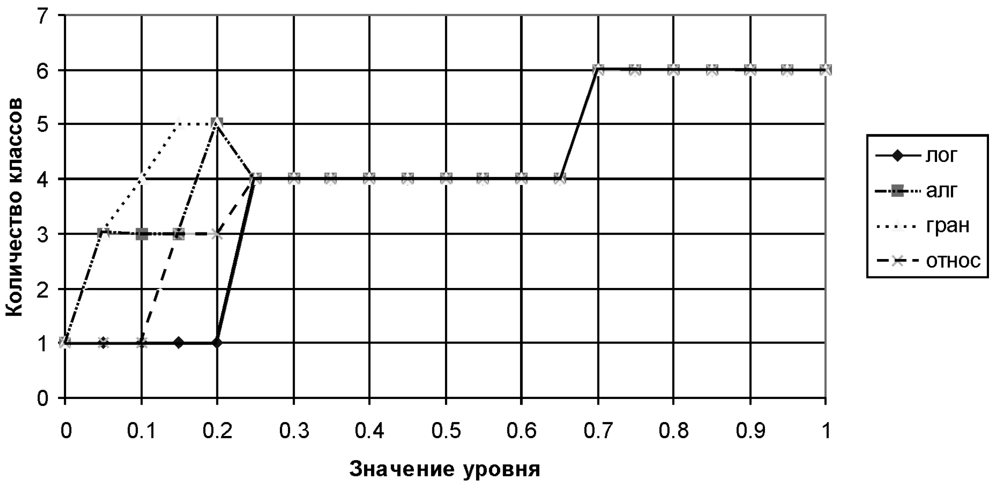

Рис. 4. Зависимость количества классов от значения уровня при различных типах операции композиции для расстояния Типа 1

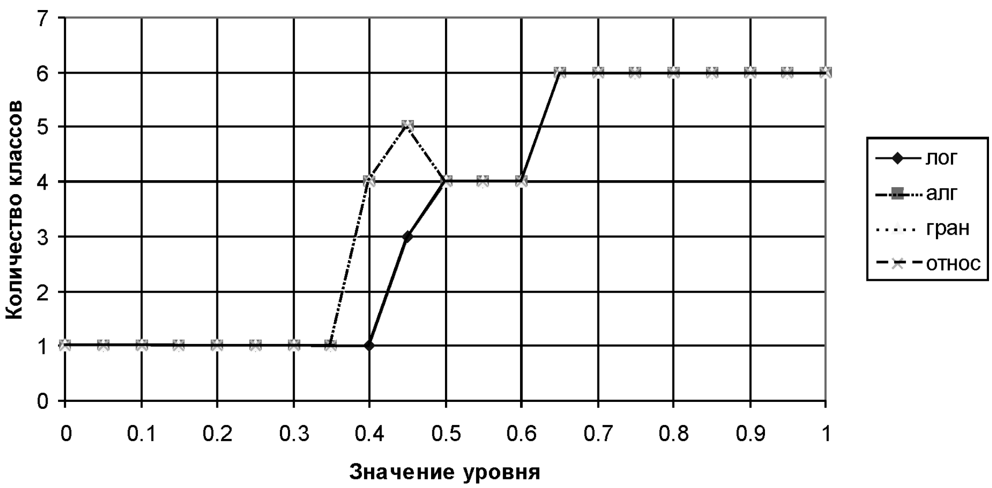

Рис. 5. Зависимость количества классов от значения уровня при различных типах операции композиции для расстояния Типа 2

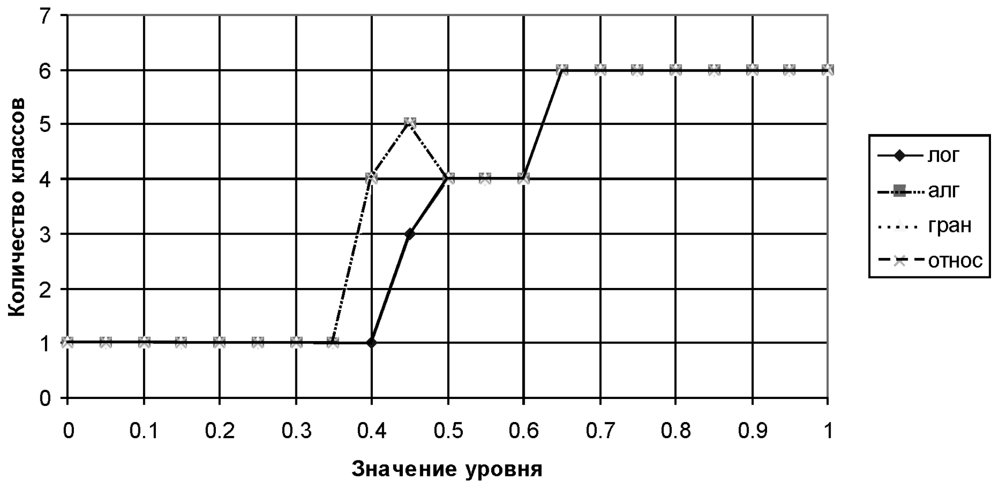

Рис. 6. Зависимость количества классов от значения уровня при различных типах операции композиции для расстояния Типа 3

ния параметра до 0, затем возрастает и снова убывает.

Итак, при решении задач классификации можно изменять значение параметра в сторону желаемого результата, при этом вид декомпозиционного дерева и, соответственно, результаты классификации будут изменяться.

Исходя из полученных результатов, можно разрабатывать рекомендации по использованию тех или иных функций расстояния и операций композиции в конкретных ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. — М.: Мир, 1976. — 168 с.

2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. — М.: Радио и связь. 1982. — 432 с.

3. *Леденева Т.М.* Моделирование процесса агрегирования информации в целенаправленных системах / Т. М. Леденева. — Воронеж: Изд-во ВГТУ. 1999. — 156 с.

4. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора / Б. Г. Миркин. — М.: Наука, 1974. — 256 с.

4. *Zimmermann H.-J.* Fuzzy Set Theory and its Applications / H.-J. Zimmermann. — Kluwer Academic Publishers, 1997. — 429 p.