УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАМКНУТЫМ ЦИКЛОМ

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев

Воронежский государственный университет

Рассматривается задача конечномерного управления бесконечномерными объектами с замкнутым циклом. Для синтеза конечномерного модального регулятора трансцендентная передаточная функции объекта аппроксимируется дробно-рациональной функцией конечного порядка. Синтезированный регулятор обеспечивает не только устойчивость замкнутой системы управления, но и заданные показатели качества переходного процесса.

ВВЕДЕНИЕ

Объекты с рециркуляционными потоками вещества (замкнутым циклом) широко применяются в химической, горнорудной, нефтегазовой, цементной, горнообогатительной и др. отраслях [1, 2], т. к. только в объектах с рециклом можно добиться максимального использования сырья при небольших размерах агрегата [2]. Этот факт объясняется тем, что в объектах с замкнутым циклом исходный материал непрерывно смешивается с уже частично переработанным рециркулятом, поступающим по каналу обратной связи, и суммарное вещество, более близкое к требуемому качеству, которым обладает готовый продукт, легче перерабатывается рабочей частью объекта с меньшей ее нагрузкой. При рециркуляции реакция протекает на высоких уровнях скорости процесса и при небольших степенях превращения за один проход обеспечивается полная переработка исходного сырья, т. е. в объектах с рециклом можно добиться значительного повышения производительности единицы реакторного объема и высокой селективности протекающего в нем процесса [3].

Однако также известно [4], что объекты с замкнутым циклом трудно поддаются автоматизации и очень часто не обеспечивается требуемое качество регулирования с помощью типовых регуляторов. Это вызвано тем, что объект с рециклом обладает большой длительностью самовыравнивания и значительной колебательностью выходной переменной. Кроме того, объект с замкнутым циклом является бесконечномерным и описывается трансцендентной передаточной функцией. Управление бесконечномерными объектами с помощью конечномерных регуляторов представляет собой очень трудную задачу [5, 6, 7]. Поэтому проблема управления объектами с замкнутым циклом в настоящее время является актуальной.

В данной работе рассматривается задача построения конечномерного регулятора для объекта с замкнутым циклом. Предлагаемый в статье метод построения регулятора основан на методе синтеза модальных регуляторов [8, 9] и гарантирует устойчивость и заданное качество переходного процесса замкнутой системы управления для широкого класса входных воздействий.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА

В работах [1б 10] на основе уравнений материального баланса для одного типового объекта с замкнутым циклом получена динамическая модель, которую можно представить в виде инерционного канала с запаздыванием, охваченного запаздывающей положительной обратной связью из-за наличия рецикла. В общем случае одномерный типовой объект с рециклом описывается следующим дифференциально-разностным уравнением [1]:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t-\tau_1) + \\ +cx(t-\tau_2) + f(t), \tau_2 \geq \tau_1 > 0, \\ x(t) = \varphi_x(t),\ \ t_0 - \tau_2 \|t\| t_0, \\ u(t) = \varphi_u(t),\ \ t_0 - \tau_1 \|t\| t_0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $a, b, c > 0$ — заданные числа, при этом $c \leq a$; $x(t)$ — выходная переменная; $u(t)$ — управляющее воздействие; $f(t)$ — возмущающее воздействие; $\varphi_x(t)$ и $\varphi_u(t)$ — заданные начальные функции.

По уравнению (1) находим передаточную функцию объекта по управлению

$$W(p) = \frac{be^{-\tau_1 p}}{p + a - ce^{-\tau_2 p}}. \tag{2}$$

Известно [5], что объекты рассматриваемого типа при $0 < c < a$ являются устойчивыми, а при $0 < c = a$ имеют полюс первого порядка. Поэтому для мероморфной функции $W(p)$ справедлива следующая теорема [11].

Теорема 1. *Для того, чтобы точка α была полюсом функции $W(p)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $W(p)$ в окрестности α, $0 < |p-\alpha| < R$ содержала лишь конечное число членов:*

$$W(p) = \frac{c_{-r}}{(p-\alpha)^r} + \cdots + \frac{c_{-1}}{p-\alpha} + \\ +\sum_{k=0}^{\infty} c_k (p-\alpha)^k, \;\; r \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

При этом номер старшего отрицательного члена разложения совпадает с порядком полюса.

