УДК 517.927.2

ОБ ОДНОЙ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ*

А. В. Грищенко, В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет

В работе рассматривается краевая задача $-u''(x)+su(x)=f(x),(x\in\Gamma),u'\,|_{\partial\Gamma}=0,$ (s — комплексный параметр, $\operatorname{Re} s>0$) на связном открытом геометрическом графе. Получена асимптотика функции Грина при $\operatorname{Im} s\to\infty$, позволяющая обосновать существование ее прообраза при одностороннем преобразовании Лапласа.

Введение. В работе рассматривается следующая задача на открытом связном геометрическом графе $\Gamma\subset R^n$:

$$-u''(x)+(\sigma+i\tau)u(x)=f(x),x\in\Gamma, \qquad (1)$$

$$u'\,|_{\partial\Gamma}=0, \qquad (2)$$

которая понимается в том же смысле, что и в [1]; σ и τ здесь — вещественные параметры, причем $\sigma>0$ фиксировано; i — мнимая единица. Цель работы — получение асимптотики (при $\tau\to\infty$) функции Грина задачи (1), (2). Необходимость в этом возникает, например, при исследовании с помощью преобразования Лапласа параболического уравнения на геометрическом графе с кусочно-постоянными по x коэффициентами и с экспоненциально убывающим по t на части Γ потенциалом (см., например, [2]).

Через $G(x,\xi;\tau)$ обозначим функцию Грина задачи (1), (2), понимаемую в соответствии со *связным подходом*, изложенным в [1] (см. глава 3, пункт 3.2). В частности, это означает, что для каждого $\tau\in\mathbf{R}$ $G(\cdot,\cdot;\tau)$ действует из $\Gamma\times R(\Gamma)$ в $\mathbf{C}$ и непрерывна и что для всякого $\tau\in\mathbf{R}$ и для любой комплекснозначной $f(x)$, сужение которой на каждое из ребер геометрического графа Γ равномерно непрерывно, решение (комплекснозначное) $u(x;\tau)$ задачи (1), (2) может быть представлено в виде

$$u(x;\tau)=\int\limits_{R(\Gamma)}G(x,\xi;\tau)f(\xi)d\xi.$$

Уравнение (1) понимается в том смысле, что искомая функция u непрерывна на Γ, сужения ее первой и второй производных на каждое из ребер Γ равномерно непрерывны, причем в каждой внутренней вершине a геометрического графа Γ выполняется так называемое (см. [1]) условие гладкости функции u:

$$\sum_{h\in D(a)}u_h^+(a;\tau)=0,$$

где $D(a)=\{h\in R^n:\|h\|=1,a+\varepsilon h\in\Gamma$ для достаточно малых $\varepsilon>0\}$, $u_h^+(a;\tau)=$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{u(a+\varepsilon h;\tau)-u(a;\tau)}{\varepsilon}$.

Относительно множества $\partial\Gamma$ граничных вершин Γ мы будем предполагать, что к каждой граничной вершине примыкает ровно одно ребро и что каждая вершина Γ, к которой примыкает ровно одно ребро, является граничной.

Основной результат. Для формулировки основного результата нам понадобятся следующие понятия.

Определение 1. Будем говорить, что открытый связный геометрический граф Γ является деревом, если он не содержит циклов, т. е. не имеет подмножеств гомеоморфных окружности.

Определение 2. Пусть Γ и Γ_1 — связные геометрические графы, причем $\Gamma_1\subseteq\Gamma$. Тогда если 1) $\partial\Gamma_1=\{a;b\}$, 2) все внутренние вершины Γ_1 являются внутренними вершинами Γ, 3) к каждой внутренней вершине геометрического графа Γ_1 примыкает ровно два его ребра, то Γ_1 назовем путем геометрического графа Γ, соединяющим точки a и b.

Определение 3. Если Γ_1 — путь геометрического графа Γ, то длиной пути Γ_1 назовем сумму длин всех ребер Γ_1.

Теорема. Пусть Γ *является деревом, а* α *— произвольная граничная вершина* Γ. *Тогда* $|\,G(x,\alpha;\tau)\,|=O^*(|\,\tau\,|^{-1/2}\ e^{-\rho(\alpha,x)\gamma(\tau)})$ (*при* $\tau\to\infty$),

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00049)

где $\rho(\alpha, x)$ — длина пути, соединяющего точки x и α. Здесь $\gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$.

