УДК 517.9

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ КОШИ, СВЯЗАННЫХ С НЕКОТОРЫМИ ДИСПЕРСИОННО-ДИССИПАТИВНЫМИ МОДЕЛЯМИ

Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

В статье исследуются некоторые свойства математических моделей дисперсионно-диссипативных процессов аэродинамики, описываемых нестационарными трёхмерными уравнениями высоких порядков. В частности, строятся фундаментальные решения этих уравнений, исследуются их свойства, доказывается корректная разрешимость задач Коши для этих уравнений и устанавливается полугрупповое свойство решений.

ВВЕДЕНИЕ

При математическом моделировании некоторых процессов в плотной горячей плазме, находящейся в сильном электромагнитном поле, следует (см. [1]) учитывать не только дисперсионные факторы и чисто квантовые эффекты, но также и диссипативные факторы и газодинамические эффекты. Ранее (см. [2]) автором исследовалась трехмерная математическая модель ионизационных волн в горячей плотной плазме, однако она оказалась слишком сложной для получения качественной картины процесса. В данной работе представляются 3 новые упрощённые трёхмерные модели, полученные добавлением дисперсионных или диссипативных факторов к одномерным моделям, описываемым уравнениями Бюргерса, Кортевега-де Фриза и Кельвина—Фойгхта и адаптированных методом гидродинамической аналогии (см. [3]) к трехмерным линеаризованным моделям, описывающимся следующими уравнениями:

$$L_j(D)u(t,\vec{r}) = f(t,\vec{r}); \qquad (1)$$

$$L_{(1)}(D) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \pm a\frac{\partial}{\partial x} + b\right) - \Delta_{(y,z)}, \qquad (2)$$

$$L_{(2)} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \pm a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial x} - \Delta_{(y,z)}, \qquad (3)$$

$$L_{(3)} \equiv -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm a\frac{\partial}{\partial x} - b\right) - \Delta_{(y,z)}. \qquad (4)$$

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КОШИ И ИХ СВОЙСТВА

Введём необходимые обозначения. Пусть $\vec{r} = \{x, y, z\}$ — точка евклидова пространства R^3; $R^4_+ = \{(t,\vec{r}) : t > 0, \vec{r} \in R^3\}$, $D = \{D_t; D_x, D_y, D_z\}$, где $D_{(\cdot)} = \dfrac{\partial}{\partial(\cdot)}$, $\Delta_{(y,z)} = D_y^2 + D_z^2$. Как обычно, через $\overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$ обозначим пространство распределений $T \in S'(R^4)$ таких, что $\mathrm{supp}(T) \subset \bar{R}^4_+$ (см. [4]).

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Операторы* $L_j(D), (j = 1,2,3)$, *определённые равенствами* (2), (4), *имеют фундаментальные решения Коши* $E_{(j)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$, *представляющие собой регулярные распределения следующего вида:*

$$E_{(1)}(t,\vec{r}) = \frac{\theta(t)}{(48)^{1/3}\pi(tr)^{2/3}}\exp\left(-\frac{br^2}{4t}\right)\times \times Ai\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{xt^{1/3}}{r^{2/3}} \mp \frac{ar^{4/3}}{(48)^{1/3}t^{2/3}}\right), \qquad (5)$$

$$E_{(2)}(t,\vec{r}) = \frac{\theta(t)}{8(\pi t)^{3/2}}\times \times\exp\left(-\frac{(x \mp at - r^2/4t)^2}{4t} - bt\right), \qquad (6)$$

$$E_{(3)} = \frac{\theta(t)}{4\pi^{3/2}t^{1/2}r}\exp\left[-\left(\frac{x}{r} \pm \frac{ar}{4t}\right)^2 t - \frac{br^2}{4t}\right], \qquad (7)$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\theta(\cdot)$ — *функция Хевисайда, а* $Ai(\cdot)$ — *функция Эйри 1-го рода (см. [5]).*

Доказательство основано на следующем утверждении (см. [4]):

Предложение 1. *Пусть оператор*

$$L_{(0)}(D_t, D_x) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P(D_x)$$

имеет фундаментальное решение Коши $E_{(0)}(t,x)$.