Коэффициенты c_n в разложении (3) определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma} \frac{W(p)dp}{(p-\alpha)^{n+1}}, \;\; n = -r, -r+1, \ldots, \tag{4}$$

где $\gamma : |p-\alpha| = \rho, \;\; 0 < \rho < R.$

Применяя теорему 1 к передаточной функции $W(p)$ и учитывая, что в рассматриваемом случае $\alpha = 0$ и $r = 1$, получим разложение

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p), \tag{5}$$

где $W_1(p)$ — главная часть $W(p)$ в точке $p = 1$,

$$W_1(p) = \frac{c_{-1}}{p}, \tag{6}$$

$W_2(p)$ — правильная часть функции $W(p)$ в точке $p = 0$,

$$W_2(p) = W(p) - W_1(p) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^k = \sum_{k=0}^{N} c_k p^k + \Delta_N(p), \tag{7}$$

где остаточный член $\Delta_N(p)$ имеет вид [11]

$$\Delta_N(p) = \frac{p^{N+1}}{2\pi j}\int_{\gamma} \frac{W_2(z)dz}{(z-p)z^{N+1}}, \tag{8}$$

γ — некоторый замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции и содержащий точки p и 0. Ряд Тейлора (7) сходится равномерно [11] в произвольной замкнутой области Г, лежащей в круге аналитичности функции $W_2(p)$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_N(p) = 0 \;\; \forall p \in \Gamma. \tag{9}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $W(p)$ имеет вид (2) и $0 < c = a$. Тогда для любого $\Omega > 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N > N_0$ справедливо неравенство*

$$|W(p) - W^*(p)| = |\Delta_N(p)| < \varepsilon \;\; \forall \; |p| < \Omega. \tag{10}$$

Здесь

$$W^*(p) = W_1(p) + \sum_{k=0}^{N} c_k p^k = \frac{B(p)}{A(p)}. \tag{11}$$

Из теоремы 2 и формул (5), (6) сразу следует, что в области $|p| < \Omega$ передаточную функцию $W(p)$ можно приблизить сколь угодно точно дробно-рациональной функцией $W^*(p)$, имеющей равное с $W(p)$ число нулевых полюсов. В силу условия $0 < c \le a$ функция $W(p)$ правых полюсов не имеет, т. е. является либо устойчивой (при $0 < c < a$), либо нейтральной (при $0 < c = a$).

Предлагаемый в данной статье способ дробно-рациональной конечномерной аппроксимации трансцендентной функции в комплексной области не является единственным [12, 13]. Очевидно, что различные методы аппроксимации имеют свои достоинства и недостатки. С точки зрения задач управления эффективность того или иного способа приближения определяется тем, насколько полно аппроксимирующая модель отражает свойства исходного бесконечномерного объекта. Так как в системе автоматического регулирования входные воздействия на объект с распределенными параметрами со стороны подсистемы с сосредоточенными параметрами можно считать функциями с ограниченным спектром, а сама сосредоточенная система имеет ограниченную полосу пропускания, то выбор аппроксимирующей функции можно осуществлять на основе близости (в смысле определенных критериев) к точной передаточной функции объекта в некоторой области $|p| < \Omega$, что соответствует полосе частот $0 \le \omega < \Omega$. Предлагаемый в настоящей работе способ аппроксимации трансцендентных передаточных функций дробно-рациональными функциями, при котором аппроксимирующая модель с передаточной функцией $W^*(p)$ в области $|p| < \Omega$ имеет те же полюсы, что и передаточная функция исходного объекта $W(p)$, и главные части $W(p)$ и $W^*(p)$ в этих полюсах совпадают, реализует описанную выше идею. При такой аппроксимации ошибка воспроизведения сигнала будет тем меньше, чем уже его спектр [14]. Величину Ω следует выбирать такой, чтобы основная часть спектра типичных входных воздействий лежала в области $0 \le \omega < \Omega$.

2. СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Для управления бесконечномерными объектами, к которым относятся объекты с замкнутым циклом, можно использовать конечномерные и бесконечномерные регуляторы. В частности, для устойчивых объектов с запаздыванием широко применяются упредители Смита [6], содержащие в своей структуре модель исходного бесконечномерного объекта. Однако, как показано в [6], для неустойчивых и нейтральных объектов система управления с упредителем Смита может оказаться неработоспособной. В то же время конечномерные регуляторы [5], синтезированные по аппроксимирующей модели, как правило, позволяют обеспечить не только устойчивость, но и заданное качество переходного процесса замкнутой системы с бесконечномерным объектом. Предложенный в [8, 9] метод построения модальных регуляторов дает возможность синтезировать конечномерные регуляторы для широкого класса бесконечномерных объектов, в том числе и для объектов с замкнутым циклом.