Напомним, что запись $f(\tau) = O^*(g(\tau))$ (при $\tau \to \infty$) означает, что $\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{f(\tau)}{g(\tau)} = q \neq 0$.

Доказательство. Доказательство будем проводить методом индукции по числу внутренних вершин.

Проверим базу индукции. Когда у геометрического графа нет внутренних вершин, то получаем задачу (1), (2) на интервале (можно считать, что в данном случае $\Gamma = (a,b) \subset \mathbf{R}^1$). Функция Грина задачи (1), (2) на $\Gamma = (a,b)$ имеет вид:

$$G(x,\xi;\tau) = \begin{cases} -\dfrac{ch(\sqrt{s}(x-b))ch(\sqrt{s}(\xi-a))}{\sqrt{s}sh((b-a)\sqrt{s})}, x \geq \xi, \\ -\dfrac{ch(\sqrt{s}(x-a))ch(\sqrt{s}(\xi-b))}{\sqrt{s}sh((b-a)\sqrt{s})}, x \leq \xi, \end{cases}$$

где $s = \sigma + i\tau$; здесь и далее берется главное значение $\sqrt{s}$, т. е. $\operatorname{Re}\sqrt{s} > 0$.

Проверим утверждение теоремы. В данном случае

$$|G(x,a;\tau)| = \left|\frac{ch(\sqrt{s}(b-x))}{sh(\sqrt{s}(b-a))\sqrt{s}}\right| =$$

$$= \frac{e^{-\alpha(x-a)}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{\sqrt{1+e^{-2\alpha(b-x)}+e^{-4\alpha(b-x)}}}{\sqrt{1+e^{-2\alpha(b-a)}+e^{-4\alpha(b-a)}}}.$$

Здесь $\sqrt{s} = \alpha + i\beta$. Далее, так как $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma + \sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$, а $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\sigma + \sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$, то получаем требуемое. Случай $\xi = b$ рассматривается аналогично.

Предположим, что утверждение теоремы выполнено для любого геометрического графа с количеством внутренних вершин $\leq k$, и покажем, что тогда утверждение теоремы выполнено и для геометрического графа с $(k+1)$ внутренними вершинами. Далее в рассуждениях предполагаем, что Γ имеет $(k+1)$ внутренних вершин. Выберем произвольную внутреннюю вершину a геометрического графа Γ. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ $(m \geq 2)$ — компоненты связности множества $\Gamma \setminus \{a\}$. Тогда функция Грина задачи (1), (2) может быть записана в виде* (при $x \neq a$ и $\xi \neq a$)

$$G(x,\xi;\tau) =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\tau)}\begin{vmatrix} H(x,\xi;\tau) & \tilde{\varphi}_1(x;\tau) & \ldots & \tilde{\varphi}_m(x;\tau) \\ l_1(\cdot,\xi;\tau) & l_1\tilde{\varphi}_1(\cdot;\tau) & \ldots & l_1\tilde{\varphi}_m(\cdot;\tau) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ l_{m-1}(\cdot,\xi;\tau) & l_{m-1}\tilde{\varphi}_1(\cdot;\tau) & \ldots & l_{m-1}\tilde{\varphi}_m(\cdot;\tau) \\ l_m(H(\cdot,\xi;\tau)) & l_m\tilde{\varphi}_1(\cdot;\tau) & \ldots & l_m\tilde{\varphi}_m(\cdot;\tau) \end{vmatrix},$$

где

1) $\tilde{\varphi}_j(x;\tau) = \begin{cases} \varphi_j(x;\tau), & x \in \Gamma_j, \\ 0, & x \in \Gamma \setminus \{\Gamma_j \cup a\}, \end{cases}$

а $\varphi_j(x;\tau)$ являются решениями задачи $-u''(x) + su(x) = 0, x \in \Gamma_j, u'|_{\partial\Gamma_j\setminus\{a\}} = 0, u'(a) = 1$ (последняя производная предполагается взятой в направлении от a, где

$$u'(a) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{u(a+\varepsilon h_j) - u(a)}{\varepsilon},$$

а $h_j \in R^n$ таков, что $(a + \varepsilon h_j) \in \Gamma_j$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$)