Тогда оператор

$$L(D) \equiv P_1(D_x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_2(D_x)\right) - \Delta,$$

$$P_j(D_x) = a_j + b_j D_x + c_j P(D_x),\, j = 1,2;$$

$$a_j, c_j \geq 0, b_j \in R;|$$

$$a_1 | + | a_2 | + | c_1 | + | c_2 | + | b_1 | + | b_2 |> 0$$

тоже имеет фундаментальное решение Коши $E(t,\vec{r})$, причём

$$E(t,\vec{r}) = (4\pi t)^{-1} \cdot \exp(-\omega_1) E^{(0)}(\omega_2, z),$$

$$\omega_1 = a_2 t + a_1 r^2 / 4t, \omega_2 = c_2 t + c_1 r^2 / 4t,$$

$$z = x - b_2 t - b_1 r^2 / 4t, r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Из теоремы 1 (формулы (5—7) и из свойств функции Эйри $Ai(\cdot)$ (см. [5]) следует справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. *Фундаментальные решения Коши* $E_{(j)}$, $j = 1,2,3$, *удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\begin{aligned}&\sin g \sup p(E_{(1)}) = \\ &= \{t = 0, x \geq 0, y = z = 0\},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\sin g \sup p(E_{(j)}) = \{t = 0, \vec{r} = \vec{0}\},\, j = 2,3, \tag{9}$$

$$\int_{R^3} P_j(D_x) E_{(j)}(t,\vec{r}) d\vec{r} \equiv 1, t > 0, j = 1,3, \tag{10}$$

$$\int_{R^3} P_2(D_x) E_{(2)}(t,\vec{r}) d\vec{r} \equiv \exp(-bt), t > 0, \tag{11}$$

$$E_{(j)}(t,\vec{r}) = o(1), \vec{r} \to \infty, \tag{12}$$

где

$$P_{(1)}(D_x) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \pm a \frac{\partial}{\partial x} + b, \tag{13}$$

$$P_{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \tag{14}$$

$$P_{(3)} \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mp a \frac{\partial}{\partial x} + b. \tag{15}$$

Лемма 2. *Фундаментальные решения Коши* $E_{(j)}$, $j = 1,2,3$, *обладают следующими свойствами:*

$$P_{(j)}(D_x) E_{(j)} |_{t=+0} = \delta(\vec{r}),\, j = 1,2,3, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&P_{(j)}(D_x)(E_{(j)}(t_1,\cdot) * E_{(j)}(t_2,\cdot))(\vec{r}) = \\ &= E_{(j)}(t_1 + t_2, \vec{r}), t_1, t_2 > 0, j = 1,2,3,\end{aligned} \tag{17}$$

где знак «*» означает свёртку по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ И ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА

Из лемм 1 и 2 (см. формулы (8)—(17)) следует справедливость следующих утверждений

Теорема 2. *Задача Коши:*

$$L_{(j)}(D) u = f(t,\vec{r}), t > 0, \vec{r} \in R^3, \tag{18}$$

$$u |_{t=+0} = h(\vec{r}), \tag{19}$$

$$u(t,\vec{r}) = o(1), \vec{r} \to \infty, \tag{20}$$

где $h \in S'(R^3), f \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$, *причём*

$$h(\vec{r}), f(t,\vec{r}) = o(1), \vec{r} \to \infty \tag{21}$$

корректно разрешима в классе $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$, *а её решение может быть представлено в виде:*

$$\begin{aligned}&u(t,\vec{r}) = P_{(j)}(D_x)(E_{(j)}(t,\cdot) * h(\cdot))(\vec{r}) + \\ &+ \int_0^t (E_{(j)}(t-\tau,\cdot) * f(\tau,\cdot))(\vec{r}) d\tau,\end{aligned} \tag{22}$$

где операторы $P_{(j)}$ *определены формулами (13), (15).*

На основании формул (17) и (22) следует *полугрупповое свойство решения задачи Коши:*

Теорема 3. *Решение* $u(t,\vec{r})$ *задачи Коши* (18), (21) *обладает следующим свойством:*

$$\begin{aligned}&u(t_1 + t_2, \vec{r}) = \\ &= P_{(j)}(D_x)(E_{(j)}(t_1,\cdot) * u(t_2,\cdot))(\vec{r}), j = 1,2,3.\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда / Ю. П. Райзер. — М.: Наука, 1987. — 592 с.

2. *Засорин Ю.В.* Асимптотические и полугрупповые свойства решения задачи Коши для одного уравнения математической физики / Ю. В. Засорин // Вестник ВГУ, серия «Физика, математика». 2005, № 1. — С. 171—173.

3. *Кочин Н.Е.* Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Ч. 2. — М.: Физматгиз, 1953. — 728 с.

4. *Засорин Ю.В.* О редукции некоторых классов уравнений в частных производных к уравнениям с меньшим числом переменных и точные решения / Ю. В. Засорин // Сиб. мат. журнал, июль—август 2006, Т. 47, № 4. — С. 791—797.

5. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер. — М.: Наука, 1990. — 528 с.