Итак, пусть задана дробно-рациональная функция (11) конечного порядка. Отметим, что метод построения регуляторов [9] при соответствующем выборе степени характеристического полинома позволяет синтезировать реализуемый модальный регулятор $V(p)$ для нереализуемого объекта. Поэтому степени многочленов $B(p)$ и $A(p)$ в (11) могут быть произвольными.

Пусть

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} \qquad (12)$$

— передаточная функция реализуемого регулятора, найденного с помощью метода синтеза модальных регуляторов [9]. Здесь $S(p)$, $R(p)$, $\deg R(p) \ge \deg S(p)$ — некоторые алгебраические многочлены, удовлетворяющие условию

$$S(p)B(p) + R(p)A(p) = D(p), \qquad (13)$$

где $D(p)$ — заданный характеристический полином одноконтурной системы управления с регулятором $V(p)$ в прямой цепи. Многочлен $D(p)$ следует выбирать из класса гурвицевых полиномов.

Так как функции $W(p)$ и $W^*(p)$ имеют равное число полюсов в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge 0$, то условием устойчивости замкнутой системы регулирования с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{V(p)W(p)}{1 + V(p)W(p)} \qquad (14)$$

является следующее неравенство [15, 16]:

$$|1 + V(j\omega)W(j\omega)| > |V(j\omega)\Delta_N(j\omega)| \quad \forall \omega \ge 0. \qquad (15)$$

В [17] показано, что за счет выбора Ω, N и $D(p)$ можно обеспечить выполнения соотношение (15), т. е. устойчивость замкнутой системы регулирования с бесконечномерным объектом.

Условие (15) есть условие робастности регулятора (12) при неструктурированных параметрических возмущениях $\Delta_N(p)$ объекта $W^*(p)$. Величина $\sup_{\omega \ge 0} |1 + V(j\omega)W(j\omega)|$ характеризует запас устойчивости системы по амплитуде и фазе, который является классической мерой робастности.

3. ПРИМЕР

Исследуемый объект — колонна дисоли — предназначена для получения гидроксиламиндисульфоната (ГАДС), используемого в производстве ε-капролактама [18]. Дифференциально-разностное уравнение, приближенно описывающее процесс получения ГАДС в насадочной абсорбционной колонне с рециклом, имеет следующий вид [19]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -3,2x(t) + 3,2x(t-1) + \\ +3,2u(t-0,625), \end{aligned} \qquad (16)$$

где $x(t)$ — выходная переменная, величина pH циркуляционного раствора; $u(t)$ — управляющее воздействие, расход нитрата аммония. Масштаб времени выбран таким образом, что одна единица времени соответствует 96 *с*. Заметим, что данный объект регулирования (16) содержит запаздывание как по координате $x(t)$, так и по управлению $u(t)$. Запаздывание в управлении вызвано тем, что исполнительный механизм устанавливается на определенном расстоянии от реактора, т. е., как и запаздывание в координате, обусловлено особенностью технологической схемы процесса.

Рассматриваемая задача состоит в поддержании заданного значения концентрационной переменной pH, характеризующей направление и скорость химической реакции взаимодействия смеси продукционного и циркуляционного растворов с сернистым газом [18]. Следует отметить, что изменением расхода или концентрации реагентов можно управлять величиной pH.

Так как при резких колебаниях расхода или концентрации управляющего реагента часть этого реагента не успевает полностью вступить в реакцию, то в [19] предложена система регулирования pH, обеспечивающая минимальные отклонения входных и выходных параметров объекта от номинальных значений. В качестве минимизирующего функционала рассматривается

$$I = \int_0^\infty (x^2(t) + y^2(t) + u^2(t))dt, \qquad (17)$$

где $y(t)$ — фиктивная переменная, связанная с $x(t)$ следующим соотношением:

$$\dot{y}(t) = x(t). \qquad (18)$$

Передаточные функции субоптимальных астатических регуляторов для объекта (16), синтезированные с помощью методики, изложенной в [19], имеют вид