2) $H(x,\xi;\tau) = \begin{cases} G_j(x,\xi;\tau), (x,\xi) \in \Gamma_j \times R(\Gamma_j), \\ 0, (x,\xi) \notin \Gamma_j \times R(\Gamma_j), \end{cases}$

$G_j(x,\xi;\tau)$ есть функция Грина задачи

$$\begin{cases} -u''(x) + su(x) = f(x), x \in \Gamma_j, \\ u'(x)|_{\partial\Gamma_j} = 0; \end{cases}$$

3) функционалы $l_i (i = \overline{1,m})$ определены на функциях, заданных на $\Gamma \setminus \{a\}$;

4) $l_i(u) = u_i(a) - u_{i+1}(a), i = \overline{1,m-1}$, где $u_i(a) = \lim\limits_{\Gamma_i \ni x\to a} u(x), i = \overline{1,m}$;

5) $l_m(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i'(a)$, где $u_i'(a) = \lim\limits_{\Gamma_i\ni x\to a} u'(x)$ (производная здесь предполагается взятой в направлении от a, где, в свою очередь,

$$u'(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{u(x+\varepsilon h_j) - u(x)}{\varepsilon},$$

а $h_j \in R^n$ таков, что $(x + \varepsilon h_j) \in \Gamma_j$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$);

6) $\Delta(\tau) = \det\|l_i\tilde{\varphi}_j(\cdot;\tau)\|_{i,j=1}^m$.

При $x = a$ $G(x,\xi;\tau)$ определяется равенством $G(a,\xi;\tau) = \lim\limits_{x\to a} G(x,\xi;\tau)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \in \partial\Gamma_1$. Непосредственно проверяется, что

$$\Delta(\tau) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{m}\varphi_j(a;\tau).$$

* Приводимое представление $G(x,\xi;\tau)$ обосновывается так же, как и в [1, гл. 3, пп. 3.2.2 и 3.2.3], но для наших целей оно более удобно.

Заметим, что $\varphi_j(x;\tau) = -G_j(x,a;\tau)$, откуда $\varphi_j(a;\tau) = -G_j(a,a;\tau)$. Тогда $|\Delta(\tau)| = O^*(\tau\,|^{-\frac{m-1}{2}})$ — в силу предположения индукции. Рассмотрим случай: $x \in \Gamma_1$. В этом случае

$$|G(x,\alpha;\tau)| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta(\tau)}\left|\begin{matrix} G_1(x,\alpha;\tau) & \varphi_1(x;\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ G_1(a,\alpha;\tau) & \varphi_1(a;\tau) & -\varphi_2(a;\tau) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(a;\tau) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}\right|\right| =$$

$$= |G_1(x,\xi;\tau) +$$

$$+ \frac{\varphi_1(x;\tau)}{\Delta(\tau)}\left|\begin{matrix} G_1(a,\alpha;\tau) & -\varphi_2(a;\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2(a;\tau) & -\varphi_3(a;\tau) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|G_1(x,\alpha;\tau) + \frac{1}{\Delta(\tau)}\varphi_1(x,\tau)\cdot G_1(a,\alpha;\tau)\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a,\tau)\right| =$$

$$= |G_1(x,\alpha;\tau)| \times$$

$$\times\left|1 + \frac{1}{\Delta(\tau)}(G_1(x,\alpha;\tau))^{-1}\varphi_1(x,\tau)\cdot G_1(a,\alpha;\tau)\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a,\tau)\right|.$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\Delta(\tau)}(G_1(x,\alpha;\tau))^{-1}\varphi_1(x,\tau)\times$$

$$\times G_1(a,\alpha;\tau)\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a,\tau) \to 0. \qquad (3)$$

$$(\tau \to \infty)$$

Для этого рассмотрим

$$\left|\frac{1}{\Delta(\tau)}(G_1(x,\alpha;\tau))^{-1}\varphi_1(x,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\, G_1(a,\alpha;\tau)\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a,\tau)\right|.$$