$$V_1(p) = \frac{[1,02pr_1^2 + 0,9pr_1 + 0,527p + r_1^2]q_1^2}{[1,302q_1^2 + 0,644q_1 + 0,338]r_1^2 p}, \qquad (19)$$

$$V_2(p) = \frac{[3,17r_2^4 + 2pr_2^4 + 0,77pr_2^3 + 1,1pr_2^2 + 1,36pr_2 + 0,7p]q_2^4}{[1,33q_2^4 + 0,76q_2^3 + 0,87q_2^2 + 0,92q_2 + 0,46]r_2^4 p}. \qquad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,5p + 1, \quad q_1 = 0,3125p + 1; \\ r_2 &= 0,25p + 1, \quad q_2 = 0,156p + 1. \end{aligned} \qquad (21)$$

Моделирование субоптимальных систем (16), (19) и (16), (20) показало (см. рис. 1 и 2, кривая 1 соответствует системе (16), (19), а кривая 2 — системе (16), (20)), что переходный процесс в системах при отработке ступенчатого воздействия имеет колебательный характер. Это объясняется выбором интегрального критерия качества: обеспечение астатизма потребовало введение в критерий интеграла от величины отклонения pH от номинального значения. В то же время использование в критерии производных от величины отклонения способно обеспечить более плавный, без резких изменений переходный процесс. Однако для предложенной в [19] методики такой критерий не позволит получить астатический регулятор.

Рассмотрим применение изложенного в данной статье метода для синтеза конечномерного регулятора для объекта с замкнутым циклом (16). С этой целью в качестве аппроксимирующей модели выберем дробно-рациональную передаточную функцию (11) следующего вида:

$$W^*(p) = \frac{0,00016p^4 + 0,00965p^3 - 0,01878p^2 - 0,18594p + 0,76190}{p}. \qquad (22)$$

Пусть характеристический многочлен $D(p)$ замкнутой конечномерной системы регулирования имеет вид

$$D(p) = (p + 0,7)(p + 2)(p + 3)(p + 4)(p + 6). \qquad (23)$$

Тогда передаточная функция астатического конечномерного регулятора будет определяться формулой

$$V_3(p) = \frac{386,66250p + 132,30000}{(0,93738p^3 + 11,94935p^2 + 96,48359p + 310,38036)p}. \qquad (24)$$

Переходный процесс и управление для замкнутой системы регулирования с объектом и регулятором (24) изображены на рис. 1 и рис. 2 (кривые 3 на соответствующих рис.). Значения функционала качества для систем (16), (19); (16), (20) и (16), (24) равны соответственно

$$I_1 = 4,51552, \quad I_2 = 4,26738, \quad I_3 = 5,73737. \qquad (25)$$

Для характеристического многочлена

$$\begin{aligned} D(p) = (p + 0,56)(p + 1,51) \times \\ \times (p + 6,39)(p + 10,39)(p + 12,89) \end{aligned} \qquad (26)$$

передаточная функция астатического конечномерного регулятора будет иметь вид

$$V_4(p) = \frac{2870,62237p + 949,80316}{(0,53508p^3 + 3,89999p^2 + 389,68412p + 2017,64281)p}. \qquad (27)$$

Переходные процессы и управления представлены на рис. 1 и 2 (кривые 4 на соответствующих рис.). Значения функционала качества при этом равно

$$I_4 = 4,77459. \qquad (28)$$

Несмотря на то, что характеристический полином (26) обеспечивает меньшее значение заданного функционала качества, чем (23), т. е. является предпочтительным, многочлен (23) позволяет синтезировать регулятор, обеспечивающий апериодический, а не колебательный, как для (26), переходный процесс. Результаты моделирования систем (16), (24) и (16), (27)

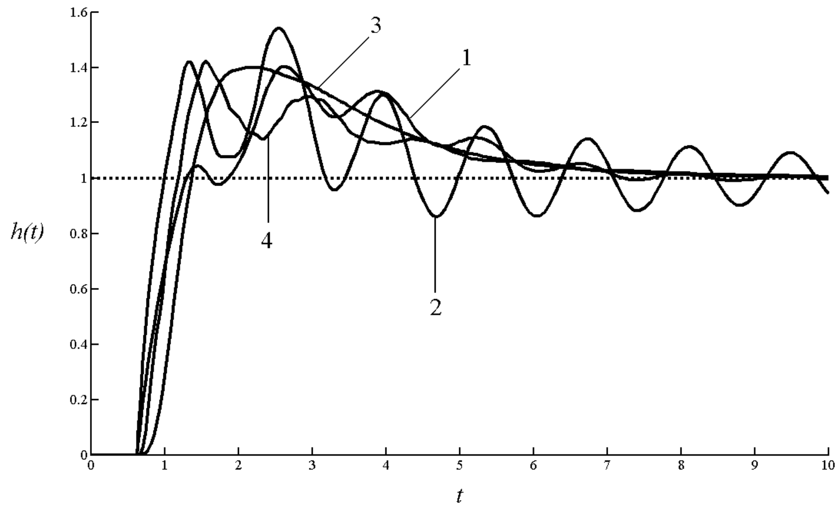

Рис. 1

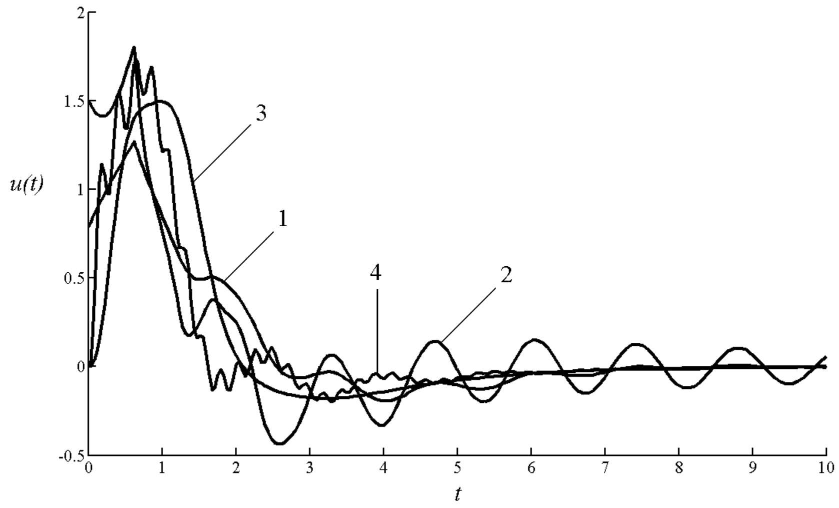

Рис. 2

показывают достаточно высокое качество переходного процесса при отработке ступенчатого сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хайниш С.В.* Об оптимальном управлении объектами с замкнутым циклом // Сб. «Управление сложными системами». — М.: ИАТ, 1974. С. 42—55.

2. *Нагиев М.Ф.* Теоретические основы рециркуляционных процессов в химии. — М.: Наука, 1962.

3. *Нагиев М.Ф.* Исследования в области кинетики, моделирования и оптимизации химических процессов. — Баку: ЭЛМ, 1970.

4. *Утеуш Э.В., Утеуш З.В.* Введение в кибернетическое моделирование. — М.: Энергия, 1971.

5. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. — М.: Машиностроение, 1974.

6. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Построение регулятора для объекта с распределенными параметрами по передаточной функции замкнутой системы // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 2. 2004. С. 154—157.

7. *Curtain R., Zwart H.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. New York: Springer-Verlag, 1995.

8. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. 4. 2003. С. 17—20.

9. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Синтез модальных систем управления // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. 1. 2004. С. 103—109.

10. *Мазуров В.М., Хайниш С.В.* Идентификация объекта управления с рециклом // Сб. «Автоматические системы оптимального управления технологическими процессами». Вып. 3. — Тула: Изд-во

Тульского политехнического института, 1972. С. 218—228.

11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.

12. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986.

13. *Gu G., Khargonekar P.P., Lee B.E.* Approximation on infinite-dimensional systems // IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, №. 6, June 1989, P. 610—618.

14. *Рассудов Л.Н., Мядзель В.Н.* Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. — Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987.

15. Теория автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, Т. 1, 1967. Т. 2, 1967.

16. *Desoer C.A., Wang Y.-T.* On the generalized Nyquist stability criterion // IEEE Transactions on Automatic Coontrol, vol. AC-25, №. 2, April 1989, P. 187—196.

17. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Синтез конечномерных регуляторов для объектов с запаздыванием // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 1. 2005. С. 158—162.

18. *Мазуров В.М., Малов Д.И., Саломыков В.И.* Система автоматического регулирования величины в абсорбционной колонне с рециклом // Химическая промышленность. № 4. 1974. С. 63—65.

19. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. — М.: Наука, 1978.