По предположению индукции имеем (ввиду того, что количество внутренних вершин каждого геометрического графа Γ_j не превосходит k:

$$|G_1(x,\alpha;\tau)| = O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(x,\alpha)\gamma(\tau)}),$$

$$|\varphi_1(x;\tau)| = |-G_1(x,a;\tau)| = O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(x,a)\gamma(\tau)}),$$

$$|G_1(a,\alpha;\tau)| = O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(a,\alpha)\gamma(\tau)}),$$

$$\left|\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a;\tau)\right| = O^*(|\,\tau\,|^{-m-22}).$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{\Delta(\tau)}(G_1(x,\alpha;\tau))^{-1}\varphi_1(x,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times G_1(a,\alpha;\tau)\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a,\tau)\right| =$$

$$= O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(x,a)\gamma(\tau)})O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(a,\alpha)\gamma(\tau)})\times$$

$$\times O^*(|\,\tau\,|^{-m-22})O^*(|\,\tau\,|^{12}\; e^{\rho(x,\alpha)\gamma(\tau)})O^*\times$$

$$\times(|\,\tau\,|^{\frac{m-1}{2}}) = O^*(e^{(\rho(x,\alpha)-\rho(x,a)-\rho(a,\alpha))\gamma(\tau)}).$$

Так как $x \in \Gamma_1$, то $x \neq a$, и, значит, $\rho(x,\alpha) - \rho(x,a) - \rho(a,\alpha) < 0$. Поэтому $e^{(\rho(x,\alpha)-\rho(x,a)-\rho(a,\alpha))\gamma(\tau)} \to 0$ при $\tau \to \infty$, что и влечет (3). В силу (3) полученное выше представление $|G(x,\alpha;\tau)|$ влечет следующее:

$$|G(x,\alpha;\tau)| = O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(x,\alpha)\gamma(\tau)})\,|1 + o(1)|.$$

Таким образом, в этом случае получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим случай: $x \notin \Gamma_1$. В этом случае, с учетом $H(x,\alpha;\tau) = 0$, имеем

$$|G(x,\alpha;\tau)| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta(\tau)}\left|\begin{matrix} 0 & 0 & \varphi_2(x;\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ -G_1(a,\alpha;\tau) & \varphi_1(a;\tau) & -\varphi_2(a;\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(a;\tau) & -\varphi_3(a;\tau) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}\right|\right| =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\tau)}\varphi_2(a;\tau)\left|\begin{matrix} -G_1(x,\alpha;\tau) & \varphi_1(x;\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_3(a;\tau) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3(a;\tau) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= O^*(|\,\tau\,|^{m-12})O^*(|\tau|^{-1/2}\; e^{-\rho(x,a)\gamma(\tau)})\times$$

$$\times O^*(|\tau|^{-1/2}\; e^{-\rho(a,\alpha)\gamma(\tau)})O^*(|\,\tau\,|^{-m-22}).$$

Таким образом, и для этого случая утверждение теоремы доказано, так как $\rho(x,a) + \rho(a,\alpha) = \rho(x,\alpha)$.

Наконец, с учетом полученного выше представления для $G(x,\alpha;\tau)$ при $x \in \Gamma_1$ получаем:

$$|G(a,\alpha;\tau)| = \lim_{\Gamma_1 \ni x \to a}|G(x,\alpha;\tau)| =$$

$$= \left|G_1(a,\alpha;\tau) + \frac{1}{\Delta(\tau)}\varphi_1(a,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\, G_1(a,\alpha;\tau)\prod_{j=2}^{m-1}\varphi_j(a;\tau)\right| =$$

$$= O^*(|\,\tau\,|^{-12}\; e^{-\rho(a,\alpha)\gamma(\tau)})\,|1 + O^*(1),(2)|.$$

Последнее и доказывает утверждение теоремы полностью.

Пусть теперь $\overline{G}(x,\xi;s)$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} -u''(x) + su(x) = f(x), x \in \Gamma, \\ u' \,|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases}$$

где s — комплексный параметр, Re $s > 0$. Из доказанной нами теоремы вытекает следующее.

Следствие. В условиях теоремы существует оригинал функции $\overline{G}(x,\xi;s)$ в смысле одностороннего преобразования Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. М.: Физматлит, 2004, — 272 с.

2. *Грищенко А. В.* Аналитическое представление решения смешанной задачи для параболического уравнения на сети с разрывом в коэффициенте / А. В. Грищенко // Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 5—10 июля 2004 г. — Владимир: ВГПУ, 2004 С. 65—66.